# 問1の解答例

$$g_1(x) = \begin{cases} x(10-x) & (0 \le x \le 5) \\ 25 & (6 \le x < +\infty) \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 2x(6-x) & (0 \le x \le 3) \\ 18 & (4 \le x < +\infty) \end{cases}$$

$$g_3(x) = 4x \qquad (0 \le x < +\infty)$$

最大化 $g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$
条件 $x_1 + x_2 + x_3 = 6,$
$x_i \ge 0$, 整数 $(\forall i = 1,2,3)$

表を書くとわかりやすい（手計算の場合）

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(0)$ | 0 | 0 | 0 |
| $g_i(1)$ | 9 | 10 | 4 |
| $g_i(2)$ | 16 | 16 | 8 |
| $g_i(3)$ | 21 | 18 | 12 |
| $g_i(4)$ | 24 | 18 | 16 |
| $g_i(5)$ | 25 | 18 | 20 |

| | 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(1) - g_i(0)$ | 9 | 10 | 4 |
| $g_i(2) - g_i(1)$ | 7 | 6 | 4 |
| $g_i(3) - g_i(2)$ | 5 | 2 | 4 |
| $g_i(4) - g_i(3)$ | 3 | 0 | 4 |
| $g_i(5) - g_i(4)$ | 1 | 0 | 4 |

x1→x2→x2→x1→x2→x3→x3→x3 の順

# 解答例

問2：（離散）凹関数 $g_i: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ および整数 $\alpha, \beta$ に対し，
$\alpha < \beta$ ならば不等式 $g_i(\alpha) + g_i(\beta) \leq g_i(\alpha + 1) + g_i(\beta - 1)$
が成り立つことを証明せよ.

（証明）凹関数の定義より，

$g_i(t + 1) - g_i(t)$ は t に関して単調非増加.

このことと，$\alpha \leq \beta - 1$ より，

$$g_i(\alpha + 1) - g_i(\alpha) \geq g_i(\beta) - g_i(\beta - 1)$$

書き換えると，

$$g_i(\alpha) + g_i(\beta) \leq g_i(\alpha + 1) + g_i(\beta - 1)$$

問3：議員定数配分問題を考える.

選挙区の数＝3，各選挙区の人口が100, 300, 600 の町で5議席を配分する．最適な配分を貪欲アルゴリズムにより計算せよ.

目的関数が (i) 自乗和の場合，(ii) 絶対値の和の場合，それぞれについて計算せよ.

(i)のとき

目的関数=$\left(\frac{x_1}{100}-\frac{5}{1000}\right)^2+\left(\frac{x_2}{300}-\frac{5}{1000}\right)^2+\left(\frac{x_3}{600}-\frac{5}{1000}\right)^2$

$=\frac{1}{360000}[(6x_1-3)^2+(2x_2-3)^2+(x_3-3)^2]$

$(6x_1-3)^2,(2x_2-3)^2,(x_3-3)^2$ の値，変化量を比較すればよい

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(0)$ | 9 | 9 | 9 |
| $g_i(1)$ | 9 | 1 | 4 |
| $g_i(2)$ | 81 | 1 | 1 |
| $g_i(3)$ | | 9 | 0 |
| $g_i(4)$ | | 25 | 1 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(1)-g_i(0)$ | 0 | -8 | -5 |
| $g_i(2)-g_i(1)$ | 72 | 0 | -3 |
| $g_i(3)-g_i(2)$ | | 8 | -1 |
| $g_i(4)-g_i(3)$ | | 16 | 1 |

x2→x3→x3→x3→x1 or x2
の順に1ずつ増やしていく

問3：議員定数配分問題を考える.

選挙区の数＝3，各選挙区の人口が100, 300, 600 の町で5議席を配分する．最適な配分を貪欲アルゴリズムにより計算せよ.

目的関数が (i) 自乗和の場合，(ii) 絶対値の和の場合，それぞれについて計算せよ.

(ii)のとき

目的関数$= \frac{1}{360000}[|6x_1 - 3| + |2x_2 - 3| + |x_3 - 3|]$

$|6x_1 - 3|, |2x_2 - 3|, |x_3 - 3|$の値，変化量を比較すればよい

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(0)$ | 3 | 3 | 3 |
| $g_i(1)$ | 3 | 1 | 2 |
| $g_i(2)$ | 9 | 1 | 1 |
| $g_i(3)$ | | 3 | 0 |
| $g_i(4)$ | | 5 | 1 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $g_i(1) - g_i(0)$ | 0 | -2 | -1 |
| $g_i(2) - g_i(1)$ | 6 | 0 | -1 |
| $g_i(3) - g_i(2)$ | | 2 | -1 |
| $g_i(4) - g_i(3)$ | | 2 | 1 |

x2→x3→x3→x3→x1 or x2
の順に1ずつ増やしていく