経営経済数学

部分列
連続関数の最小値

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

実数点列･集合の有界性

- 定義: 実数の集合（数列）は有界
  ←→ ある実数 q≧0 が存在して，その集合（数列）に含まれる
  任意の実数 x に対し，|x| ≦q
- 定義: 実数の集合（数列）は非有界 ←→ 有界ではない
  ←→任意の実数 q に対し，その集合（数列）に含まれる
  ある実数 x が存在して，|x| > q

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は，収束するならば有界

※ 有界でも収束しない例が存在： $a_k = (-1)^k$

（証明は，コーシー列のときと同様）

実ベクトル点列･集合の有界性

- $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
- 定義：実ベクトルの集合（数列）は有界

  ←→ ある実数 q≧0 が存在して，その集合（数列）に含まれる

  任意の実数ベクトル x に対し，||x|| ≦q
- 定義：実ベクトルの集合（数列）は非有界 ←→ 有界ではない

  ←→任意の実数 q に対し，その集合（数列）に含まれる

  ある実ベクトル x が存在して，||x|| > q
- 定義：　実ベクトル列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル c に収束する

  ←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow ||a_k - c|| < \varepsilon$

命題：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は，収束するならば有界

※　有界でも収束しない例が存在

部分列と極限

- 定義：点列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の部分列

  --- 点列 の一部を抜き出した点列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$

  ただし$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$

命題： 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ がcに収束（$\pm\infty$に発散）するとき，

その任意の部分列も c に収束（$\pm\infty$に発散）する．

（証明の概略）収束の定義を使えばすぐ分かる． ■

定理9.4： 任意の有界な数列は，収束する部分列をもつ．

（証明のアイディア）無限の長さの数列が区間[a,b]に含まれるとき，

[a,(a+b)/2]と[(a+b)/2,b]の一方には数列の無限個の要素が含まれる．

■

この定理を使うと，以下を得ることが可能

定理： 任意の有界な 実ベクトル列は，収束する部分列をもつ．

関数の連続性

定義: 一変数関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続

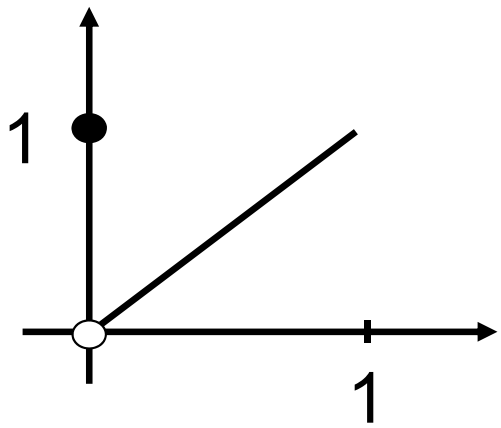
$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, x に収束する任意の数列 a_k に対し,

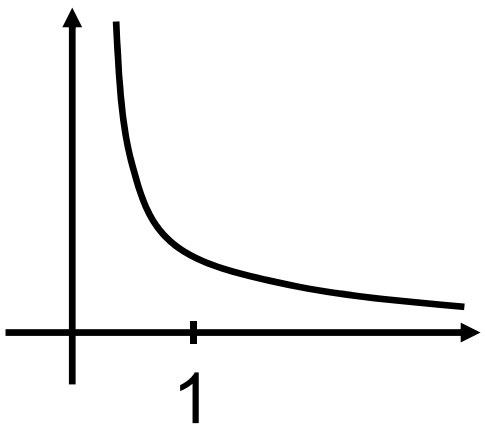
$f(a_k)$ は f(x) に収束

定義: 多変数関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続

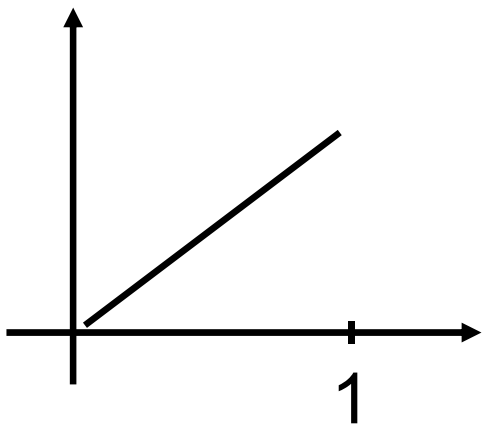
$\Longleftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$



不連続



連続



関数の最小解，最大解，最小値，最大値

関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,　　集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：　$a \in S$ は S における f の最小解

　⟺ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \geq f(a)$

このとき，値 $f(a)$ は S における f の最小値 とよばれる

定義：　$b \in S$ は S における f の最大解

　⟺ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \leq f(b)$

このとき，値 $f(b)$ は S における f の最大値 とよばれる

※ 最小解，最大解，最小値，最大値は存在するとは限らない

閉集合と開集合

定義: 中心 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r \geq 0$ の開球体

$$B(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < r\}$$

定義: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合 $\Longleftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in S, \exists \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S$

定義: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合

$\Longleftrightarrow$ S の補集合 $S^c = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} \notin S\}$ は開集合

$\Longleftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in S^c, \exists \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{x}, r) \cap S = \emptyset$

閉集合の例:

- 閉球体 $\overline{B(\boldsymbol{x}, r)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \leq r\}$
- 閉半空間 $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq b\}$

？（$\mathbb{R}$ の部分集合としての）有理数全体 $\mathbb{Q}$ ？

閉集合の特徴付け

定理9.6: $A \subseteq \mathbb{R}$ は閉集合

🡐🡒 A の収束する任意の実ベクトル列に対し,

その極限が A に含まれる

（🡒の証明の概略）数列 a_k の極限 a が A に含まれない

🡒 $\exists \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{a}, r) \cap A = \emptyset$ 🡐 a が極限であることに矛盾.

（🡐の証明の概略）

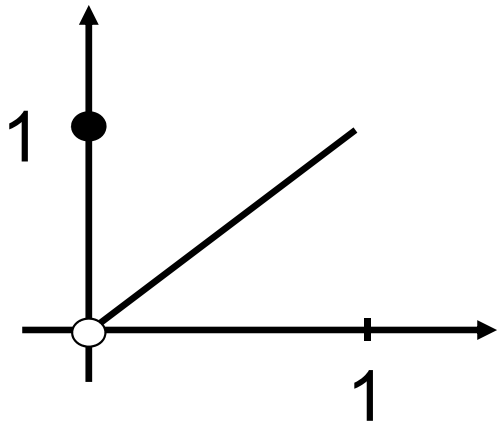
最小解，最大解が存在するための十分条件

定理9.13： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が連続関数，　$S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合

➔ 最小解，最大解が存在

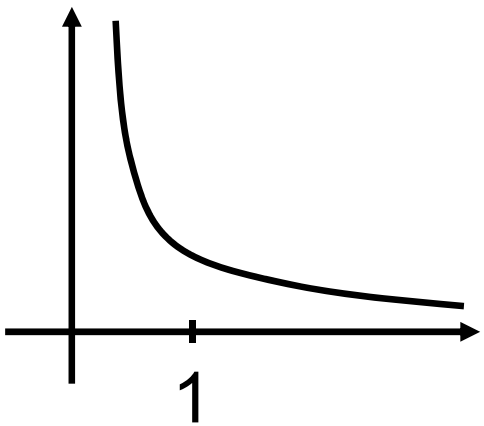
※ (i) f が連続 (ii) S が有界 (iii) S が閉集合　のいずれかひとつの条件が欠けると，最小解，最大解が存在しないことがある．

最小解が存在しない例



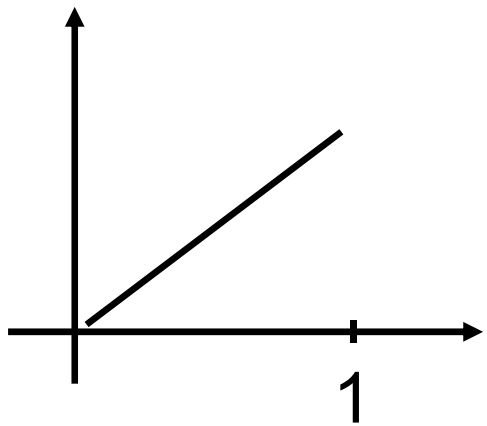
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$$

$S = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$



$f(x) = 1/x$

$S = \{x | x \geq 1\}$



$f(x) = x$

$S = \{x | 0 < x \leq 1\}$

定理9.13の証明

定理9.12（m=1のとき）と定理9.8を使うと簡単に示せる.

定理9.12 (m=1): $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合

➔ A の像 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ も有界閉集合

（証明は次のスライド）

定理9.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ が有界閉集合 ➔ A の最小元, 最大元が存在

（つまり, ∃a,b∈A, ∀x∈A, a≦x≦b）

（証明の概略）定理5.4より, A には下限b, 上限aが存在.

A が閉集合なので, a,b∈A ■

定理9.12の証明 その1

※教科書の方針と異なります.

（f(A)の有界性の証明）背理法の仮定：f(A)が上に非有界

➔ Aのある数列 a_k が存在して，$f(a_k) \to +\infty$

A は有界なので，数列 a_kは収束する

部分列a_{k_j} $(j = 1,2, \dots)$ をもつ ← 極限を c とおく

$f(a_{k_j})$ $(j = 1,2, \dots)$ は数列$f(a_k)$ の部分列

➔ 前のスライドの命題より $f\left(a_{k_j}\right) \to +\infty$

一方，部分列a_{k_j} $(j = 1,2, \dots)$ は c に収束，f は連続

➔ $f\left(a_{k_j}\right) \to f(c)$ （矛盾） ■

定理9.12の証明 その2

（f(A)の閉集合の証明）定理9.6 を使う.

f(A)の任意の収束列 $f(a_k)$を考える ← 極限を z とおく

z ∈f(A) を示したい.

A は有界なので，数列 a_kは収束する

部分列a_{k_j} $(j = 1,2, \dots)$ をもつ ← 極限を c∈A とおく

f は連続 ➔ $f\left(a_{k_j}\right) \to f(c) \in f(A)$

一方，$f\left(a_{k_j}\right)$ は $f(a_k)$ の部分列なので z に収束

∴ z = f(c)∈f(A)　■