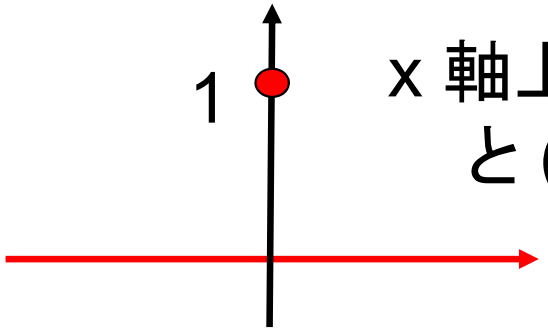
経営経済数学

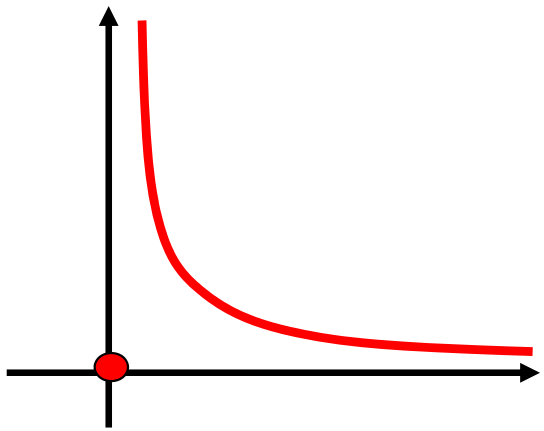
凸集合，凸関数

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

凸包に関する演習問題



x 軸上の全ての点集合
と (0,1) の凸包は？



点集合 {(x, 1/x)| x >0}と
(0,0) の凸包は？

解答の手順:

(1) 集合 S の凸包と思われる集合 S* を推測

(2)「S⊆S* および S* が凸集合」を示す

「S* が凸集合」←「S* の任意の2点の凸結合∈ S*」を示せばよい

(3)「S を含む任意の凸集合⊇ S*」を示す

←「S* の任意の点が, S の点の凸結合として表現できる」
を示せばよい

点集合 $\{(x, 1/x) \mid x > 0\}$と $(0,0)$ の凸包

(1) $S^*=\{(x,y) \mid x,y>0\} \cup \{(0,0)\}$

(2)「$S \subseteq S^*$」は自明.

「S^* が凸集合」

$(x,y), (x',y') \in S^*, \alpha \in [0,1], \quad (x'',y'') \equiv (1-\alpha)(x,y)+\alpha(x',y') \in S^*$ を示す

$0<\alpha<1$の場合のみ考えればよい.

$(x,y)=(x',y')=(0,0)$ のときは$(x'',y'')=(0,0)$なので自明.

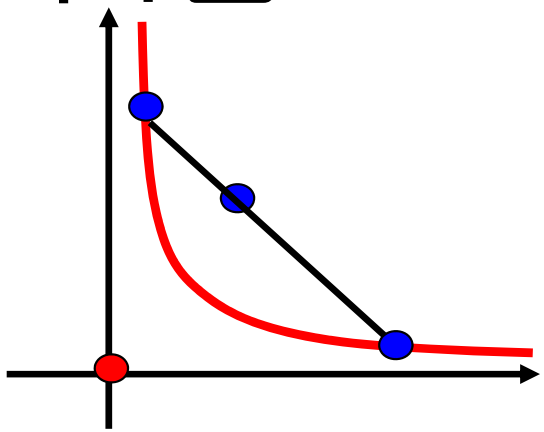
以下では$(x,y)\neq(0,0)$と仮定 ➔ $x,y>0$ ➔ $x'',y''>0$ ∴ $(x'',y'') \in S^*$

(3)「S を含む任意の凸集合 $\supseteq S^*$」

$\forall (x'',y'') \in S^*, \exists (x,y),(x',y') \in S, \exists \alpha \in [0,1],$

$(x'',y'') = (1-\alpha)(x,y)+\alpha(x',y')$ を示す.

点集合 $\{(x, 1/x) \mid x > 0\}$と $(0,0)$ の凸包



$\forall (x'',y'') \in S^*$, $\exists (x,y),(x',y') \in S$, $\exists\ \alpha \in [0,1]$,

$(x'',y'') = (1-\alpha)(x,y)+\alpha(x',y')$ を示す.

$(x'',y'') \neq (0,0)$の場合を考えれば十分 ➔ $x'',y''>0$

① $y'' \geqq 1/x''$ のとき: $x''+y'' \geqq 2$

$x^2-(x''+y'')x + 1 = 0$ は異なる解をもつ ⬅ a, a' $(0<a<a')$とおく

すると $a+1/a=a'+1/a'=x''+y''$, $0 < a < x'' < a'$ が成立

$\therefore$ $(a,1/a), (a',1/a') \in S$, $\exists \alpha \in [0,1]$, $(x'',y'') = (1-\alpha)(a,1/a)+\alpha(a',1/a')$

② $y''<1/x''$ のとき:

$\exists \alpha \in (0,1)$, $\exists x'>0$: $\alpha(x',1/x')=(x'',y'')$ （$x'=\sqrt{x''/y''}$）

$\therefore$ $(x'',y'') = (1-\alpha)(0,0)+\alpha(x',1/x')$

点集合の凸包と凸多面体

凸多面体とよぶ

命題: S = 実ベクトル $\boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2,\ \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の集合

このとき, Sの凸包 $= \boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2,\ \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合全体 S*

（証明の概略）前ページスライドの方針通りに証明すればよい.

- S* の定義より, S⊆S* は自明
- S* が凸集合であることを示す

  ← 凸結合$\sum_i \beta_i\, \boldsymbol{a}^i$と凸結合$\sum_i \gamma_i\, \boldsymbol{a}^i$の凸結合が

  $\boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2,\ \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合で表現できることを示せばよい
- S* の任意の点が, S の点の凸結合として表現できることは自明

  （∵ S*の定義より）

凸関数，凹関数

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ とする

定義：関数 $f: S \to \mathbb{R}$ は凸関数 ⟺ S は凸集合，かつ以下の条件：

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1,$

$$f\big((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}\big) \leq (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{y})$$

定義：関数 $f: S \to \mathbb{R}$ は凹関数 ⟺ $-f$ は凸関数

⟺ S は凸集合，かつ以下の条件：

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1,$

$$f\big((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}\big) \geq (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{y})$$

凸関数の演算

命題: 凸関数 $f, g: S \to \mathbb{R}$, 実数 $\alpha, \beta > 0$ に対し,

(i) 関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は凸関数

(ii) 関数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$は凸関数

（証明）(i) は定義より簡単に示せる.

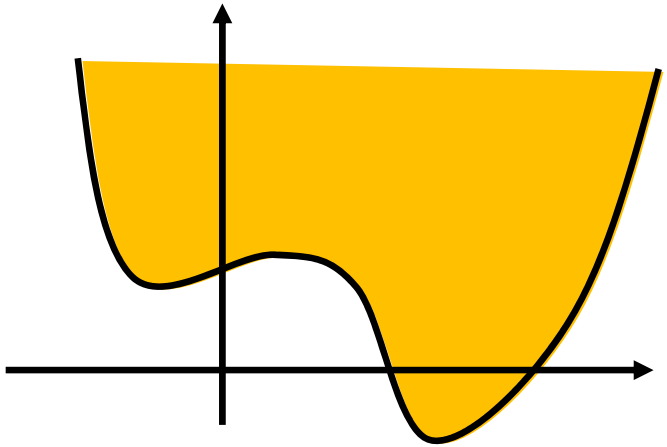
(ii): $x, y \in S, \alpha \in [0,1]$ とする.

一般性を失うことなく $h\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) = f((1-\alpha)x + \alpha y)$ と仮定.

$$
\begin{aligned}
h\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) &= f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \\
&\leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad \text{（f の凸性）} \\
&\leq (1-\alpha)h(x) + \alpha h(y) \quad \text{（h の定義）}
\end{aligned}
$$

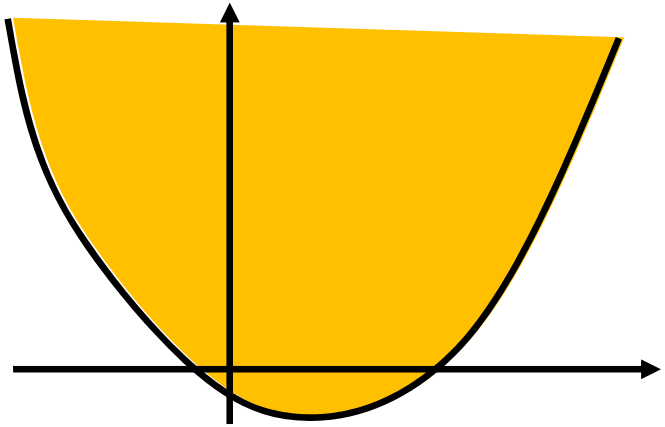
※ (i) より，有限個の凸関数の和は凸関数

関数のエピグラフ



定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された
関数 $f: S \to \mathbb{R}$ の**エピグラフ**
＝集合$\{(x, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \beta \geq f(x)\}$

定理：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f: S \to \mathbb{R}$ の
エピグラフは凸集合 ⇔ S は凸集合，f は凸関数



「→」は定理11.3,「←」は定理11.2
どちらも証明は比較的かんたん

関数の最小化

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f: S \to \mathbb{R}$ の最小化問題

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の大域的最適解

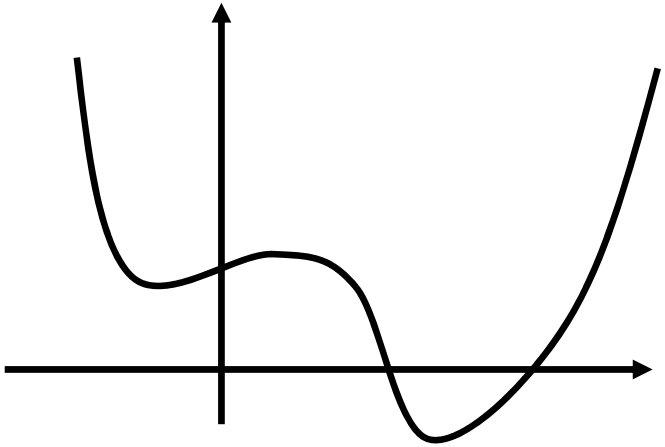
⟺ x^* は関数 f の S における最小解

⟺ $\forall x \in S, \quad f(x) \geq f(x^*)$

S 全体の中で最適

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の局所的最適解（極小解）

⟺ $\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \quad f(x) \geq f(x^*)$



x^* の近傍の中で最適

凸関数の最小化

定理11.5: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸集合，$f: S \to \mathbb{R}$ が凸関数の場合，

局所的最適解➔大域的最適解

（証明）背理法を使わない証明

$x^* \in S$ は局所的最適解と仮定

➔定義より，$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \quad f(x) \geq f(x^*)$

f は凸関数➔ $\forall x \in S, \forall \alpha \in (0,1)$,

$$f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) \leq (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x)$$

$\therefore \alpha\{f(x) - f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big)\} \geq (1-\alpha)\{f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) - f(x^*)\}$

α が十分0に近いとき，$(1-\alpha)x^* + \alpha x \in B(x^*, \varepsilon)$

$\therefore f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) - f(x^*) \geq 0$

$\therefore f(x) \geq f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) \geq f(x^*)$ ■