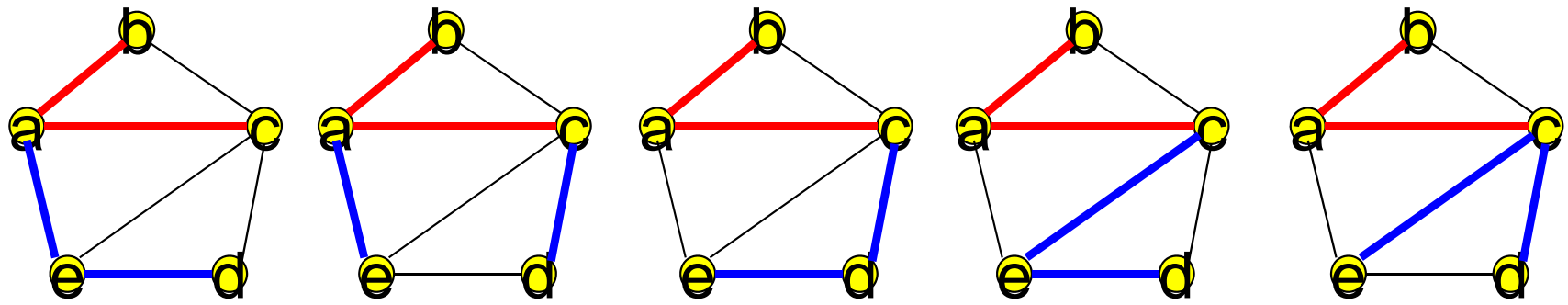
問題1：解答例は省略

問題2：右のグラフの全域木のうち，
枝 (a,b), (a,c) の両方を含むものを
すべて書け（ヒント：5個以上）



問題3の証明:

（1）T から枝(u,v)を削除すると非連結になることを示す.

背理法により証明する. T-(u,v) は連結と仮定し, 矛盾を導く.

この仮定および連結性の定義より, u と v の間の路 P が T-(u,v) に存在する.

このことより, T は閉路 P∪{(u,v)} を含む.

一方, 全域木の定義より, 全域木 T には閉路は含まれない. よって矛盾.

このことより, T – (u,v) は非連結であり, よって, 連結成分の数は2つ以上.

問題3’の証明

グラフ (V, T) において, 頂点 u からの路が存在する頂点全体を V’ とおき,

V’’ = V – V’ とおく. すると, u∈V’ であり, v は u からの路が存在しないので v∈V’’.

（2）頂点集合 V’ と V’’ をつなぐ枝は T – (u,v) の中に存在しない.

（∵V’ の定義より, V’ の中から外(V’’)へ向かう枝は存在しない）

よって, T – (u,v) の任意の枝 (s,t) に対し,

s,t はともに V’ に含まれるか, もしくはともに V’’ に含まれる.

問題3の証明（つづき）:

枝の両端点が V′ に含まれる枝の集合を T′ とおき,

枝の両端点が V′′ に含まれる枝の集合を T′ とおく.

（3）(V′, T′) が連結であることを示す.

任意の s, t∈V′ に対し，v と s の間の路 P′ および v と t の間の路 P′′ が存在する.

P′ ∪ P′′ は s と t を（v 経由で）結ぶ路である.　　よって，(V′, T′) は連結.

（4）(V′′, T′′) が連結であることを示す.

V′′ の任意の頂点と v との間に路が存在することを示せば良い（（3）と同様）.

s∈V′′ とする. T においては u と s の間に路 Q が存在する.

V′ と V′′ を結ぶ枝は (u,v) のみなので，u から Q をたどって s に行くときには,

かならず枝 (u,v) を通過する. とくに，v を通過して，V′′ の中を通って，s に行く.

つまり，Q の部分路で，v から s まで V′′ の中を通る路が存在する.

以上より，(V, T − (u,v)) の連結成分は (V′, T′) と (V′′, T′′) の2つのみとなる.　■

問題4の証明:

(V’, T’), (V’’, T’’) に枝 (s,t) を追加したグラフに閉路 C が含まれていると仮定する.

全域木の定義より，全域木 T は閉路を含まない.

よって，T - (u,v) も閉路を含まない.

したがって，T* = T - (u,v) + (s,t) が閉路 C を含むならば，C は枝 (s,t) を必ず含む.

P = C - (s,t) とすると，これは s と t をつなぐ路であって，

枝集合 T* - (s,t) = T - (u,v) に含まれる.

よって，s と t は同じ連結成分に含まれるはずである.

しかし，s と t は T - (u,v) の異なる連結成分に

含まれるので矛盾 ■