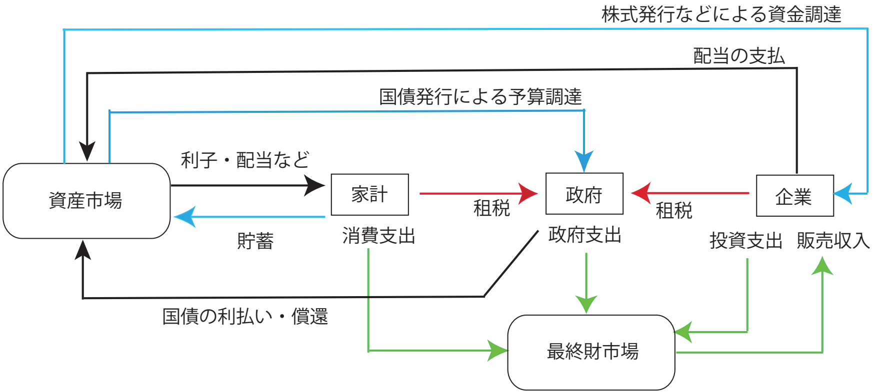
2019年度　マクロ経済学第一

第12回：経済成長の理論 (前半)

大土井 涼二

工学院経営工学系，開講クォーター: 2Q

前回まで：資金フロー全体を数理モデルで分析



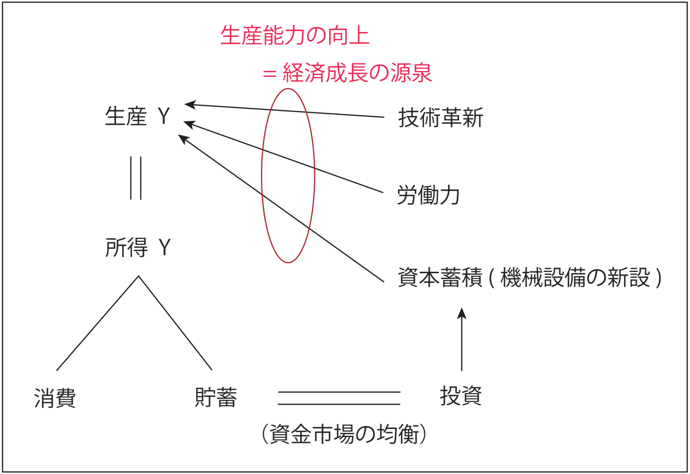
資産保有の対価としての資金フロー

家計貯蓄や企業・政府の借入による資金フロー

生産要素や財の取引による資金フロー

税支払いによる資金フロー

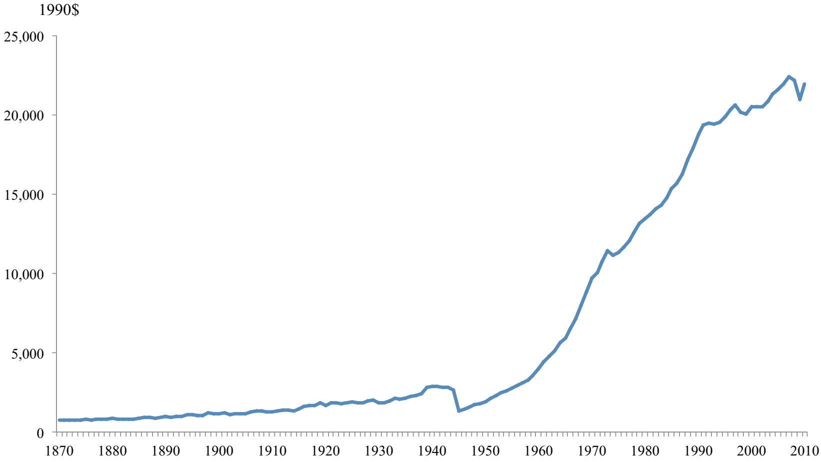
今回と次回



テーマ：これら３つの要因から，１国の生産・所得はどう拡大 or 衰退していくのだろうか？

明治維新後の日本の一人当たり GDP 推移

1990 年基準の US$で評価



出所: Maddison Project (http://www.ggdc.net/maddison/)

経済成長理論

- 経済成長とは何か？
  $\rightarrow$ 一言でいえば「経済全体の生産・所得が長期的に拡大していくこと」
- 経済成長理論の主要目的：
  1. 一国の経済成長パターン決定要因の理論的解明
  2. 国際的な所得格差の発生・持続メカニズムの理論的解明
- 従って,「長期のマクロ経済均衡」で仮定した「2 期間」よりも，もっと長い期間のモデルを構築する必要がある.

ソロー・モデル

- ソロー・モデル (Solow model) ⋯ 経済学者ロバート・ソロー (Robert M. Solow) による以下の論文で提示された.

  Solow, R. M. (1956) “A Contribution to the Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics* 70, 427–443.

- この論文においてソローは「貯蓄 (=投資)」や「技術進歩」が時間を通じて経済の GDP に与える影響を分析するための最もシンプルなモデルを提示.
- このソローの最初の業績以降，のちに多数のより洗練された経済成長モデルが提示されるようになった.

これまでとの違い

- このトピックの内容 ··· テキストの 8 章に対応.
- 6 章の「長期のマクロ経済モデル」との違い：
  1. 終了期間をあえて明示していない「無限期間モデル」で分析を行う.
  2. 生産要素として,「物的資本」と「労働」の 2 要素を想定する.
  3. ソロー・モデルでは，簡単化のため，家計の消費・貯蓄の意思決定は明示的に考慮しない.

主要な変数の意味

- t：期間 (period), $t = 1, 2, 3 \ldots$ (無限期間)
- Y_t： t 期の実質 GDP ($\equiv$ 実質国内総所得)
- K_t：資本ストック
- L_t：労働力人口
- C_t：消費
- S_t：貯蓄
- I_t：投資

$(*)$ 「技術進歩」は次回 (7/26) 考察する予定.

生産関数

- t 期の生産は，以下の生産関数で記述される：

$$Y_t = F(K_t, L_t). \tag{1}$$

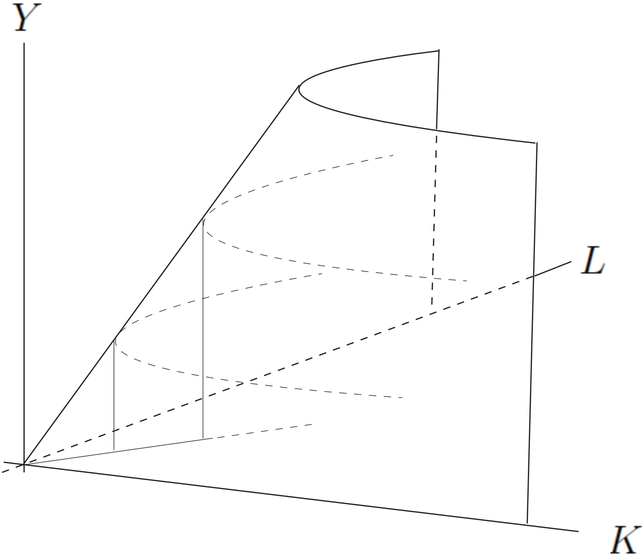
- 生産関数 F に関して，以下の 3 つの仮定を置く．

1. 各要素に関し，限界生産物が正：

2. 各要素に関し，限界生産物が逓減：

3. 生産関数 F は K, L に関して一次同次 (homogenous of degree one)：

生産関数 F の形状



一次同次を満たす生産関数の例

- コブ・ダグラス型関数：

$$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- CES 型関数：

$$F(K_t, L_t) = \left[B_K K_t^{\phi} + B_L L_t^{\phi} \right]^{1/\phi}, \ -\infty < \phi \leq 1.$$

資本蓄積式

- 資本蓄積式は,「企業の生産・投資行動」や「長期のマクロ経済分析」と同じ.
- t 期の資本ストックを所与として，資本蓄積は以下の式に従う：

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{2}$$

ここで，$\delta \in [0, 1]$ は資本減耗率.

(設定) これまで同様，初期の資本 K_1 の値は既に決定済み ($\Leftrightarrow$ 歴史的与件).

家計の行動

- 異時点間の消費・貯蓄行動に関するソロー・モデルの仮定：
  1. 家計は現在の可処分所得の一定割合を貯蓄
  2. 租税はなし

$\Rightarrow$ 従って，経済全体の貯蓄 S_t は，GDP の一定割合となる．

$$S_t = sY_t, \quad 0 < s < 1, \tag{3}$$

ここで，$s \in (0, 1)$ は貯蓄率を表すパラメーター．

- 労働力人口は一定の n の率で成長すると仮定する．

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t. \tag{4}$$

(設定) 初期の人口 L_1 の値は既に決定済み ($\Leftrightarrow$ 歴史的与件)．

資金市場の均衡

- これまで同様，閉鎖経済を考える．

$\rightarrow$ 資金市場の均衡条件は,「長期のマクロ経済分析」と同様に，

$$\boxed{} \tag{5}$$

- ただし，
  - 第 6 章での分析の主眼：(5) 式を満たす利子率の存在を示すこと
  - ここでの主眼：(5) 式，及びその他の式を使って，主要なマクロ経済変数の時間的変化を導くこと

という点に第 6 章とは違いが存在する．

資本ストックの動学

- ある変数の「時間的変化」のことを，その変数の動学 (dynamics) という．

これから行う分析

これまで登場した方程式を満たしつつ，資本ストックの動学はどのように決定されるのか？

$(\because)$ K_t の動学がわかれば，GDP の動学も把握できる

- K_t の動学を知るために，資本蓄積式を次のように書き直す：

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ &= \boxed{} \quad (\because \text{資金市場均衡}) \\ &= \boxed{} \quad (\because \text{貯蓄率一定の仮定}) \end{aligned}$$

この経済の動学

- 従って，K_1, L_1 を所与として，この経済の動学は

$$\text{資本ストックの動学：}\boxed{} \tag{6}$$

$$\text{労働力の動学：}\boxed{} \tag{7}$$

という 2 本の方程式によって構成される．

$(*)$ このような方程式を，数学的には差分方程式という．

- しかし，生産関数 F の性質を利用すれば，もっと簡単にこの経済の動学を記述できる．

一人当たり資本 k_t の動学

- 一人当たりの GDP を y_t，同資本ストックを k_t とする：

$$y_t \equiv Y_t/L_t, \quad k_t \equiv K_t/L_t.$$

- $Y_t = F(K_t, L_t)$ の両辺を L_t で割ることにより，以下を得る．

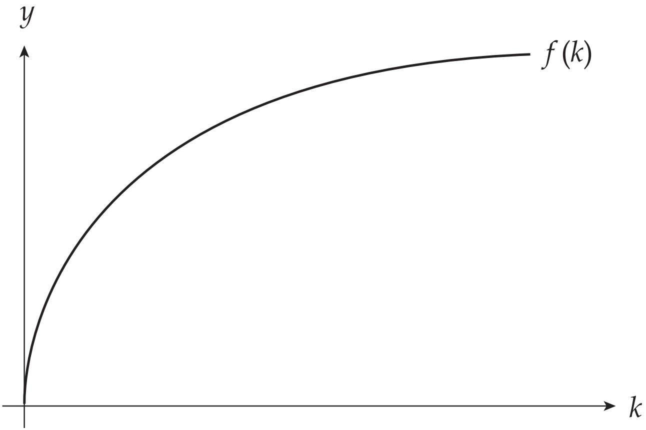
$$Y_t = F(K_t, L_t) \Leftrightarrow y_t = \boxed{}$$

$$\Leftrightarrow y_t = \boxed{}$$

以降，右辺の関数を新たに $f(k_t)$ と表記．

($*$) このスライドの pp. 9 の仮定より，$f'(k) > 0$，かつ $f''(k) < 0$ が成立する．

f の形状



一人当たり資本 k_t の動学

- 従って，(6) を (7) で辺々割ることで，

$$k_{t+1} = \boxed{} \tag{8}$$

を得る．(8) 式には，一人当たり資本に関する

1. 今期の変数 k_t
2. 来期の変数 k_{t+1}

だけが変数として含まれている．

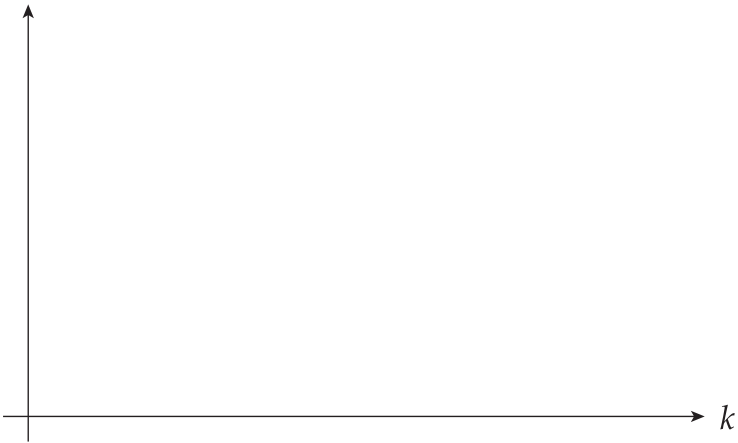
一人当たり資本 k_t の動学

- $k_1 \equiv K_1/L_1$ より，初期時点の一人あたり資本 k_1 は歴史的に決定済みである．

  $\Downarrow$

- k_1 を所与として，(8) から任意の期の k_t の値を得ることができる．
- k_t の動きを把握する方法：
  1. 関数を特定化 & 仮定をおいて，$\{k_t\}$ を具体的に求める．
     $\Rightarrow$ 復習問題で考えてもらう．
  2. 図解

図解



定常状態

- 経済変数が一定の値を維持する状態を定常状態 (steady state) という．
- 定常状態においては，以下の式が成立する．

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

以降，この式を満たす k を k^* と表記する．

- 一人当たり生産関数 f を特定化すれば，k^* を具体的に求めることができる．
$f(k) = k^\alpha$ のとき，定常状態 k^* は

$$k^* = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{9}$$

定常状態

- また，定常状態における一人当たり GDPy^* と 一人当たり消費 c^* の値はそれぞれ

$$y^* = \boxed{} \tag{10}$$

$$c^* \equiv \boxed{} = \boxed{} \tag{11}$$

次回

- モデルから得られた諸変数の動きは，現実に観察される動きと整合的だろうか？
  $\Rightarrow$ ソロー・モデルから得る理論予測と現実のデータを比較

- 技術進歩を導入したソロー・モデル