2019年度
オペレーションズ・リサーチ基礎

最小費用マッチング問題
と輸送問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最小費用マッチング問題

最小費用マッチング問題

- マッチング：「ひと」や「もの」の間の最適なペアの集合
  - 例：労働者の仕事への割り当て
- ある労働者 i をある仕事 j に割り当て ➔ 費用 c(i,j) が発生
- すべての仕事にいずれかの労働者を割り当て，
  その総費用を最小化したい ➔ 最小費用マッチング問題

- 具体例：4人の労働者 a, b, d, e　3つの仕事 x, y, z

費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4

割当 x-a, y-d, z-b ➔ 費用 12
割当 x-b, y-e, z-a ➔ 費用 10（最適）

最小費用マッチング問題の定式化：例

- 具体例：5人の労働者 a, b, d, e　4つの仕事 x, y, z

費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4

変数 $x_{ax} \in \{0,1\}$：
仕事 x に労働者 a を割り当てたら 1，
割り当てなければ 0

他の変数も同様.

条件1：各仕事に割り当てる労働者はちょうど1人

$$x_{ax} + x_{bx} + x_{dx} + x_{ex} = 1, x_{ay} + x_{by} + x_{dy} + x_{ey} = 1,$$
$$x_{az} + x_{bz} + x_{dz} + x_{ez} = 1$$

条件2：各労働者に割り当てる仕事は高々1つ

$$x_{ax} + x_{ay} + x_{az} \leq 1, x_{bx} + x_{by} + x_{bz} \leq 1,$$
$$x_{dx} + x_{dy} + x_{dz} \leq 1, x_{ex} + x_{ey} + x_{ez} \leq 1$$

目的関数：総費用 $\sum_{i \in \{a,b,d,e\}} \sum_{j \in \{x,y,z\}} c_{ij} x_{ij}$ → 最小化

最小費用マッチング問題の定式化

一般の場合の定式化

- T={1,2,...,m}: 仕事の集合
- N={1,2,...,n}: 労働者の集合, n≧m

条件1: 各仕事に割り当てる労働者はちょうど1人

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \ \ (\forall i \in T)$$

条件2: 各労働者に割り当てる仕事は高々1つ

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1 \ \ (\forall j \in N)$$

目的関数: 総費用 $\sum_{i \in T} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$ → 最小化

※ m = n の場合，条件2の不等号を等号にしてよい

アルゴリズムのアイディア

- 単純に費用の小さいペアを順に選ぶのでは×

費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4

最初に x-a
次に y-e
最後に z-b ➔ 総費用 1+4+7=12

- うまくペアを入れ替える必要あり ← どうやって見つける？

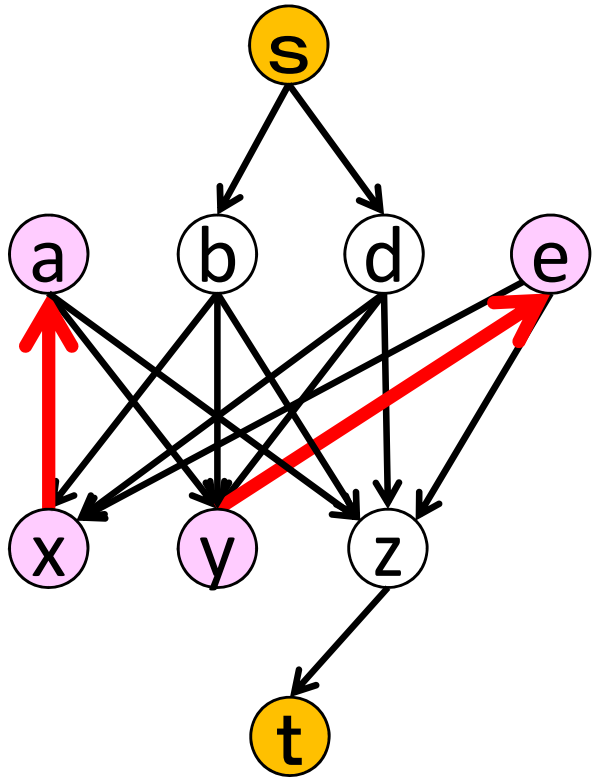
費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4

最初に x-a
次に y-e
最後に x-b, z-a を追加，x-a を削除

マッチングに対応するグラフ

マッチング x-a, y-e

費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4



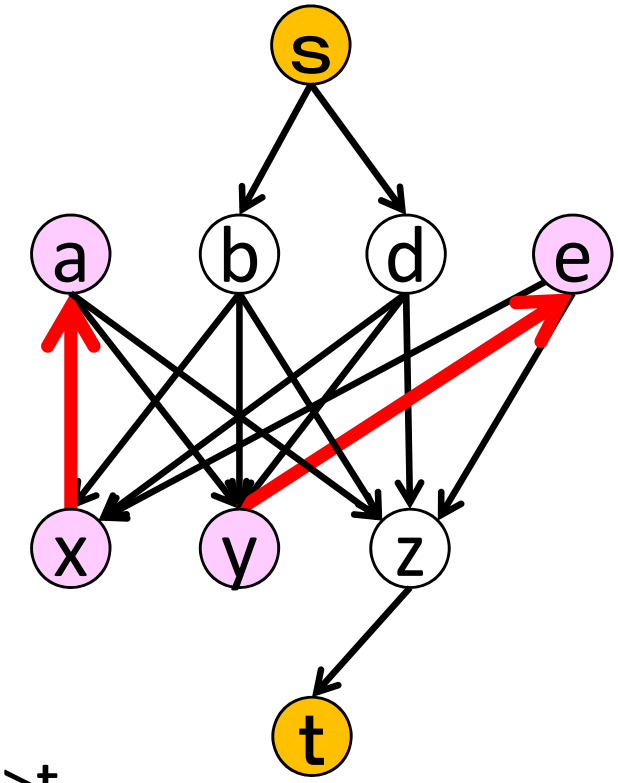
頂点集合: 労働者に対応する頂点
仕事に対応する頂点
s, t

枝集合と長さ: 各労働者から仕事に向かう枝，長さ＝費用
マッチングの各ペアに対し，仕事から労働者に向かう枝，長さ＝－費用
s から各労働者に向かう枝（マッチング内の労働者は除く），長さ＝0
t に各仕事から向かう枝（マッチング内の仕事は除く），長さ＝0

マッチングに対応するグラフの意味

マッチング x-a, y-e

費用	a	b	d	e
x	1	3	4	3
y	7	6	7	4
z	3	7	8	4



マッチングの入れ替え方法 ←→ s から t への路

例: b-z を追加 ←→ 路 s->b->z->t

x-b, z-a を追加，x-a を削除 ←→ 路 s->b->x->a->z->t

y-d, z-e を追加，y-e を削除 ←→ 路 s->d->y->e->z->t

さらに，　路の長さ ＝ 更新後と更新前のマッチングの費用の差

→ 最短路を選んでマッチングの入れ替えをすると良さそう？

アルゴリズム（逐次最短路法）

ステップ0：マッチングの枝集合 M := ∅ とおく.
ステップ1：マッチング M に対応するグラフを作成.
ステップ2：グラフにおける s から t への最短路 P を計算.
ステップ3：最短路 P を使ってマッチング M を更新.
　　M の枝数 = m ならば終了.
　　M の枝数 < m ならばステップ1へ.

定理：
アルゴリズムの k 回目の反復終了後の M は,
　枝数 = k の条件下での最小費用マッチング.
とくに，アルゴリズム終了後の M は最小費用マッチング.

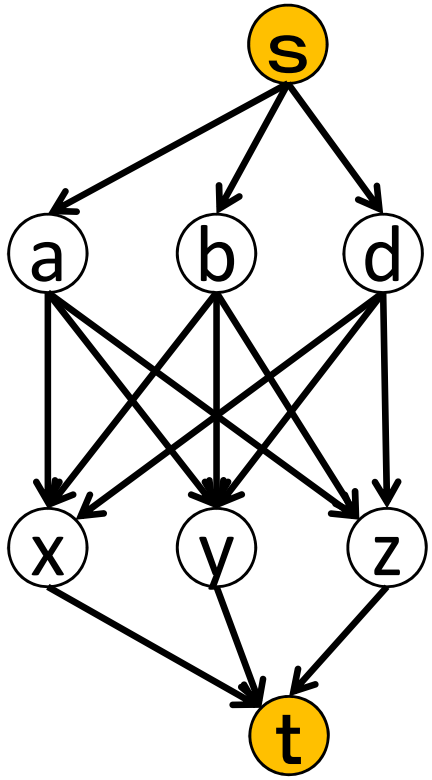
アルゴリズムの実行例

費用	a	b	d
x	1	3	4
y	7	6	7
z	3	7	8

最短路は

s->a->x->t

長さ=1

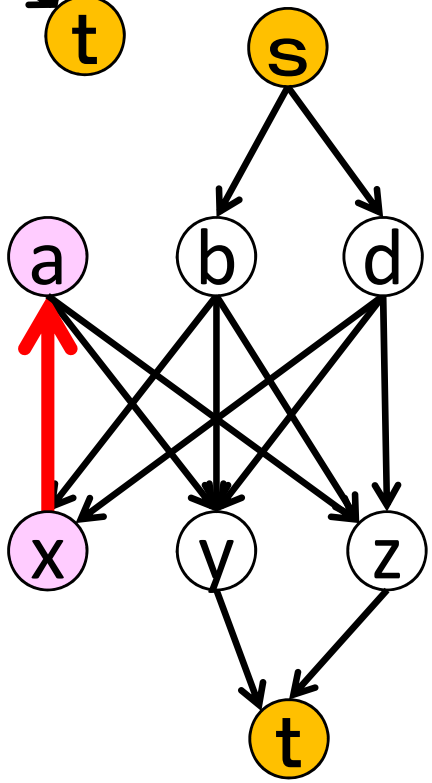


費用	a	b	d
x	-1	3	4
y	7	6	7
z	3	7	8

最短路は

s->b->x->a->z->t

長さ=3-1+3=5



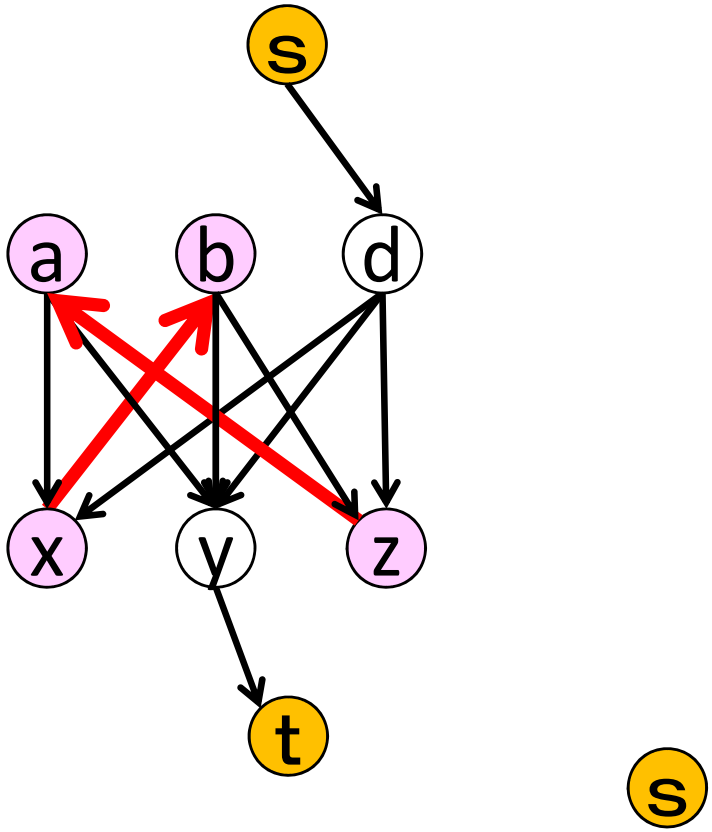
アルゴリズムの実行例

費用	a	b	d
x	1	-3	4
y	7	6	7
z	-3	7	8

最短路は

s->d->x->b->y->t

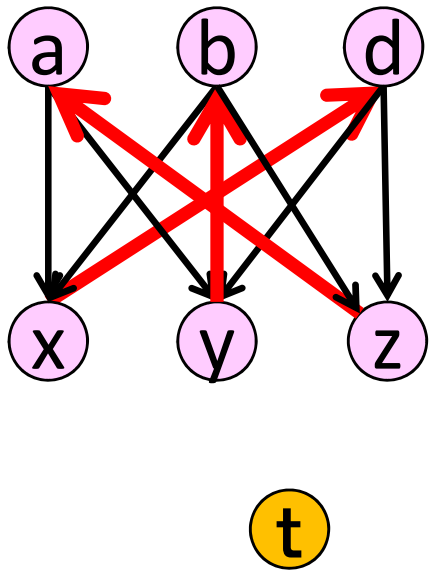
長さ=4-3+6=7



費用	a	b	d
x	1	3	-4
y	7	-6	7
z	-3	7	8

最小費用マッチング

a-z, b-y, d-x が得られた



最短路の計算

- アルゴリズムの各反復で扱うグラフでは，負の枝長を含む

➔ ダイクストラ法が使えない

解決策1：枝長が負の場合でも適用可能なアルゴリズムを使う

（例：ベルマン・フォードのアルゴリズム）

解決策2：最短路を変更することなく，

枝長をうまく修正して非負にする

（冨澤(1971), Edmonds-Karp (1970) のテクニック）

枝長の修正方法：

各頂点 v に数値 p(v) を割り当てる

→ 各枝 (a,b) の長さ $\ell(a,b)$ を $\ell(a,b)+p(a)-p(b)$ に置き換える

→ s から t への路 P の長さは +p(s)-p(t) だけ変化 ← P に依存せず

つまり，s から t への最短路は，枝長を修正しても不変

枝長の修正：例

- s から t への路の長さ：枝長の修正前後での比較
  - P: s->a->b->d->e->t

修正前：$\ell(s,a)+\ell(a,b)+\ell(b,d)+\ell(d,e)+\ell(e,t)$

修正後：$\{\ell(s,a)+p(s)-p(a)\}+\{\ell(a,b)+p(a)-p(b)\}$
$+\{\ell(b,d)+p(b)-p(d)\}+\{\ell(d,e)+p(d)-p(e)\}$
$+\{\ell(e,t)+p(e)-p(t)\}$

$=\ell(s,a)+\ell(a,b)+\ell(b,d)+\ell(d,e)+\ell(e,t)+p(s)-p(t)$

枝長の修正方法

s から t への最短路を求めるとき,
同時に各頂点 v への最短路長 p(v) を計算する
→各枝 (a,b) の長さ $\ell(a,b)$ を $\ell(a,b)+p(a)-p(b)$ に置き換える

なぜか？

→ 枝長が非負になる！

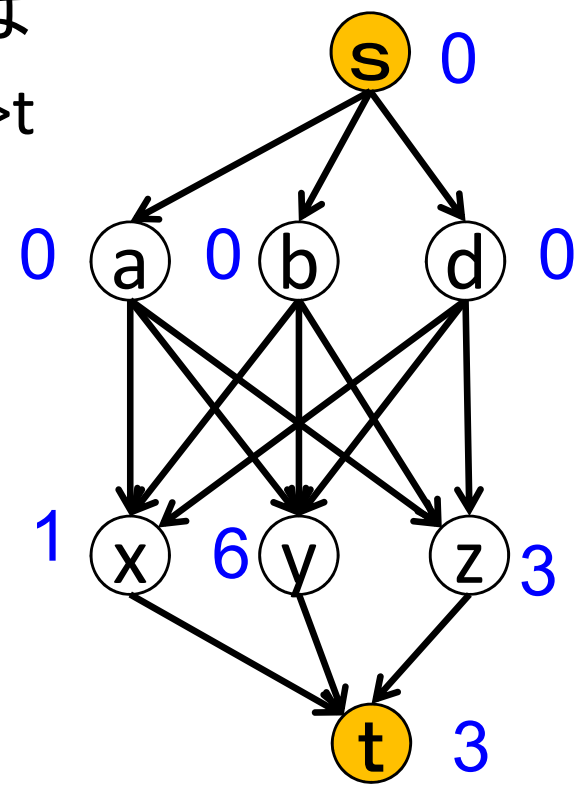
	費用	a (0)	b (0)	d (0)
1	x	1	3	4
6	y	7	6	7
3	z	3	7	8

費用	a	b	d
x	0	2	3
y	1	0	1
z	0	4	5

最短路は

s->a->x->t

長さ=1



枝長の修正方法(つづき)

s から t への最短路を求めるとき,

同時に各頂点 v への最短路長 p(v) を計算する

→各枝 (a,b) の長さ $\ell(a,b)$ を $\ell(a,b)+p(a)-p(b)$ に置き換える

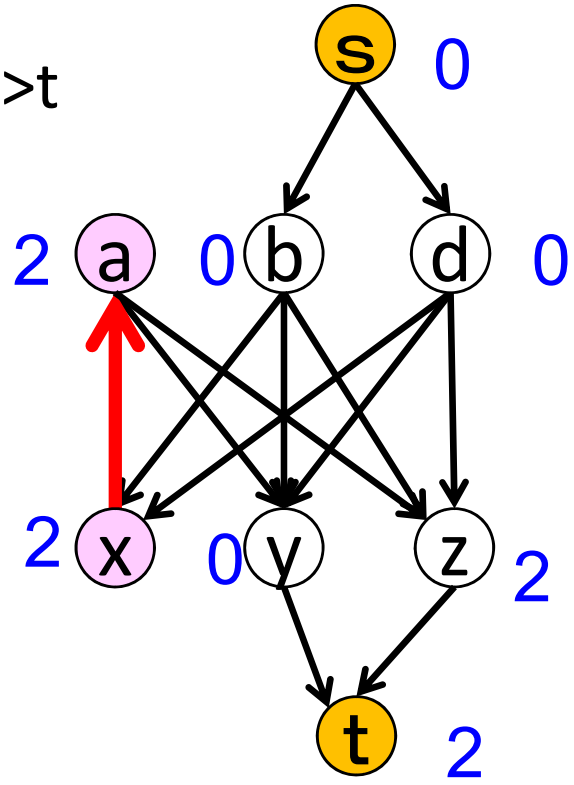
	費用	a (2)	b (0)	d (0)
2	x	-0	2	3
0	y	1	0	1
2	z	0	4	5

費用	a	b	d
x	-0	0	1
y	3	0	1
z	0	2	3

最短路は

s->b->x->a->z->t

長さ=2-0+0=2



枝長の修正方法(つづき)

s から t への最短路を求めるとき,

同時に各頂点 v への最短路長 p(v) を計算する

→各枝 (a,b) の長さ $\ell(a,b)$ を $\ell(a,b)+p(a)-p(b)$ に置き換える

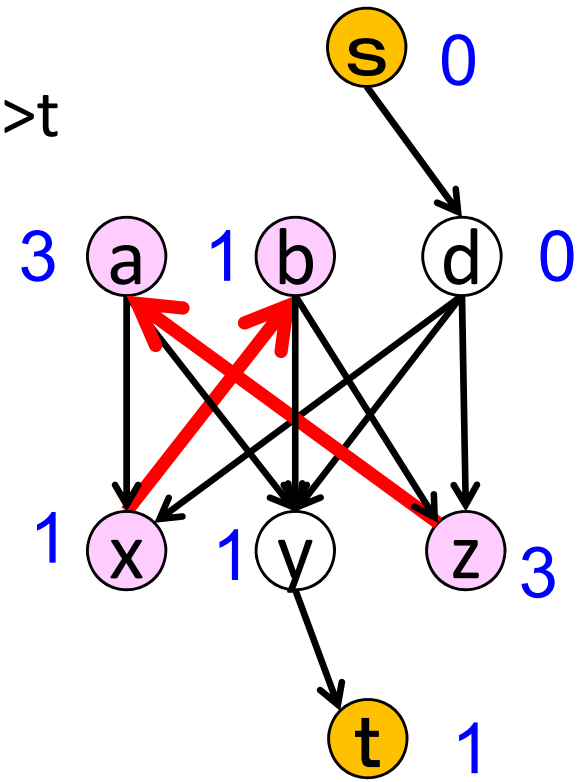
	費用	a (3)	b (1)	d (0)
1	x	0	-0	1
1	y	3	0	1
3	z	-0	2	3

費用	a	b	d
x	2	-0	0
y	5	0	0
z	-0	0	0

最短路は

s->d->x->b->y->t

長さ=1-0+0=1



輸送問題

輸送問題

- 倉庫にある部品を工場に運びたい
- 各工場 i = 1, 2, ..., m では，部品の需要数 a_i が決められている
- 各倉庫 j = 1, 2, ..., n から供給できる部品の数は上限 b_j がある
  - $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$ を仮定
- 倉庫 j から工場 i へ部品を輸送するとき，費用 c_{ij} が生じる
- 工場の需要を満たすような輸送方法の中で，

  費用最小のものを見いだす➔ 輸送問題

※ $a_i = 1$, $b_j = 1$ のときは最小費用マッチング問題に一致

輸送問題:具体例

- 具体例:3つの倉庫 a, b, d　3つの工場 x, y, z

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	5	3	7

需要量	
x	6
y	4
z	3

輸送量	a	b	d
x	0	0	6
y	0	3	1
z	3	0	0

➔ 費用24+18+7+9
=58

輸送量	a	b	d
x	2	0	4
y	0	3	1
z	3	0	0

➔ 費用 2+16+18+7+9
=52

輸送問題の定式化

F={1,2,...,m}: 工場(factory)の集合

W={1,2,...,n}: 倉庫(warehouse)の集合

変数: 倉庫 j から工場 i におくる部品数 $x_{ij} \geq 0$

条件1: 各工場 i に送る部品数はちょうど a_i

$$\sum_{j \in W} x_{ij} = a_i \ \ (\forall i \in F)$$

条件2: 各倉庫から送り出せる部品数は高々 b_j

$$\sum_{i \in F} x_{ij} \leq b_j \ \ (\forall j \in W)$$

目的関数: 総費用 $\sum_{i \in F} \sum_{j \in W} c_{ij} x_{ij}$ → 最小化

※ $\sum_{i \in F} a_i = \sum_{j \in W} b_j$ の場合，条件2の不等号を等号にしてよい

条件2および$\sum_{j \in W} x_{ij} \leq a_i \ \ (\forall i \in F)$ を満たす x_{ij} をフローとよぶ

アルゴリズム（逐次最短路法）

最小費用マッチングのアルゴリズムを一般化することで解くことが可能

ステップ0：フロー x_{ij} をすべて0とおく.

ステップ1：フロー x_{ij} に対応するグラフを作成.

ステップ2：グラフにおける s から t への最短路 P を計算.

ステップ3：最短路 P を使ってフロー x_{ij} を更新.

全ての工場の需要が満たされたら終了.

満たされないならばステップ1へ.

定理：

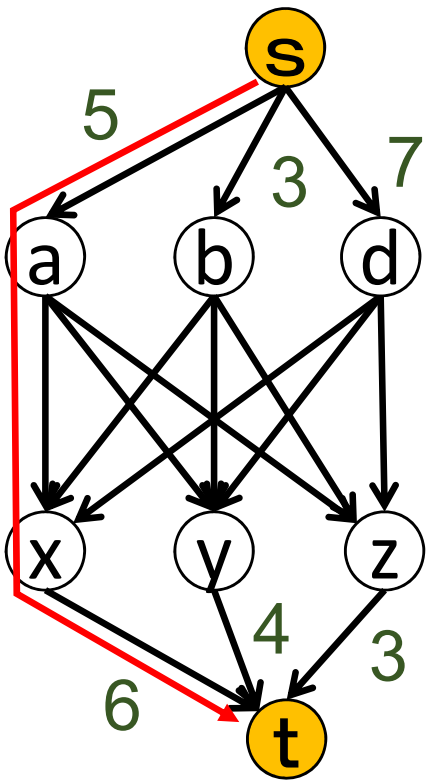
アルゴリズム終了後のフローは輸送問題の最適解.

フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(1)

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	5	3	7

需要量	
x	6
y	4
z	3



頂点集合: 倉庫および工場に対応する頂点, s, t

フローが0のときの枝集合と長さ, 容量:

各倉庫 j から各工場 i に向かう枝, 長さ＝費用, 容量＝∞

s から各倉庫 j に向かう枝, 長さ＝0, 容量＝b_j

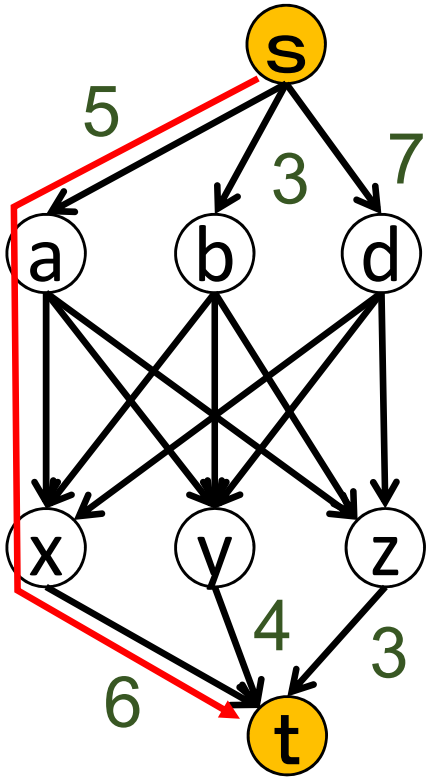
t に各工場 i から向かう枝, 長さ＝0 , 容量＝a_i

フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(2)

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	5 0	3	7

需要量	
x	6 1
y	4
z	3



最短路 P を見つける

長さ＝0+1+1=0

➔ 最短路に沿ってフローを変更

変更量α＝Pに含まれる枝容量の最大値

＝max{5,∞,6}=5

フロー x_{ax} の値をαだけ増やす

供給量 a_a, 需要量 b_x をαだけ減らす

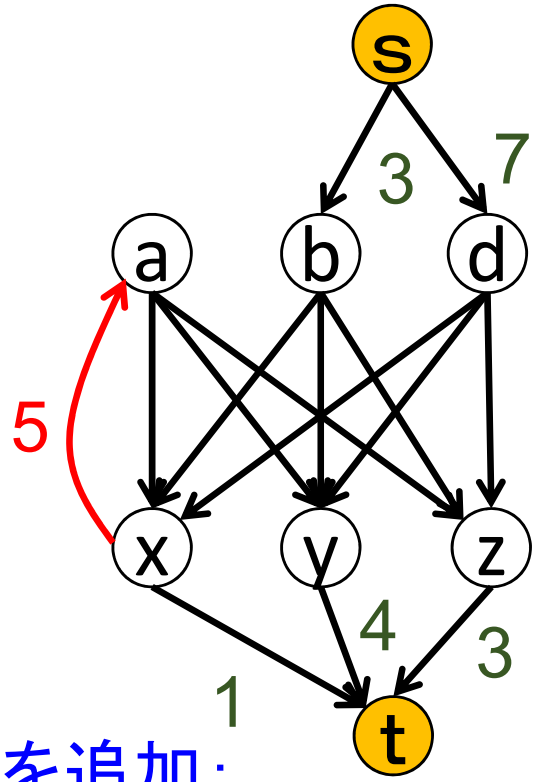
フロー	a	b	d
x	5		
y			
z			

フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(3)

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	3	7

需要量	
x	1
y	4
z	3



フローが0でないとき，工場から倉庫に向かう枝を追加：

各工場 i から各倉庫 j に向かう枝，

長さ＝－費用，容量＝フロー量

s から倉庫に向かう枝，

t に工場 から向かう枝は，

容量＝0のときは削除

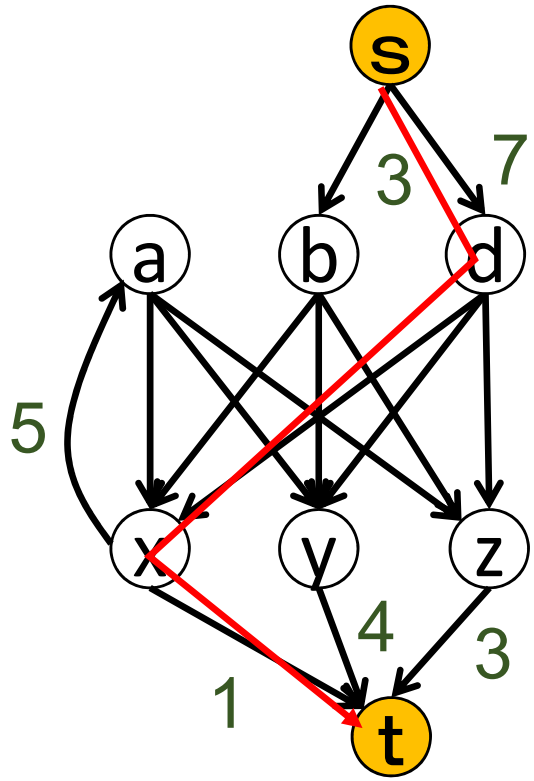
フロー	a	b	d
x	5		
y			
z			

フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(4)

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	3	7 6

需要量	
x	1 0
y	4
z	3



最短路 P を見つける

長さ=0+4+0=4

➔ 最短路に沿ってフローを変更

変更量α＝Pに含まれる枝容量の最大値

＝max{7,∞,1}=1

フロー x_{dx} の値をαだけ増やす

供給量 a_d, 需要量 b_x をαだけ減らす

フロー	a	b	d
x	5		1
y			
z			

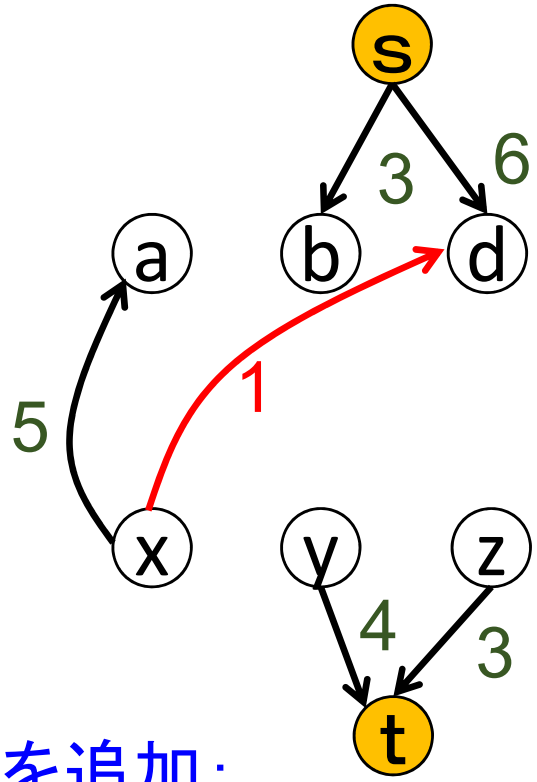
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(5)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	3	6

需要量	
x	0
y	4
z	3



フローが0でないとき，工場から倉庫に向かう枝を追加：

各工場 i から各倉庫 j に向かう枝，

長さ＝－費用，容量＝フロー量

s から倉庫に向かう枝，

t に工場 から向かう枝は，

容量＝0のときは削除

フロー	a	b	d
x	5		1
y			
z			

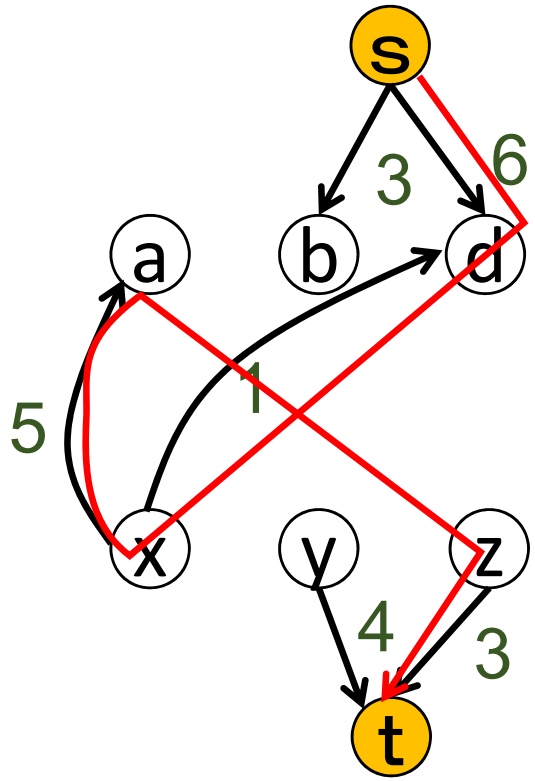
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(6)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	3	6 3

需要量	
x	0
y	4
z	3 0



最短路 P を見つける

長さ=0+4+(-1)+3+0=6

➔ 最短路に沿ってフローを変更

変更量α＝Pに含まれる枝容量の最大値

＝max{6,∞,5,∞,3}=3

フロー x_{dx}, x_{az} の値をαだけ増やす

逆向き枝 (x,a)∈P → x_{ax}の値をαだけ減らす

供給量 a_d, 需要量 b_z をαだけ減らす

フロー	a	b	d
x	2		4
y			
z	3		

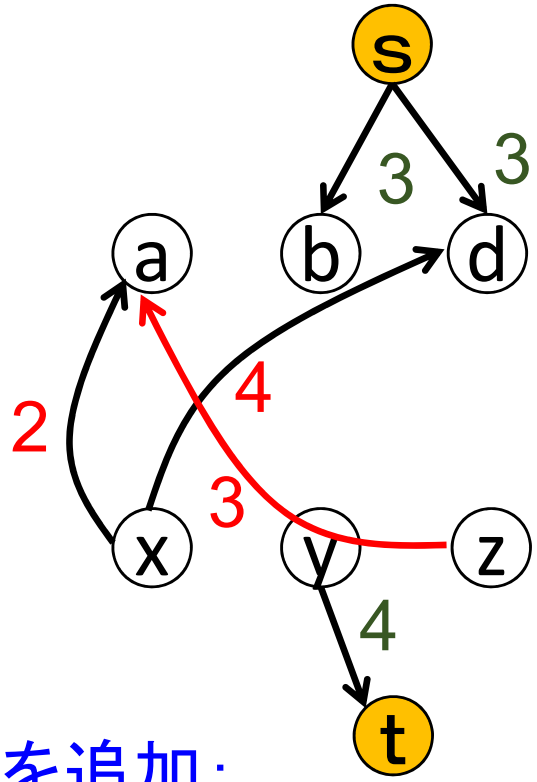
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(7)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	3	3

需要量	
x	0
y	4
z	0



フローが0でないとき，工場から倉庫に向かう枝を追加：

各工場 i から各倉庫 j に向かう枝，

長さ＝－費用，容量＝フロー量

s から倉庫に向かう枝，

t に工場 から向かう枝は，

容量＝0のときは削除

フロー	a	b	d
x	2		4
y			
z	3		

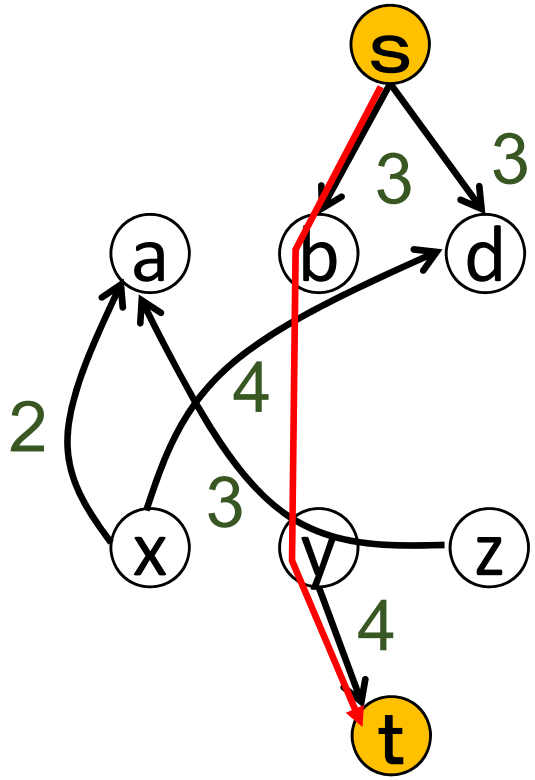
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(8)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	0 3	3

需要量	
x	0
y	4 1
z	0



最短路 P を見つける

長さ=0+6+0=6

➔ 最短路に沿ってフローを変更

変更量α＝Pに含まれる枝容量の最大値

＝max{3,∞,4}=3

フロー x_{by} の値をαだけ増やす

供給量 a_b, 需要量 b_y をαだけ減らす

フロー	a	b	d
x	2		4
y		3	
z	3		

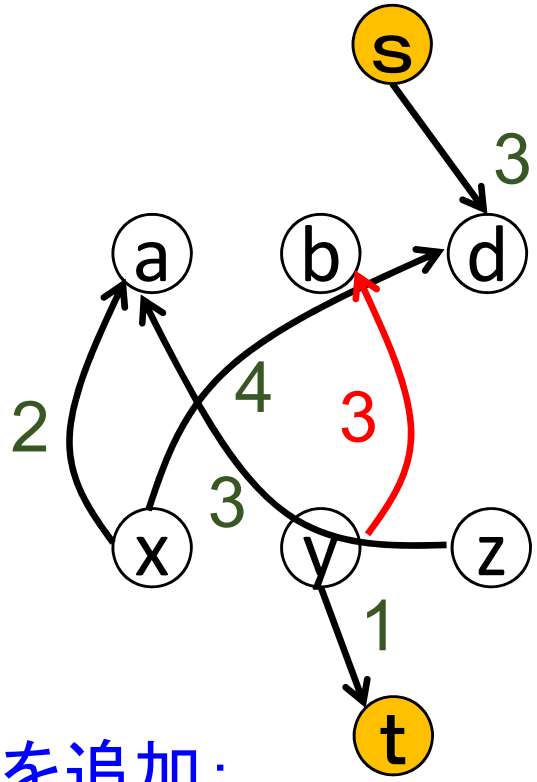
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(9)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	0	3

需要量	
x	0
y	1
z	0



フローが0でないとき，工場から倉庫に向かう枝を追加：

各工場 i から各倉庫 j に向かう枝，

長さ＝－費用，容量＝フロー量

s から倉庫に向かう枝，

t に工場 から向かう枝は，

容量＝0のときは削除

フロー	a	b	d
x	2		4
y		3	
z	3		

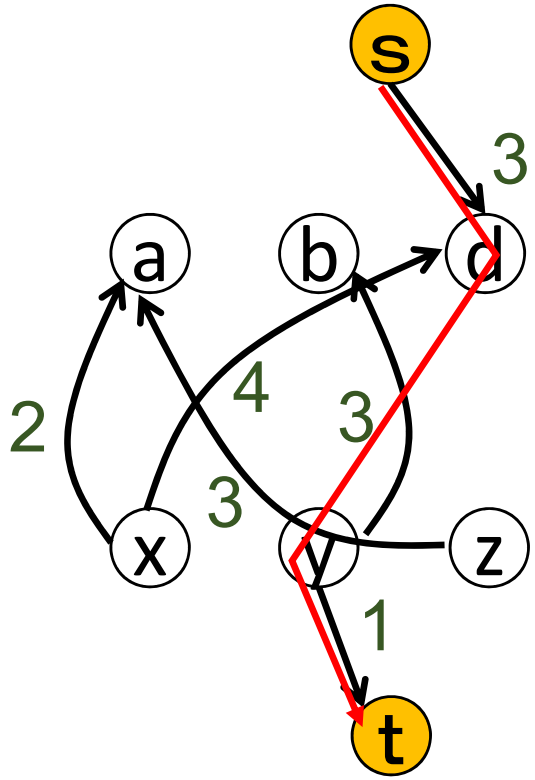
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(10)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	0	3 2

需要量	
x	0
y	1 0
z	0



最短路 P を見つける

長さ=0+7+0=7

➔ 最短路に沿ってフローを変更

変更量α＝Pに含まれる枝容量の最大値

＝max{3,∞,1}=1

フロー x_{dy} の値をαだけ増やす

供給量 a_d, 需要量 b_y をαだけ減らす

フロー	a	b	d
x	2		4
y		3	1
z	3		

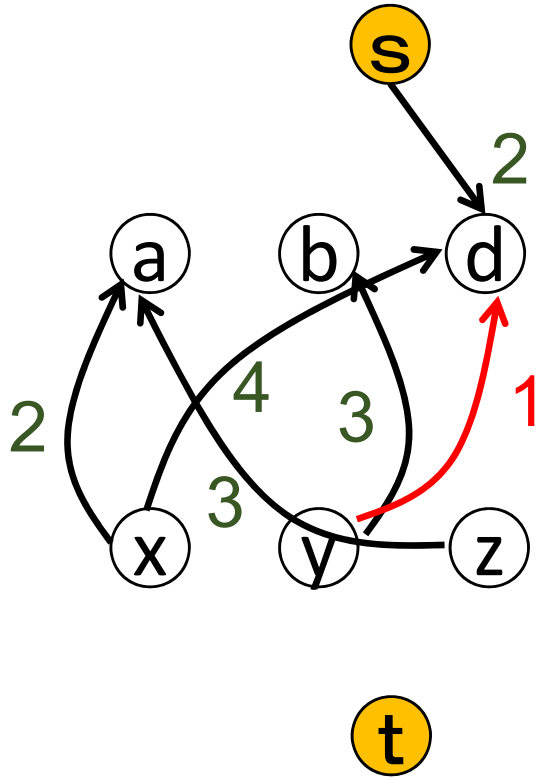
フローに対応するグラフとアルゴリズムの挙動(11)

倉庫から工場に向かう枝を省略した

輸送費用	a	b	d
x	1	9	4
y	7	6	7
z	3	7	8

供給量	a	b	d
	0	0	2

需要量	
x	0
y	0
z	0



工場の需要が全て満たされた

→ 現在のフローは最適解

フロー	a	b	d
x	2		4
y		3	1
z	3		

演習問題

問1: 労働者 a,b,d, 仕事 x,y に対する最小費用マッチングを求めよ.
費用は右の表の通り.
各反復では枝長を修正して
ダイクストラ法を使って
最短路を計算すること.

費用	a	b	d
x	5	3	4
y	9	6	7

問2: 倉庫 a,b, 工場 x,y に対する輸送問題を解け.
費用, 供給量, 需要量は下の通り. (3回の反復で終了する)

輸送費用	a	b
x	6	4
y	4	3

供給量	a	b
	1	4

需要量	
x	3
y	2