2019年度 数理経済学
第1回

最短路問題
負の枝長を許した場合

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

この講義の目的

×「数理経済学」を学ぶ

（経済の数理モデルを作り，数学的に解析する分野）

〇 経済・経営工学に役立つ数理を学ぶ

情報科学，「AI」にも役立つ

より具体的には：

- 離散的な最適解・安定解を求める問題を紹介
  - 経済では，連続的な財だけでなく，離散的な財も扱う
- 問題の数理構造，アルゴリズムを説明
  - アルゴリズムが正しく動く理由を解説
- 経済学・経営工学との繋がりを紹介

今後の予定

- 最短路問題
- 最大要素マッチング問題
- 最大重みマッチング問題
- 最小全域木問題

最適解を求める

7月9,12日あたりに
中間試験

- 資源配分問題
- 最大流問題
- 最小費用流問題

最適解を求める

- ナップサック問題
- 巡回セールスマン問題

近似解を求める

7月末～8月上旬に
期末試験

授業の進め方

- 毎回の授業の流れ

  前回授業のレポートの解説➔講義 ➔レポート問題の出題
- レポートは授業中に各自で採点後，提出してもらいます
  - レポート提出は義務ではなく，任意.
  - 問題の解答が不完全でも良いので，なるべく提出すること
  - 他人のレポートとほぼ同一，または他の文献の丸写し（剽窃）はペナルティを科す
    - 他の学生と相談して作成した場合でもレポートは自分で書く
    - 本などを参考にした場合は参考文献情報を書く

- 授業資料はOCWに置きます（OCW-iではない）
  - www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching も参照のこと.
- 質問したい場合は，授業前後，メール（簡単な質問）

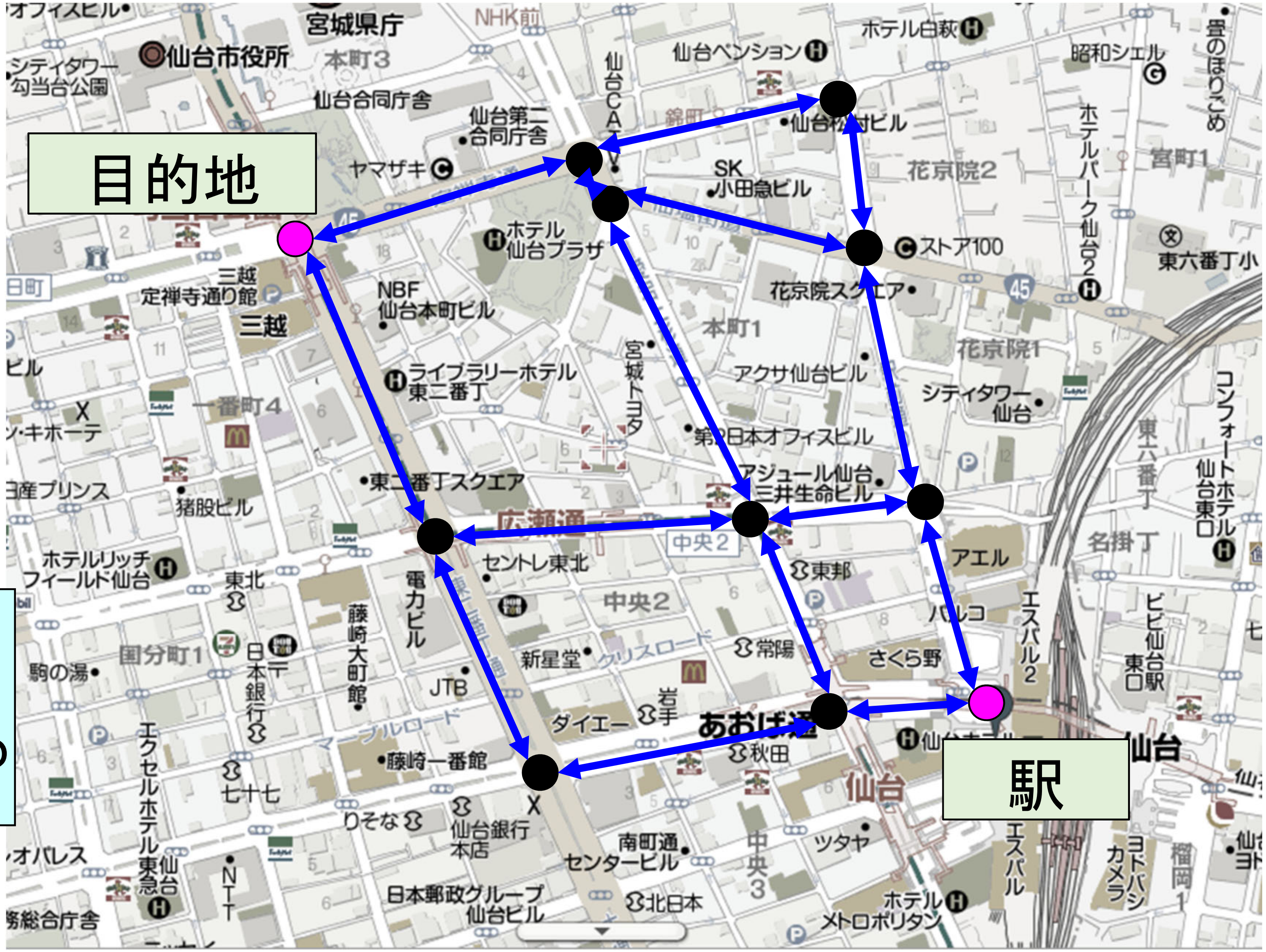
  または研究室（とくに成績に関する問合せ）にて

成績の評価方法

- 中間50点＋期末50点 ＋ レポートの提出状況20～30点
  ➔ 100点で打ち切り
  - 全体で59点以下は不合格
- 中間試験および期末試験の出来が悪くても不合格
  - それぞれ50点満点
  - 26点以上合格
  - 25点以下は原則不合格

最も短い経路を求める

駅から
勾当台までの
最短経路を
求めたい
➔グラフを使って
モデル化

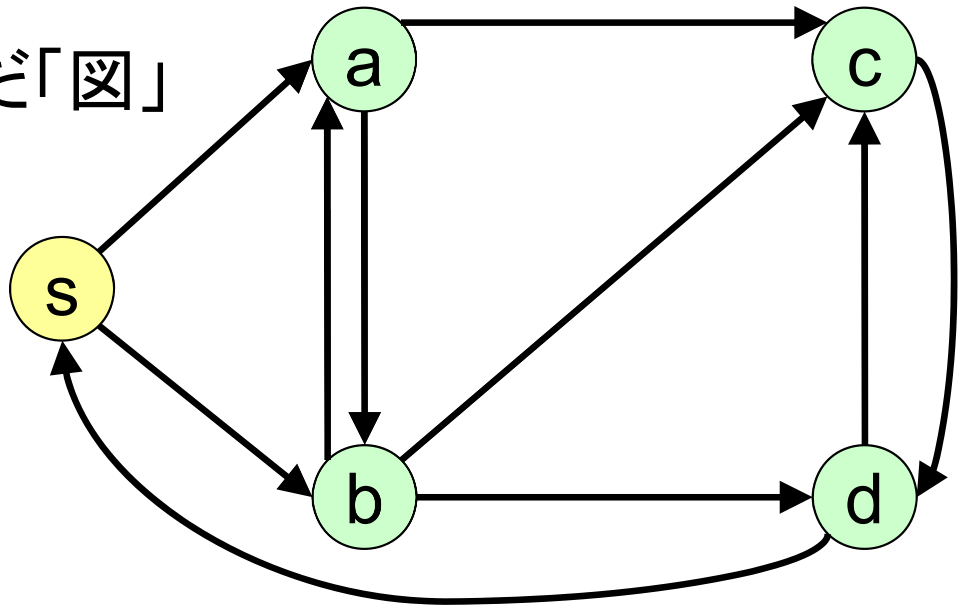


各頂点の間に距離
(移動時間)を与える

グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

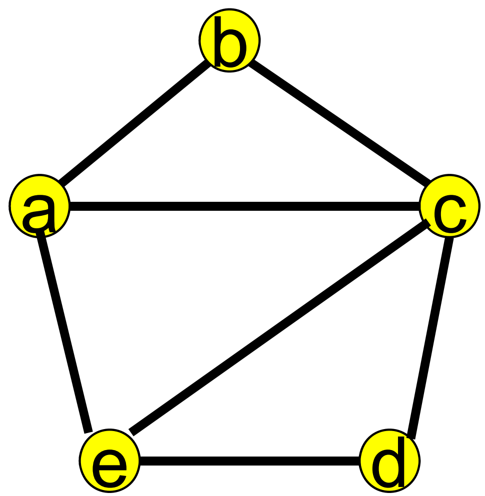
- 定義：グラフ＝「丸」を「線」で結んだ「図」
  - 頂点＝「丸」，枝＝「線」



グラフの例

- 友人関係の図
- 鉄道路線図，道路網
- 組織図，家系図

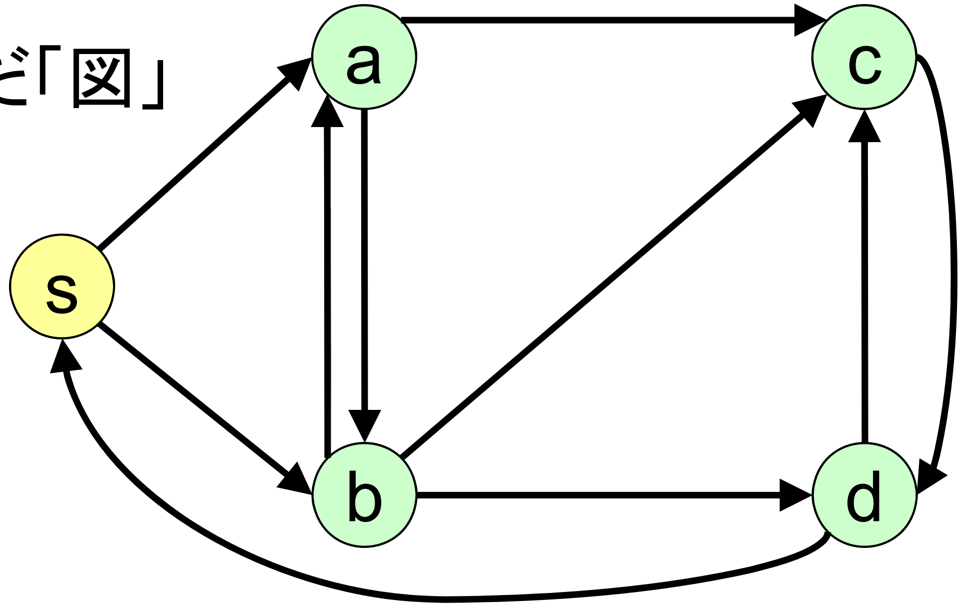
有向グラフ: 枝に向きの付いたグラフ
無向グラフ: 枝の向きの付いていないグラフ



グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

- 定義：グラフ＝「丸」を「線」で結んだ「図」
  - 頂点＝「丸」，枝＝「線」

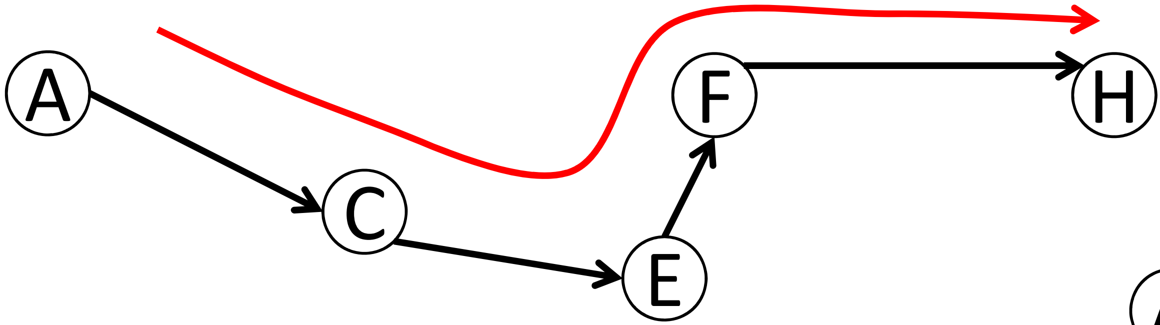


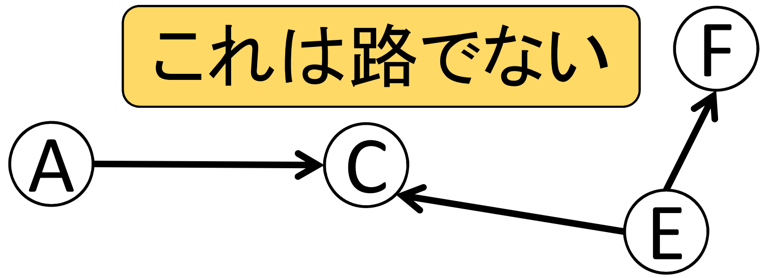
※数学的には，グラフ$G = (V, E)$は
全頂点の集合V と全枝の集合E の対として表現
各枝$(u, v) \in E$は頂点の（順序）対として表現

上記のグラフの場合，
すべての頂点の集合$V = \{s, a, b, c, d\}$
すべての枝の集合$E = \{(s, a), (a, b), (b, a), (b, d), \ldots\}$

路と閉路

- 路（みち）（path, パス）＝複数の枝が1つにつながったもの





厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$

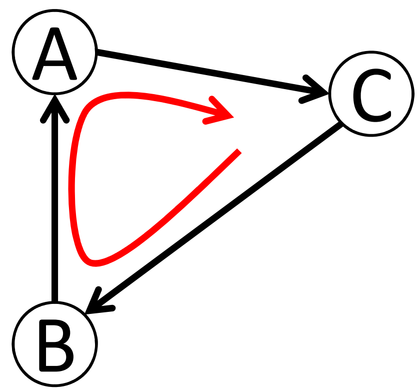
ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$

- 閉路（cycle, サイクル）＝複数の枝が1つの輪になったもの

厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_k, v_k)$

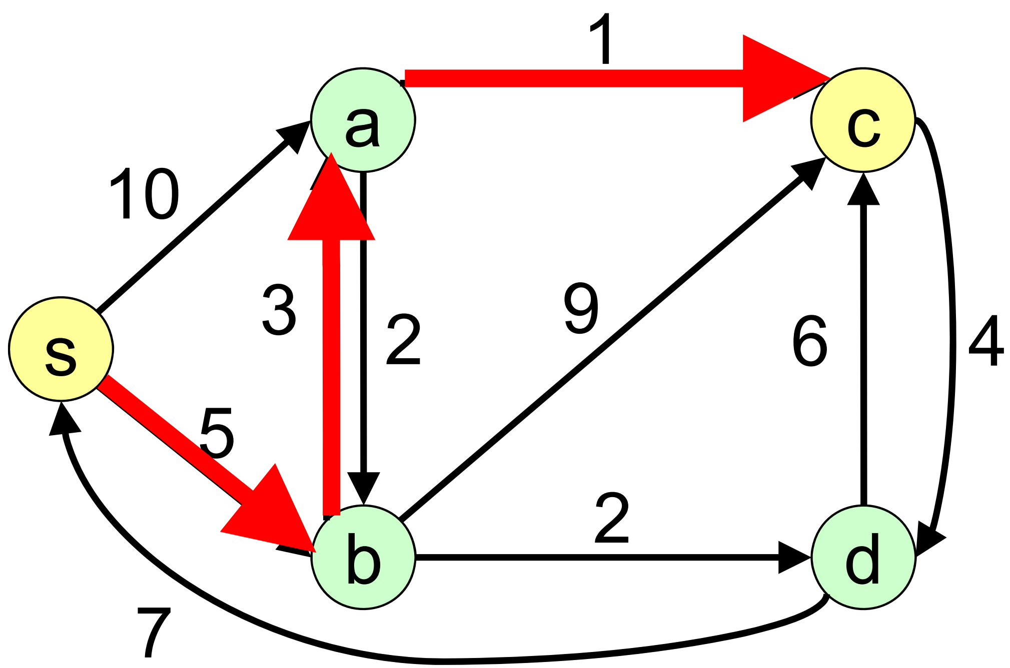
ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \dots, v_{k-1} = u_k$

$v_k = u_1$



単一始点単一終点 最短路問題

- 入力 : 有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 s∈V，終点t∈V
- 出力 : s から t への最短路 P(t) とその長さd(v)
  （sからt への最短路 P*
  = sからtへの路のうち，枝の長さの和 $\ell(P^*)$が最小のもの）

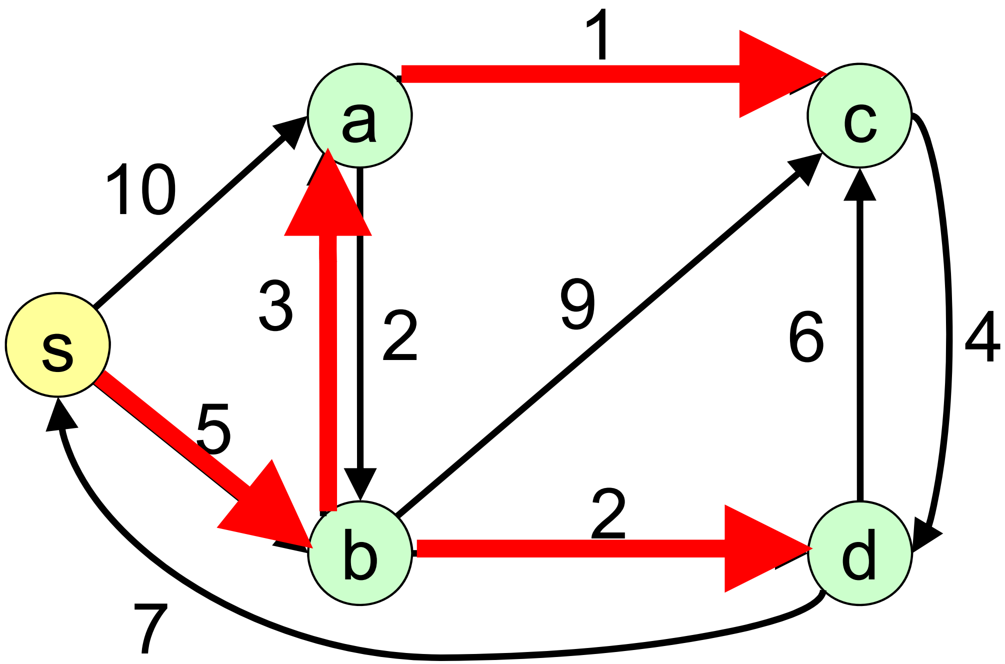


後述するように，
特定の頂点への最短路を
求めるためには，
全ての頂点への最短路を
求めると効率的
➔単一始点全終点
最短路問題

単一始点全終点 最短路問題

枝の長さが
負の場合も扱う

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$, 始点 s∈V
- 出力：s から すべての頂点 v への最短路P(v)とその長さd(v)



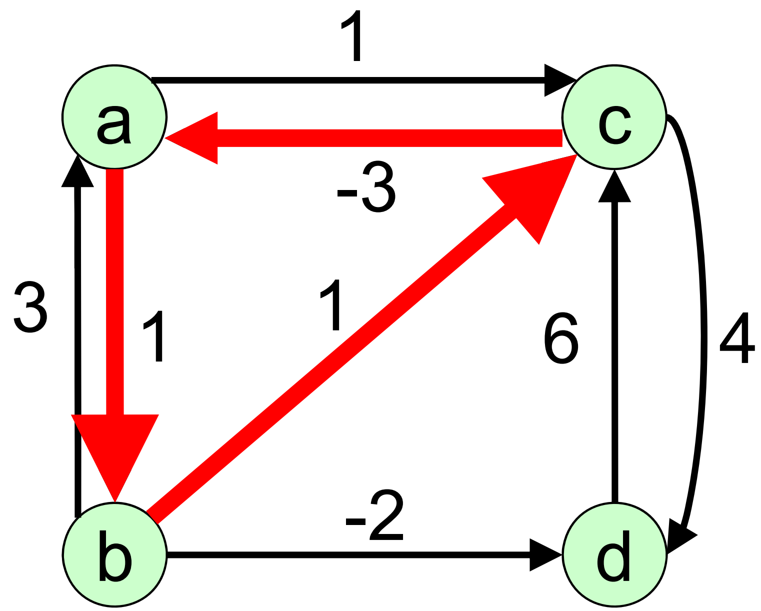
以降で使う仮定：
s から各頂点 v への路が存在
（存在しない場合は
枝(s,v)を追加，その長さを
十分大きい正数とする）

注意：路は，同じ頂点，
同じ枝を何回通っても可

関連する問題：グラフの負閉路の検出

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e)$ $(e \in E)$
- 出力：グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
  存在するときは，負閉路を求める

（負閉路 = 閉路のうち，枝の長さの和が負のもの）



応用：通貨両替の問題（鞘取，さやとり）

- 手持ちのお金をうまく両替して，儲けることは可能か？

入力：各国の通貨（JPY, EUR, USD, GBPなど）

通貨の両替レート（1USD=120JPYなど）

出力：手持ちのお金を増やす両替方法は存在するか？

from\to	100JPY	EUR	USD	GBP
100JPY	1	0.76	0.82	0.55
EUR	1.3	1	1.1	0.70
USD	1.2	0.9	1	0.65
GBP	1.8	1.4	1.5	1

100 JPY
→0.76 EUR
→076x1.1 USD
→0.76x1.1x1.2
=100.32 JPY

応用:通貨両替の問題(続き)

グラフを使って表現

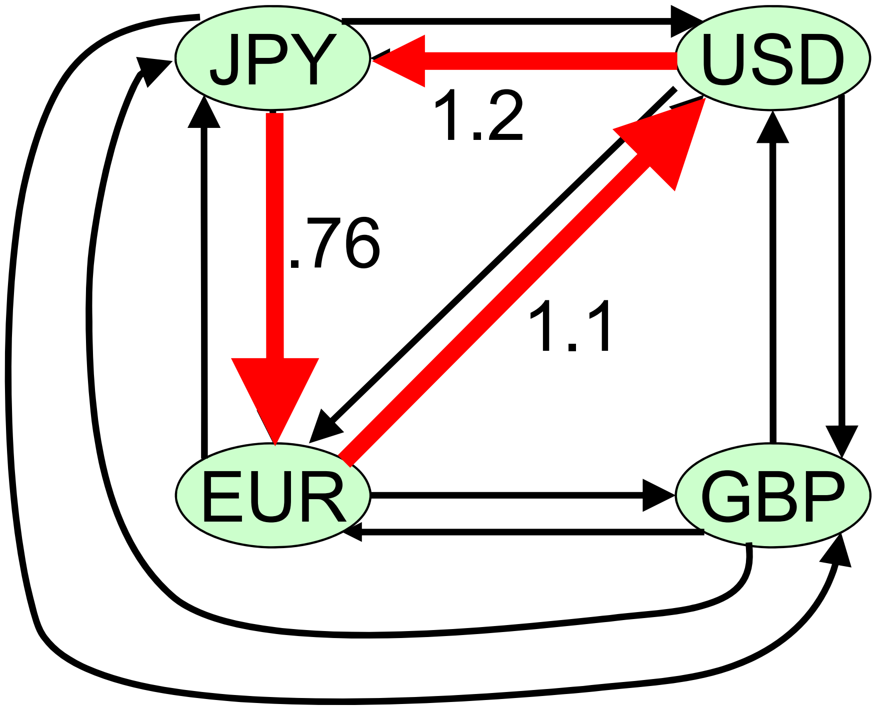
通貨Xから通貨Yへの両替←→枝(X,Y)

両替レート = 枝(X,Y)の重み

➔元の通貨に戻る両替の組合せ←→閉路

金額の変化率 = 閉路に含まれる枝の重みの積

この値>1🡸🡺金額増加



100 JPY
→0.76 EUR
→076x1.1 USD
→0.76x1.1x1.2
=100.32 JPY

閉路の重みを長さに変換して,「重みの積>1🡸🡺長さの和が負」が成り立つようにする
(ヒント: log ab
=log a + log b)

関連する問題：差分不等式系

- 入力：n 個の変数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ からなる，次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え
  存在するときは，解を求める

具体例

$p_2 - p_1 \leq 1,\ p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3,\ p_4 - p_2 \leq 5,$
$p_4 - p_3 \leq 4,\ p_3 - p_4 \leq 6,$
$p_1 = 0,\ p_4 \leq 5$

解あり
$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0,1,1,5)$

応用：プロジェクトスケジューリング

- 幾つかの作業 i=1,2,…, n からなるプロジェクト（例：自動車製造）
  - 最初の作業 1, 最後の作業 n
- 各作業 i の開始時間 s_i，終了時間t_i に関する制約
  - $s_1 = 0, t_n \leq D$（プロジェクトの開始終了時間に関する制約）
  - $t_i - s_i \geq = \leq \alpha_i$（各作業の処理時間に関する制約）
  - $s_j - t_i \geq = \leq \beta_{ij}$（作業のペアに関する制約）

- 制約を満たすスケジュールは存在するか？
  - 存在するならば，終了時間最小のスケジュールを求めたい

最短路の計算

ベルマン･フォードのアルゴリズム

(R. Bellman(1958), L. Ford, Jr.(1956))

定理：有向グラフに負閉路が存在しない
　➔ 始点から各頂点へ，枝数≦|V|-1 の最短路が存在

証明は後ほど

- 各反復で，次の値を計算

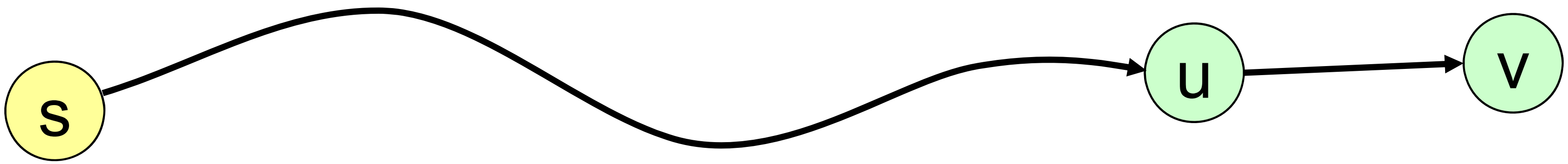
$d_k(v)$ ＝枝数が k 以下の s から v への路の中で，最短なものの長さ

このような路は，２つのパターンあり

(1) 枝数が k-1 以下 ➔ $d_k(v) = d_{k-1}(v)$

(2) s から，ある頂点 u への路（ただし枝数≦k-1）＋ 枝(u,v)

➔ $d_k(v) = d_{k-1}(u) + \ell(u,v)$



∴ 次の再帰式が成立

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$$

ベルマン･フォードのアルゴリズム

手順0：$d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty \ (\forall v \neq s)$ とおく．k=1とする．
- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1：各頂点 v に対し，以下の式で $d_k(v)$ を計算

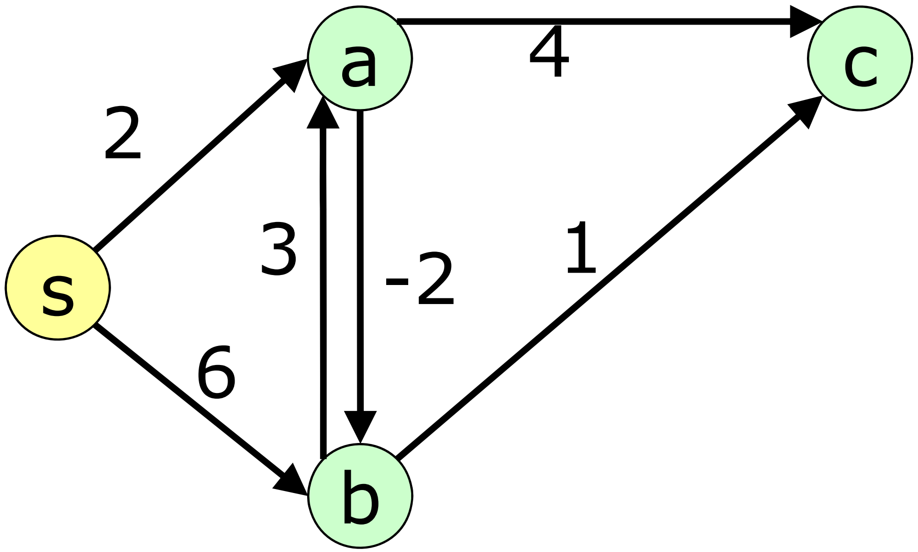
$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$$

手順2：k < |V| ならば k:=k+1とおいて手順1へ戻る．
　　　k=|V| ならば手順3へ．

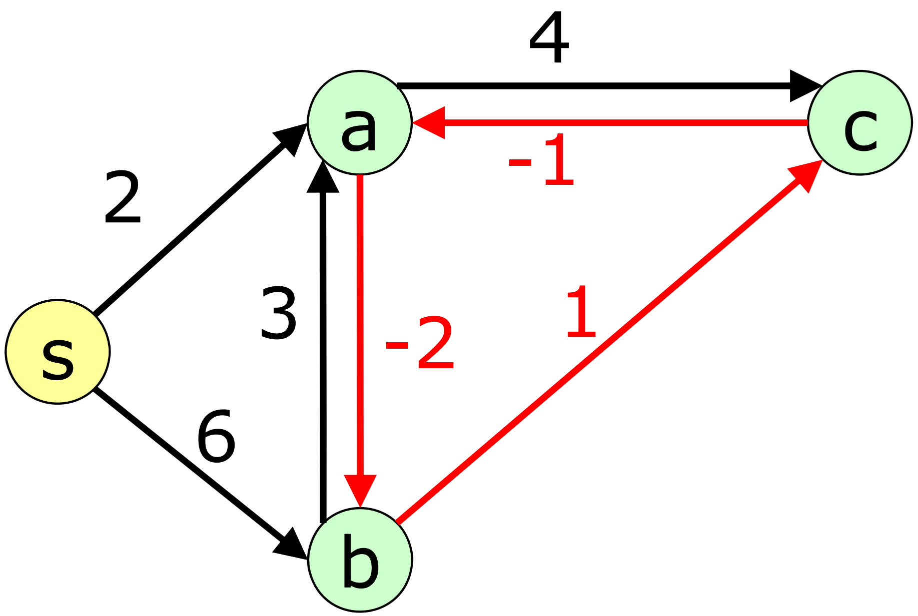
手順3：ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$が成立➔「負閉路存在」
　　　全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$が成立
　　　　➔最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
（若干の修正により）可能である

実行例



	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	2
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

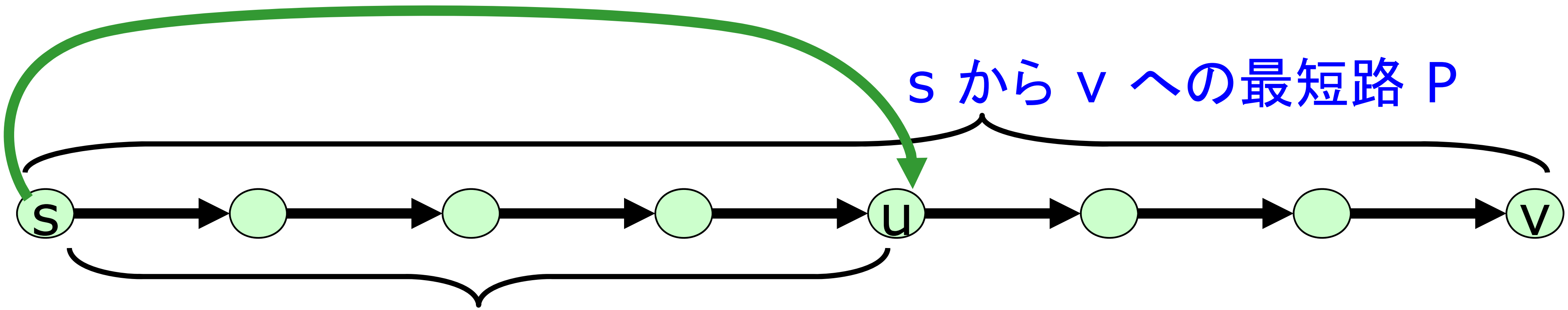


	k=0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	2	2	2	0
b	∞	6	0	0	0
c	∞	∞	6	1	1

最短路の性質

最短路の部分路は最短路

命題　P: 頂点 s から頂点 v への最短路
P は途中に頂点 u を含むと仮定
➔ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



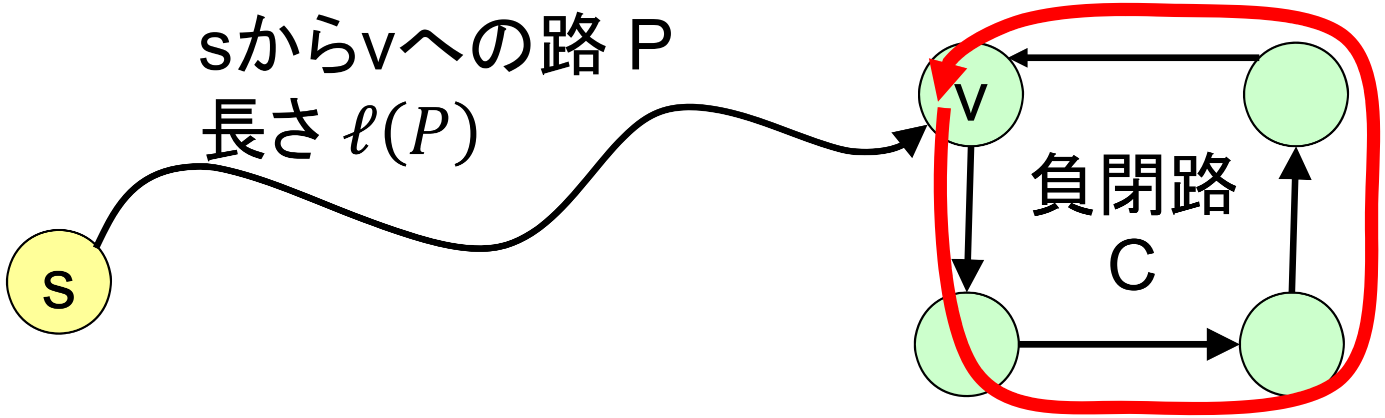
s から u への部分路 P' 🡐 s から u への最短路

（証明）もし P′ より短い路 P″ が存在したら
→sからvへの路として，まず P″ に沿って s から u に行き，
その後 P と同じ枝をたどって v に行く路 Q を考える．
Q の長さ - P の長さ ＝ P″ の長さ - P′ の長さ ＜ 0
よって，　P の選び方に矛盾．

負閉路が存在➔最短路が不存在

- 負閉路が存在➔ある頂点への最短路は存在しない
- [対偶] 全ての頂点への最短路が存在➔負閉路は存在しない

命題　グラフに負閉路 C が存在（長さ$\ell(C) < 0$）
➔ C に含まれる各頂点 v に対し,
　inf{ s から v への路の長さ } = − ∞ （最短路が存在しない）

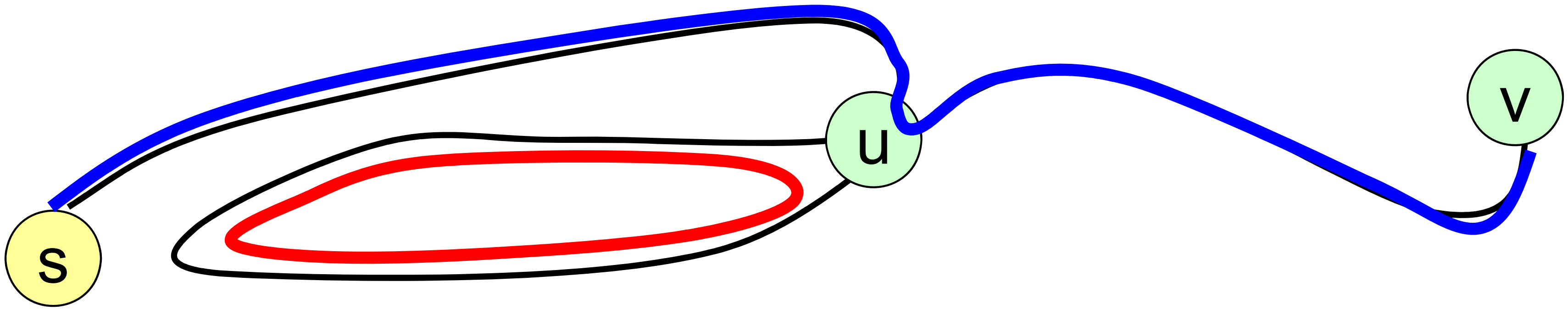


（証明）sからvへの路として，次のようなものを考える:
　路 P を使って s から v に行く → 負閉路を k 回通って v に戻る
これも s から v への路，長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
k を任意に大きくする➔路の長さが任意に小さくなる

負閉路が不存在➔最短路が存在

定理：有向グラフに負閉路が存在しない
➔ 始点から各頂点へ，枝数≦|V|-1 の最短路が存在

（証明）P*: s から v への，枝数 |V|-1 以下の路の中で，最短（←必ず存在）
次の命題を示せば良い．
(A) s から v への，枝数が|V|以上の任意の路 P に対し $\ell(P^*) \leq \ell(P)$
命題(A)を示すには，次の(B)を示せば良い（なぜか？）
(B) s から v への，枝数が|V|以上の任意の路 P に対し，
枝数がPより少ない v への路 P' が存在して，$\ell(P') \leq \ell(P)$

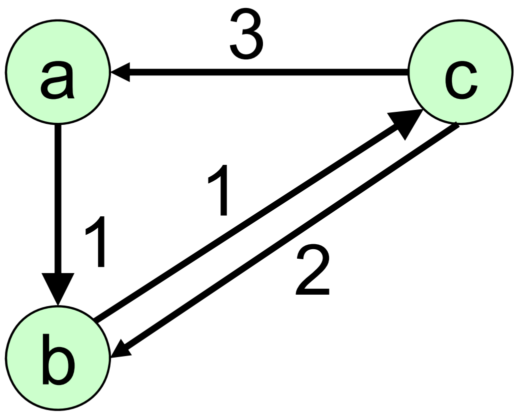


sからvへの路 P，枝数≧|V| ➔ 同じ頂点（u とする）が2回現れる
u から u への部分路は閉路➔長さは非負
➔削除すると，枝数が少なく，長さが短い路 P' を得る

ポテンシャルと負閉路

最短路問題における便利な道具

定義: 実数 $p(v)(v \in V)$ はポテンシャル
←→各枝(u,v)に対し $p(v) - p(u) \le \ell(u,v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル

※ポテンシャルは存在しないこともある
（例: (c,a) の枝長を-3にした場合）

命題 ポテンシャルは存在→負閉路は存在しない
（対偶: 負閉路が存在→ポテンシャルは存在しない）

（証明）任意の閉路C に対し,
不等式 $p(v) - p(u) \le \ell(u,v)$ $((u,v) \in C)$ を辺々足す
→ $0 = \sum_{(u,v)\in C}[p(v) - p(u)] \le \sum_{(u,v)\in C} \ell(u,v)$ =閉路の長さ

ポテンシャルと負閉路と最短路

命題 ポテンシャルは存在$\Leftarrow$負閉路は存在しない
(対偶：負閉路が存在$\Leftarrow$ポテンシャルは存在しない)

「負閉路なし」の証拠になる

命題 各頂点への最短路が存在する場合，各頂点への最短路長d(v)はポテンシャル($d(v) - d(u) \leq \ell(u, v)$成立)

(証明)負閉路が存在しない$\Rightarrow$最短路が存在(前のスライドの命題より)
よって，2つ目の命題を示せば良い.

P: 頂点 s から u への最短路, d(u)= P の長さ
$\Rightarrow$ $\tilde{P} = P \cup \{(u, v)\}$は s から v への路,
その長さ= $d(u) + \ell(u, v) \geq$ v への最短路長=d(v)

最短路の計算：正当性

ベルマン・フォードのアルゴリズム

手順0： $d_0(s) = 0, d_0(v) = +\infty \ (\forall v \neq s)$ とおく．k=1とする．

- s から枝数0でたどり着けるのは s のみなので

手順1： 各頂点 v に対し，以下の式で $d_k(v)$ を計算

$$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$$

手順2： k < |V| ならば k:=k+1とおいて手順1へ戻る．

k=|V| ならば手順3へ．

手順3：ある v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ が成立➔「負閉路存在」

全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立

➔最短路長 $d_{n-1}(v)$ を出力

出力結果が
正しいことを証明

出力結果が
正しいことを証明

アルゴリズムの正当性(その1)

再帰式　$d_k(v) = \min[d_{k-1}(v),\ \min\{d_{k-1}(u) + \ell(u,v) | (u,v) \in E\}]$

命題:負閉路が存在する ➔ 負閉路に含まれるある頂点 v に対して $d_n(v) < d_{n-1}(v)$が成立

(証明)閉路Cに含まれる枝を $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_k, v_1)$ とおく.

C は負閉路なので, $\ell(v_1, v_2) + \ell(v_2, v_3) + \cdots + \ell(v_k, v_1) < 0$.

再帰式より $d_n(v_{j+1}) \leq d_{n-1}(v_j) + \ell(v_j, v_{j+1})$ $(\forall j = 1,2, \ldots, k)$

(ただし, $v_{k+1} = v_1$ とする)

不等式を辺々足すと,

$$\sum_{j=1}^{k} d_n(v_j) = \sum_{j=1}^{k} d_n(v_{j+1})$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k} d_{n-1}(v_j) + \sum_{j=1}^{k} \ell(v_j, v_{j+1}) < \sum_{j=1}^{k} d_{n-1}(v_j)$$

∴ ある v_j に対して $d_n(v_j) < d_{n-1}(v_j)$が成立　■

アルゴリズムの正当性（その2）

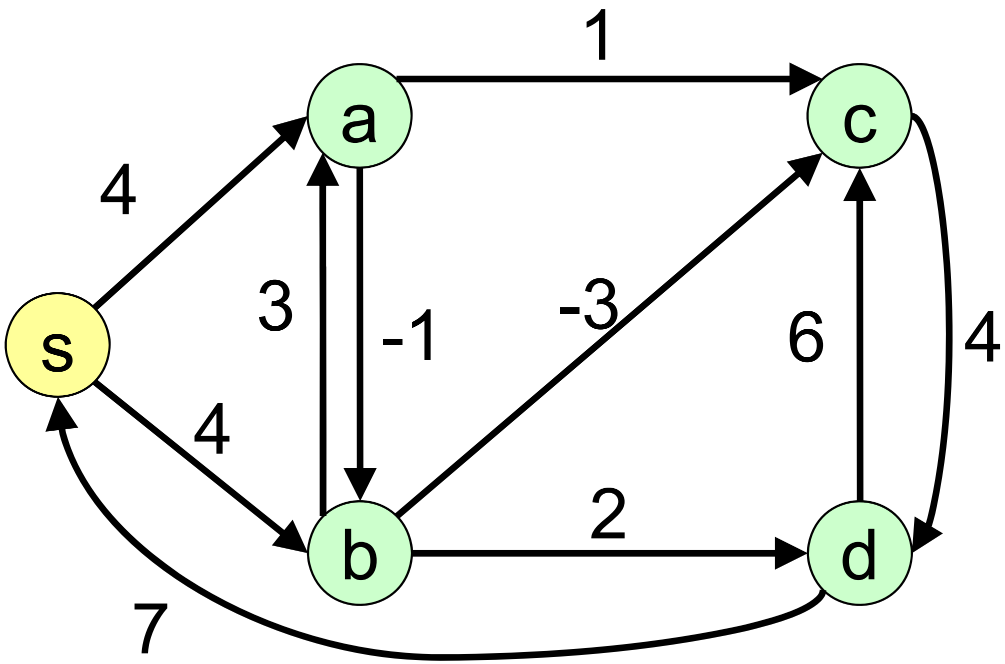
命題：負閉路が存在しない ➔任意の頂点 vに対して
$d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しく，$d_n(v) = d_{n-1}(v)$ 成立

（証明）各頂点 v への，枝数≦|V|-1 = n-1 の最短路が存在（定理より）
➔ $d_{n-1}(v)$ は頂点 v への最短路長に等しい
　さらに，全ての v に対して $d_n(v) = d_{n-1}(v)$ が成立　■

定理：有向グラフに負閉路が存在しない
　➔ 始点から各頂点へ，枝数≦|V|-1 の最短路が存在

演習問題

問1：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ベルマン・フォードのアルゴリズムで計算せよ．



	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	+∞					
b	+∞					
c	+∞					
d	+∞					

演習問題

問２：最短路問題を解いて，次の不等式系の実行可能解を求めるか，
　　またはは実行可能解をもたないことを示せ．

$$x_b - x_a \le -1, x_a - x_b \le 3, x_c - x_a \le 1, x_a - x_c \le 2,$$
$$x_c - x_b \le -3, x_d - x_b \le 2, x_d - x_c \le 4,\ x_c - x_d \le 6$$

問３： ベルマン・フォードのアルゴリズムにおいて，
　　最短路を計算するにはどのように修正したら良いか，説明せよ．