

5 章 静電エネルギーと力

5.1 静電エネルギーのいろいろな形式

▶ コンデンサの蓄えるエネルギー

コンデンサの蓄えるエネルギーは、第 3 章で説明したように

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

これは静電エネルギーの一つの形であるが、電荷分布や電界が存在するところには必ず静電エネルギーが存在し、いろいろな形で表すことができる。以下では、静電エネルギーのいろいろな形を導出し、説明する。そして、それらがみな同じものの別の表現であることも説明する。

▶ 電界のエネルギー

まず、平板コンデンサを例にとって説明する。

電極面積 S 、電極間隔 d 、誘電率 ϵ の誘電体で満たされた平板コンデンサの静電容量は $C = \epsilon S / d$ であるから、このコンデンサの蓄えるエネルギーを次のように書き換えることができる。

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} V^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d} \right)^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd = \frac{1}{2} DE Sd$$

つまり、コンデンサの蓄えているエネルギーは、 $DE/2$ という量に平板電極間の部分の体積 Sd をかけたものである。

そこで、次のように考えることもできる。

今までの式では、静電エネルギーは電極上の電荷が蓄えていると考えることができたが、この式によると、電極間の空間に存在する電界が蓄えていると考えることもできる。

しかしながら、エネルギーというのはその状態を作るまでになされた仕事の合計であり、細かく見てどの部分に蓄えられているかなどは問題にならないという考えも成り立つ。また、電荷と静電界を切り離して独立にすることなどできないので、静電界と電荷のどちらに蓄えられているという議論自体が無意味とも言える。

したがって、静電界に限るとエネルギーのあり場所を議論することは重要ではない。ところが、第 12 章で出てくるように、電荷が作る静電界以外に、電荷がなくても発生する電界があり（誘導電界）、それまで含めて電気エネルギーを一般的に表す場合は、エネルギーは電界が蓄えている（あるいは、電界の存在自体がエネルギー）と考える方が便利であり現実的である。

実際、電界と磁界の流れ（電磁波）として光や電波があり、これはエネルギーを運んでいる。

平板コンデンサに限らず、一般的に

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 \, dv$$

ただし、積分する体積 V は、電界の存在するすべての空間である。

導出

2 導体で構成されるコンデンサを考えると
(右図)、 $W = CV^2/2 = QV/2$ において

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

(S は正電極を包む任意の閉曲面でよいが、ここでは等電位面のひとつと一致させておく。)

および

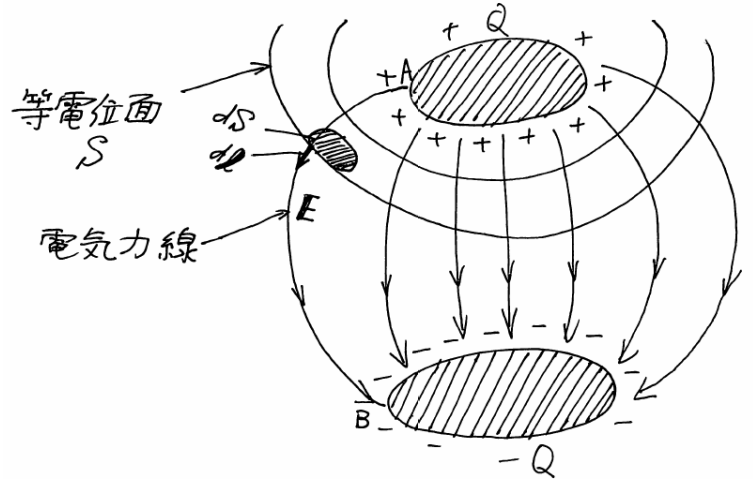
$$V = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(正電極から負電極まで任意の積分路でよいが、ここでは正電極上の任意の一点 A から電気力線に沿って負電極上の点 B までとしておく。)

となるので

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \int_A^B \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dS dl = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

ただし、面積分と線積分の積 (第 3 式) を、微小体積 $dSdl$ の体積積分 (第 4 式、積分範囲は電気力線と等電位面をなぞることによる全空間) に置き換えて、最後の結果を得ている。



▶ 電気エネルギー密度

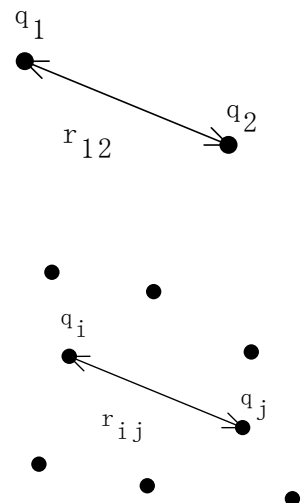
上で得られた全空間にわたる体積積分の式から、電気力線の存在する空間には、単位体積あたり $w_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2$ のエネルギーが蓄えられているとみなすことができる。
 w_e を電気エネルギー密度とよぶ。

5.2 電荷分布の蓄えるエネルギー

導体がなくて電荷分布だけが空間にあるような系も静電エネルギーを蓄える。このような静電エネルギーを計算し、上で得られた静電エネルギーとの関係を調べてみよう。

まず、点電荷 q_1 と q_2 が距離 r_{12} で置かれている系のエネルギーを考える(右図)。なぜこの体系はエネルギーをもつのか？それは電荷をここまで運んでくるのに仕事が必要だったからである。 q_1 を固定しておいて、 q_2 を無限遠から運んでくる仕事を計算すると

$$W = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r_{12}}$$



2 個以上の点電荷があるとき（右図）のエネルギーは

$$W = \sum_{\text{すべての対}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$$

これは、最初 q_1 だけがある空間に、順に $q_2, q_3, \dots$ を運んできたときの仕事を計算すれば得られる。
これを便宜上、次のように書き換えておく。

$$W = \sum_{\text{すべての対}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ (j \neq i)}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$$

すなわち、点電荷の対を数えて加算していく方法として、まず i を固定して j について和をとり、次に、別の i に固定してまた j について和をとり...、というように加算していく。このとき、 i と j のすべての電荷に対して和をとると、同じ対を 2 回数えてしまうので、係数 $1/2$ をつけておく。

電荷が電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続分布する系のエネルギーは次のようになる。

全空間を微小体積要素に分割する。各要素の体積を ΔV_i とする。 ΔV_i の位置が位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ で表されるとき、この要素内の電荷は $\rho(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$ である。各要素を点電荷とみなせば、全電荷によるエネルギーは上の式を用いて

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\substack{j \\ (j \neq i)}} \frac{\rho(\mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}_j)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \Delta V_i \Delta V_j$$

すべての体積要素について $\Delta V_i \rightarrow 0$ として

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dv_1 dv_2$$

2 つの体積積分は、ともに全空間で積分する。これが、電荷分布の蓄えているエネルギーである。

この式は、さらに以下のように変形できる。

電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ が分布している空間の電位は

$$V(\mathbf{r}_1) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} dv_2$$

これを上式に代入すると ($\mathbf{r}_1$ を $\mathbf{r}$ と書き換えて)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) dv$$

結局、電荷分布がある空間の静電界のエネルギーは、電荷とその点の電位を掛け合わせた値を全空間で積分して 2 で割った値に等しいという結果になった。

この式は導体が存在するコンデンサの場合にも適用できる。たとえば、2 つの導体からなるコンデンサを考えると、体積積分は電荷が分布している 2 つの導体の表面上だけになり、しかも、各導体表面はそ

れぞれ電位が等しいので、電位はそれぞれの積分の外に出すことができ、結局、 $W = QV/2$ という最初に示した式になる。

したがって、このエネルギーはコンデンサに蓄えられるエネルギーも表すことができ、そのことから、電界のエネルギーと同じものであることもわかる。

結局、以上の3つのエネルギー（コンデンサの蓄えるエネルギー、電界のエネルギー、電荷分布の蓄えるエネルギー）は同じものを違う式で表現したことになる。

（参考のみ）点電荷が単独で存在するときの静電エネルギー

半径 a の球の表面に電荷が一様分布しており、その総量が Q であるとき、球表面の電位 V は $Q/(4\pi\epsilon_0 a)$ であり、この系の静電エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

ところで、点電荷というものを便利なものとして計算に使っているが、もし点電荷が上記で $a \rightarrow 0$ の極限と同じものであるとすると、点電荷は単独でもエネルギーを持ち、しかもそのエネルギーは無限大であるという結論になってしまう。表面だけの電荷分布ではなく、中心まで一様に詰まっているとしても同じ結果。また、 $QV/2$ の代わりに、電気エネルギー密度 $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2 = \epsilon_0 E^2 / 2$ を全空間で積分しても（当然だが）同じ結果になる。

どうしてこうなったかという、そもそも $QV/2$ のもとの式（電荷密度と電位の積を全空間で積分する式）を導出する際、点電荷の集合から連続電荷分布に移行（つまり和から体積分に移行）する変形をしたが、このとき、任意の2つの微小体積の電荷同士が無限小の距離で近づく場合も可能になったからである。この式を点電荷のエネルギーに適用した結果、多数の電荷が無限小の空間に押し込められていることになり、エネルギーが無限大になったのである。

結局、2つの点電荷があるときのエネルギーの導出から出発したのに、単独の点電荷が無限大のエネルギーを持つという矛盾が生じてしまったことになる。この困難を避けるには、点電荷を用いなくて、電荷（電子）を有限の大きさをもつ電荷分布のかたまりと考えることである。あるいは、非常に小さい距離での電磁気学あるいはエネルギー局在の考えになにか間違いがあるのかもしれない。これらの難点は現代物理学でも未解決である。しかし、単独で持っているエネルギーのことさえ問題にしなれば、点電荷は議論を進める上で便利なモデルであるから、今後も使っていく。

5.2 静電エネルギーと安定性に関する定理

▶ トムソンの定理

誘電体中（あるいは真空中）に固定された導体を帯電させると、導体表面の電荷は蓄えられる静電エネルギーが最小になるように分布する。

証明

$\mathbf{E}$ (および $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$) がエネルギー最小の電界分布、 $\mathbf{E}'$ (および $\mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}'$) がそうでない電界分布とする。両電界分布に与える条件は

- ・ 各導体上の電荷はどちらも等しい（電荷分布は等しくない）とする。
- ・ 導体以外の空間で基本方程式 $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ および $\text{div} \mathbf{D}' = \rho$ を満たすとする。
- ・ 電界分布 $\mathbf{E}$ では各導体の表面は等電位、 $\mathbf{E}'$ では各導体の表面は等電位ではないとする。

(両分布とも各導体上の電荷が等しいので、もし両分布とも表面が等電位とすると、第 10+11 回で説明した一意性から、同じ電界分布ということになってしまう。結局、この定理は「導体表面が等電位となる分布が静電エネルギー最小となる」ということを言っている。)

2 つの電界分布の静電エネルギーの差は

$$W' - W = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D}' \cdot \mathbf{E}' dv - \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dv + \iiint_V \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dv$$

右辺の第二項は、前ページと同じベクトル公式を用いて

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dv &= \iiint_V (-\text{grad} V) \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dv \\ &= - \iiint_V \text{div} \{ V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \} dv + \iiint_V V \text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dv \end{aligned}$$

右辺の第二項は、 $\text{div} \mathbf{D}' = \rho$ および $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ から $\text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) = 0$ となるので 0。

第一項にはガウスの定理を用いて

$$\begin{aligned} - \iiint_V \text{div} \{ V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \} dv &= - \oint_S V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \sum_{\substack{\text{すべての} \\ \text{導体表面}}} \iint V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

第二項の S' は系全体を囲む非常に大きな球面であり、前ページの計算と同じように 0 になる。

第一項については、 V は導体表面で等電位であるから、

$$- \sum_{\substack{\text{すべての} \\ \text{導体表面}}} \iint V(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} = - \sum_{\substack{\text{すべての} \\ \text{導体表面}}} V \iint (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S}$$

各導体の電荷は両方の電界分布で等しいので、 $\iint \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ であり、したがって 0。

結局、

$$W' - W = \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dv = \iiint_V \frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}' - \mathbf{E}|^2 dv \geq 0$$

よって、 W は最小値である。証明終わり。

▶ アーンショーの定理

電荷が存在しない静電界中に置かれた帯電体は静電氣的な力だけではとどまることができない。電気力以外の力で固定しないかぎり電界の力で動き出してしまふ。

帯電体が安定する場所は、電位 V が極大または極小になる点である。

極大または極小の点ではすべての方向に対して $\text{grad} V$ の成分が 0 であり、したがって電界が 0 になるので帯電体にはたらく力は 0 である、と同時に、極小と極大の点ではそれぞれ正と負の帯電体が、わずかに位置がずれても戻されるように力を受け、安定に静止する。

したがって、この定理は「ラプラス方程式 $\nabla^2 V = 0$ の解として得られる関数 V には極大も極小もない」ということを言っている。

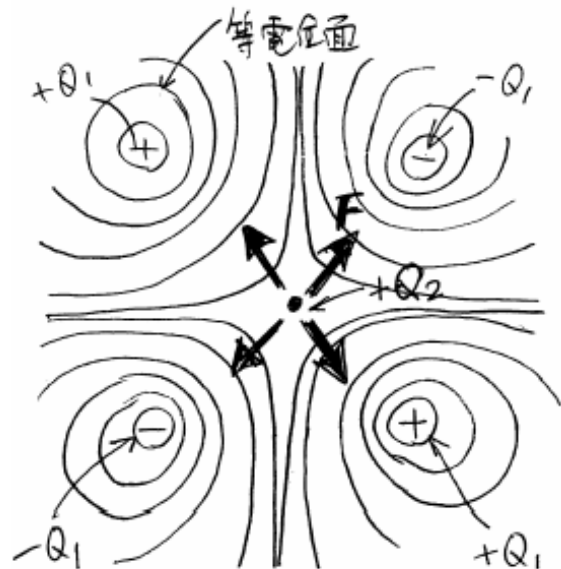
証明

極大または極小点では $\text{grad } V = 0$ であるが、同時に、その点を囲む近傍のすべての点で $\text{grad } V$ がその点の方向を向いているか（極大の場合）、あるいはすべてその逆を向いている（極小の場合）。

（注： $\text{grad } V = 0$ の点であってもこれらを満たさない点は、極大点でも極小点でもなく、帯電体もその点では安定でない。ある方向に沿うと極小点に見え、他の方向に沿うと極大点に見える点は鞍点（サドルポイント）とよばれる。）

したがって、極大または極小点では、その点を囲む近傍の点で、電界 $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ が、すべてその点の方向を向いているか、あるいはすべてその逆を向いている。このような場合、その点を囲む微小な閉曲面で $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ は 0 ではない。すると、ガウスの法則からこの閉曲面内部には電荷が存在することになり、「電荷が存在しない静電界中」という最初の設定に反する。
したがって、電荷が存在しない空間の静電界分布には極大も極小もない。証明終わり。

右図は安定しない点の一例。中央の点では電荷にはたらく力がつりあっているが、少しずれると元に戻らないので安定な点ではない。この点は電位の鞍点になっている。



（参考）アーンショウの定理について、以下のような証明もできる。

証明

電位分布のある空間で、任意の点を中心とする半径 r の球面上で電位 V を積分して平均した値は

$$\frac{1}{4\pi r^2} \oiint_S V(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} V(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} V(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

この平均値を半径 r で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} V(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right] &= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial r} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\partial V(r, \theta, \phi)}{\partial r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} E_r dS \quad \left(\text{電界の } r \text{ 方向成分 } E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi r^2} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

最後の式は、球内部に電荷がなければガウスの法則から 0 になる。

したがって、球面上での V の積分平均値は、球の半径 r によらない。

いま、中心が同じ 2 つの球を考え、半径を a と a' 、表面を S と S' とすると、上の結果から

$$\frac{1}{4\pi a'^2} \oint_{S'} V(\mathbf{r}) dS' = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_S V(\mathbf{r}) dS$$

ここで、 $a' \rightarrow 0$ とすると左辺の V は球の中心での値に収束するので、左辺の積分平均は球の中心での V の値になる。結局、球の中心の電位 $V(0)$ に対して次式が得られる。

$$V(0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_S V(\mathbf{r}) dS$$

すなわち、任意の点における V はその点を中心とする任意の球面上の V の積分平均値に等しい。

したがって、どの点においても V が周囲に比べて最大や最小になることはありえない。(境界の点は別。周囲全部が解の V で囲まれているわけではないから。)

したがって、ラプラス方程式 $\nabla^2 V = 0$ の解として得られる関数 V には極大も極小もない。証明終わり。

(参考の参考) 数値解析 (第 2 章の内容) との関係

第 2 章のラプラス・ポアソンの方程式の解法の中で、数値解析の方法について説明した。そこで得られた結論として、任意の一点の電位 V (ラプラスの方程式の解) は最近接 4 点の電位を用いて

$$V = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 V_i$$

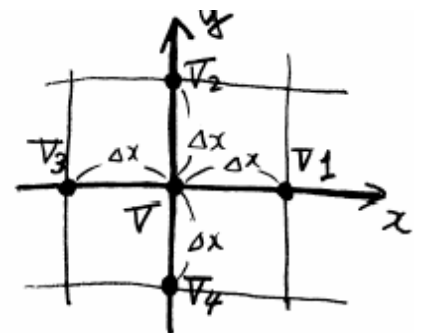
ただし、 V の点と最近接の 4 点の位置関係は右上図。

これは 2 次元空間の V の場合であるが、3 次元でも全く同様にして、最近接 6 点を用いて (右下図)

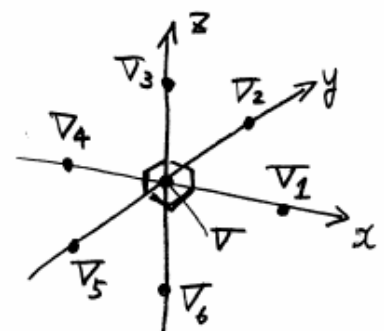
$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 V_i$$

最近接の 6 点は、 V の点から等距離で直交軸上にあれば何でもよい。したがって、この 6 点は無数に指定できるが、 V はそれらすべての点の電位の合計の平均値になっているのである。

このことから、ある点の V は、その点を中心とする球面上のすべての点の電位の合計 (面積分) の平均値になるという、上で得られた結果が理解される。



2 次元の場合



3 次元の場合

5.3 導体系の蓄積エネルギーと力

帯電した導体間には力がはたらく。たとえば、2 導体からなるコンデンサの電極には正負の電荷が帯電しているので引き合う。ここでは、このような力を静電エネルギーから求める方法について説明する。

▶ コンデンサの電極間にはたらく力

平板コンデンサの両電極に電荷 $\pm Q$ を帯電させる(右図)。

(具体的には、まず電源をつないで $\pm Q$ を帯電させた後、電源をはずす。したがって、以下の議論で Q は不変。)

電極間にはたらく力をエネルギーから計算してみよう。

コンデンサに蓄えられるエネルギー W は、

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} x$$

いま仮に、電極間隔 x を増加させる方向に力 F がはたらいていると仮定する(つまり斥力と仮定。本当は引力であるから、この仮定は誤りであるが、計算結果は $F < 0$ となるので問題ない。したがって、この方法は力の方向が未知の問題でも有効。)

もし、力 F によって電極間隔が x から $x + \Delta x$ に変わったとすると(上図)、この系は外に対して(具体的には電極を支えている物体に対して)仕事 $F \Delta x$ をしたことになる。この仕事の分だけ、この系はエネルギーを失ったと考えることができる。失ったエネルギーを $-\Delta W$ とすると(つまり、 x から $x + \Delta x$ への変化によってエネルギーが W から $W + \Delta W$ に変化したと考えている)、

$$F \Delta x = -\Delta W$$

したがって

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \rightarrow -\frac{\partial W}{\partial x} \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

上記の静電エネルギーを代入して

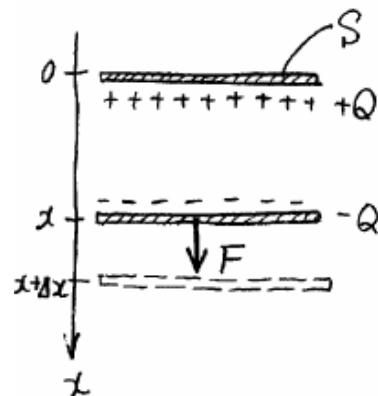
$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

これが電極間にはたらく力である。斥力を仮定したら $F < 0$ となったので、実際は引力であることを示している。正負の電荷の間の力なのでこれは当然である。

このように、力を勝手に仮定して、それに沿って移動(変位)が起こった場合を考え、そのときのエネルギーの変化から力を計算する方法を仮想変位の原理という。静電界だけでなく、広く物理学一般で使われる方法である。

仮想変位の原理

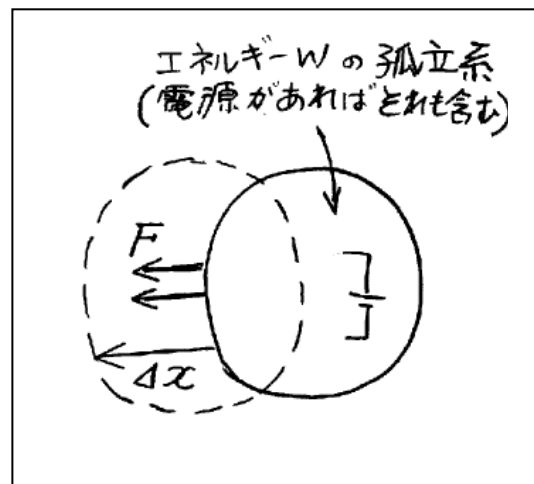
エネルギーをもつ系には力がはたらく。たとえば、電荷を蓄積したコンデンサは静電エネルギーを持つので電極間に力がはたらく。また、高いところにある物体は位置エネルギーを持つために下方に向かう重力を受ける。いずれも系全体のエネルギーが減少する方向に力がはたらいている。このような、エネルギーをもつ系にはたらく力を求める一般的な原理を説明し、これを磁気エネルギーをもつ系に適用



してみる。

エネルギー W をもつ孤立系を考える。ここで、孤立系というのは、外部とまったくエネルギーのやり取りのない系を意味する。もし、系が電源とつながっているなら、電源もまとめてひとつの系とみなしてしまい、孤立系と考える。

この系はエネルギーをもっているために力を受けている。いま、この力 F の方向を x とし、 F によって系が Δx だけ移動したと仮に考えてみる。(概念図を右に示した。具体例は下記の例 1 と 2 の図を参照。) この移動によって外部になされた仕事量は $F\Delta x$ である。このとき、系のエネルギーがこの仕事に使われたと考えることができるので、エネルギー変化を ΔW とすると (増加を正としている)、 $F\Delta x = -\Delta W$ が成り立つ。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を考えると、系にはたらく力は



$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} \rightarrow -\frac{\partial W}{\partial x} \quad (x \rightarrow 0)$$

これはエネルギーをもつ系に対してはたらく力の一般的な形を表している。系の持つエネルギーは、電気エネルギー、磁気エネルギー、力学的エネルギーなど、どんな種類でもよい。エネルギーをもつ系に対して、仮に動いたらと考えるこの方法を、仮想変位の原理とよぶ。

以上は 1 次元方向のみを考えた場合であるが、3 次元的に考えてベクトルで表すと

$$\mathbf{F} = -\text{grad } W$$

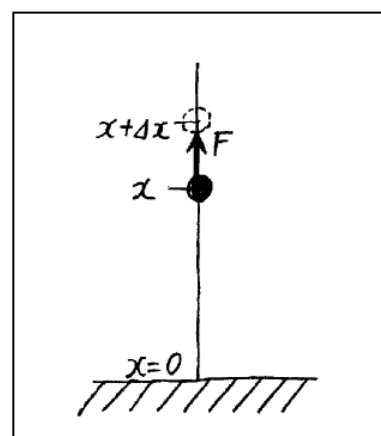
簡単な例として、高さ x にある質点 m にはたらく重力 F を仮想変位の原理で求めてみよう(下図)。

質点にはたらく力 F を x 方向(上向き)とし、仮に高さが $x \rightarrow x + \Delta x$ となったと考える。(我々は重力が下向きにはたらくことを知っているから、 x 方向(上向き)と考えるのはおかしいと思うかもしれないが、あえてこのようにおいてみる。それでも正しい方向に力が求まることがあとでわかる。)

質点の位置エネルギーは $W = mgx$ から $mg(x + \Delta x)$ に変化する。したがって、移動によるエネルギーの増加分は $\Delta W = mg\Delta x$ となるので、質点にはたらく力は、仮想変位の原理により

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = -mg$$

F を上向きとしたが、式にしたがって計算した結果は負となり、重力が下向きにはたらくという当然の結果がきちんと出ている。



・考えてみよう

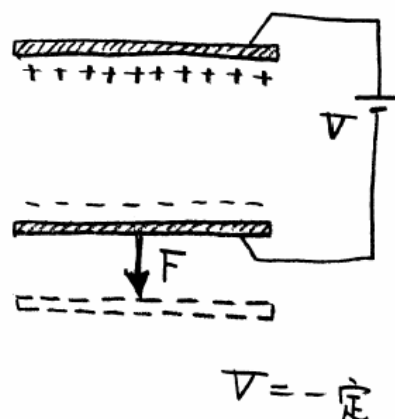
平板コンデンサでは、電極に $\pm Q$ の電荷が蓄えられたとき、電極表面の電界は $E = Q / (\epsilon_0 S)$ である。これを使って、電極にはたらく力を $F = QE$ で求めてもよさそうに思える。これを計算すると $F = QE = Q^2 / (\epsilon_0 S)$ となる。仮想変位の計算結果と比べて係数 1/2 がない。実は 1/2 がつくのが正しいのであるが、それはなぜか？考えてみよう。(後述の静電力の項目の物体にはたらく力も参照。)

今度は、平板コンデンサの両電極に電荷 $\pm Q$ を帯電させた電源をつないだままの場合を考えよう(下図)。この場合は、電位差 V が一定である。

コンデンサに蓄えられるエネルギー W は $CV^2/2$ であるから、力を上の場合と全く同様に計算すると

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

さて、力の大きさは上と同じだが、符号が逆になってしまった。しかし、電源の接続に関係なく、コンデンサの状態が電位差 V 電荷 Q であることに変わりないはずである。したがって、異なった結果が出るのはおかしい。正負電荷間の力なので引力のはずであるから、この計算がおかしい。つまり、このときの仮想変位の原理の使い方に誤りがあるのである。



上の計算で抜けていたのは次の点。

力 F によって電極間隔が x から $x + \Delta x$ に変わったとき、コンデンサのエネルギーが変化すると同時に、電源のエネルギーも変化する。電極の電荷が Q から $Q + \Delta Q$ に変化したとすると、電源がエネルギー $V\Delta Q$ を失う。(負電極から ΔQ が引き抜かれて、電位差 V を通して正電極に入ると考えると、これによって ΔQ の電荷がエネルギー $V\Delta Q$ を獲得したことになる。この分を電源が供給し失ったのである。)

したがって、この場合は次式が正しい。

$$F\Delta x = -\Delta W + V\Delta Q$$

$\Delta x \rightarrow 0$ として

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{CV^2}{2} \right) + V \frac{\partial(CV)}{\partial x} = +\frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

これは確かに最初の計算結果と一致している。つまり、仮想変位の原理を用いるときは、すべてのエネルギー変化を考慮しないといけない。

V 一定の場合のエネルギーのやりとりをまとめてみると、次のようになっている。

- ・ 外部への仕事 $F\Delta x = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x$ ($\Delta x < 0$ のとき、 $F\Delta x > 0$ つまり外へ仕事をする)
- ・ コンデンサのエネルギー変化 $\Delta W = \frac{\partial W}{\partial x} \Delta x = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x$
($\Delta x < 0$ のとき、 $\Delta W > 0$ つまりエネルギー獲得)
- ・ 電源のエネルギー変化 $-V\Delta Q = -V^2 \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x$

($\Delta x < 0$ のとき、 $-V\Delta Q < 0$ つまりエネルギー損失)

これをみると、電源が供給したエネルギーのちょうど半分が仕事に使われ、残り半分がコンデンサに蓄えられたことになる。つまり、コンデンサは電源からエネルギーをもらって、効率 50% で仕事をしたことになる。逆に、外から仕事をされると、コンデンサも同じだけのエネルギーを放出し、仕事量の 2 倍のエネルギーが電源に入る。

以上の結果から、一般的に次のように書くことができる。

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{Q=\text{一定}} = + \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{V=\text{一定}} \quad \text{具体的には} \quad F = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = + \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

ただし、変位 x は力の方向にとる。また、 W はコンデンサのみ（電源を含まない）のエネルギー。

仮定した

5.4 静電力

▶ 物体にはたらく静電力

電界 $\mathbf{E}$ の中に置かれた物体にはたらく静電力は

$$\mathbf{F} = \iiint_V \left\{ \rho(\mathbf{r}_1) + \rho_p(\mathbf{r}_1) \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$$

ただし、積分範囲は帯電体全体であり、 ρ と ρ_p は物体に分布している真電荷密度と分極電荷密度である。上式の積分中の電界 $\mathbf{E}$ は、 ρ や ρ_p 自身が作る電界と外部から加えられた電界の和である。しかし、 ρ や ρ_p 自身が作る電界が自分自身に作用する力の合計は以下のように 0 になる。

真電荷密度 ρ のみが存在する場合を考える（分極電荷 ρ_p があっても同じだが簡単のため。）

電界 $\mathbf{E}$ が電荷密度 ρ 自体によるものであれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_2$$

最初の式に代入して

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_1) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

この式で $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ とを入れ換えると、 $\mathbf{F} = -\mathbf{F}$ が得られ、したがって $\mathbf{F} = 0$ となる。すなわち、帯電体を作る電界によりその帯電体自体に作用する力は全体でつりあっている。帯電体が外部電界もないのに勝手に動き出すことはないから、これは当然である。（ただし、静電界でなく時間的に変化する電界の場合は 0 にならないことがある。）

▶ 導体表面にはたらく力

最初に説明した平板コンデンサの電極間の力を用いると、導体表面にはたらく単位面積あたりの力は

$$f = \frac{F}{S} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

ただし、 $\sigma = Q/S$ は面電荷密度、 $E = \sigma/\epsilon_0$ は導体表面の電界であり、力の方向は電界と同じ（面に垂直）。

次のような導出もできる。

導体表面の面積 S の部分が力の方向に Δx だけ移動したとすると、この部分（体積 $S\Delta x$ ）の空間が導体に置き換わったことになる。移動前にはこの部分にエネルギー $(\epsilon_0 E^2/2) S\Delta x$ があり、移動によりこれが 0 になる（導体の内部は電界が 0 だから）。したがって、仮想変位の原理により、力はこのエネルギー減少分を Δx で割った値になり、単位面積あたり上式の力になる。

▶ 誘電体境界面にはたらく力

誘電率の異なる誘電体が接している境界面に電界が存在するとき、この境界面には力がはたらく。

・電界が境界面に垂直の場合

平板コンデンサの電極間に、誘電率 ϵ_1 と ϵ_2 の誘電体が右図のように入っており、電極に $\pm Q$ を帯電させた場合を考える。

電界は誘電体の境界面に垂直である。

全体のエネルギーは

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2S} \left\{ \frac{x}{\epsilon_1} + \frac{d-x}{\epsilon_2} \right\}$$

いま、境界面にはたらく力によって x が増加したと仮定する。

（ ϵ_1 の誘電体が少し伸びて ϵ_2 の誘電体と同じだけ縮んだと考えている。それぞれの誘電率はこの伸縮によっても変わらないと仮定している。）

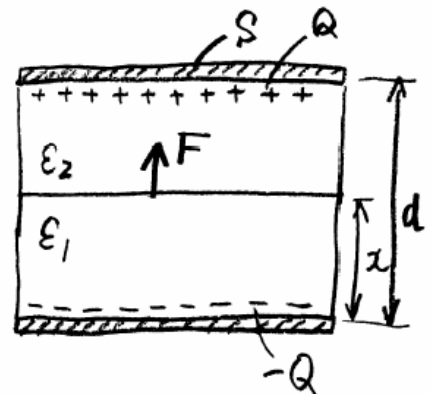
境界面にはたらく力は仮想変位の原理により

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{Q=\text{一定}} = \frac{Q^2}{2S} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) = \frac{D^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) S$$

D が境界面で連続なのでこれを用いて表している。境界面の単位面積あたりの力（圧力）で表すと

$$f = \frac{F}{S} = \frac{D^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$$

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ のとき $f > 0$ となる。すなわち、境界面には誘電率の小さいほうへ引き込む力がはたらく。



なお、境界表面の面積 S の部分が Δx だけ移動すると、この部分（体積 $S\Delta x$ ）が誘電率が ϵ_1 から ϵ_2 に置き換わったことになり、この部分に $\Delta W = (D^2/2\epsilon_1)S\Delta x - (D^2/2\epsilon_2)S\Delta x$ の電気エネルギー増加がおこるので、このことから仮想変位の原理を用いても同じ結果が得られる。

・電界が境界面に平行の場合

今度は、平板コンデンサの電極間に誘電率 ϵ_1 と ϵ_2 の誘電体が右図のように入っており、電極間の電位差が V の場合を考える。（ Q が一定でもよいが、 V 一定のほうがやや簡単。）

電界は誘電体の境界面に平行である。

全体のエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{V^2}{2} \frac{w}{d} \{ \epsilon_1 x + (a-x) \epsilon_2 \}$$

境界面にはたらく力は仮想変位の原理により

$$F = + \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{V=\text{一定}} = \frac{V^2}{2} \frac{w}{d} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{E^2}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) S$$

この場合は E が境界面で連続なのでこれを用いて表している。また $S = wd$ は側面の面積。

境界面の単位面積あたりの力(圧力)で表すと

$$f = \frac{F}{S} = \frac{E^2}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$\epsilon_1 > \epsilon_2$ のとき $f > 0$ となる。すなわち、境界面にはやはり誘電率の小さいほうへ引き込む力がはたらく。

なお、電界が境界面に垂直の場合のように、境界で体積 $S \Delta x$ の部分の誘電率が ϵ_1 から ϵ_2 に置き換わったとして、この部分の電気エネルギー増加から仮想変位の原理を用いて計算する方法は注意を要する。この部分のエネルギー変化だけを考えるのは、電源をつないでいない場合に相当する。このときは移動によって、境界面に平行方向の電界が変化するので単純ではない。電界が変化しないとして計算するなら、これは V 一定の計算をしたことになり、符号を逆にすれば正しい結果になる。

次のような疑問が生じるかもしれない。

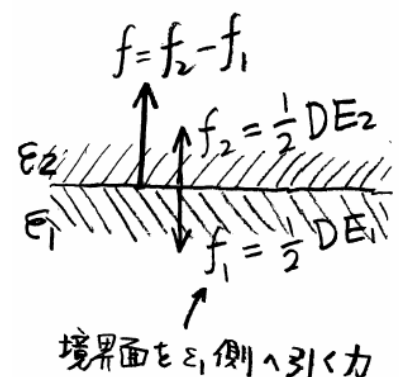
電界が境界面に平行な場合、境界面には分極電荷は発生しない。すると、境界面にはたらく力というのは、実際には何が力を受けているのだろうか。

仮想変位の原理では、全体にはたらく力の合計が得られるだけで、細かく見てどの部分にどれだけの力がはたらくということまでの導出は難しい。上の計算では、形式的に側面の圧力という形の力が得られたが、現実的には、誘電体のいろいろな部分に発生する分極電荷（たとえば、電極との境界面の分極電荷、外にはみ出している部分に端部効果の電界によって発生する分極電荷、など）があり、それらの間や電極の真電荷との間の力が合計された結果を表している。それにしては単純な結果で不思議な気がするかもしれないが。

誘電体を弾性体と考えれば、これらの力が誘電体内の応力として誘電体中を伝わり、結局、境界面での圧力になって現れていると考えることができる。

▶ 電界分布による応力

電界が誘電体境界面に垂直な場合について、境界面にはたらく圧力を次のように書くことができる。



$$f = \frac{D^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \equiv f_2 - f_1 \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} f_1 = \frac{D^2}{2\epsilon_1} = \frac{1}{2} D E_1 \\ f_2 = \frac{D^2}{2\epsilon_2} = \frac{1}{2} D E_2 \end{cases}$$

この式は、境界面にはたらく力を 2 つの力 f_1 と f_2 の差から生じていると考えている（右図）。

f_1 は境界面を誘電率 ϵ_1 の誘電体のほうへ引き込む力、 f_2 は誘電率 ϵ_2 の誘電体のほうへ引き込む力である。

この考えをさらに拡張して、誘電体の中の電気力線自体が f_1 や f_2 のような力を持っていると考える。たとえば、一つの誘電体を電極で挟んだ平板コンデンサでは、電極間に引力がはたらくが、これを電荷間の力と考える代わりに、誘電体内の電気力線が縮もうとする力を持つために生じたと考えるのである。

異なる誘電体の境界面ではこれらの縮もうとする力が引き合って、その差が現れると考えることができる。一つの誘電体の中ではこれらはつりあって 0 になっている。

電界が誘電体境界面に平行な場合も同様に

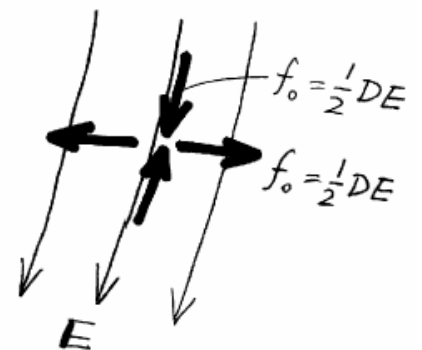
$$f = \frac{E^2}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \equiv f_1 - f_2 \quad \text{ただし} \quad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2} \epsilon_1 E^2 = \frac{1}{2} D_1 E \\ f_2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 E^2 = \frac{1}{2} D_2 E \end{cases}$$

垂直の場合と同様に、誘電体内の電気力線自体が、その側面に f_1 や f_2 のような力を持っていると考える。導体に電荷を与えると、電荷同士の反発力により電荷は導体表面に広がるが、それに伴って隣り合う電気力線も広がるので、電荷間の力と考える代わりに、電気力線の側面に広がろうとする力があると考えるのである。

異なる誘電体の境界面ではこれらの広がろうとする力が反発しあって、その差が現れると考えることができる。一つの誘電体の中ではこれらはつりあって 0 になっている。

以上のことから、~~誘電体~~の電気力線には、各点に右図のような応力が伴っていると考えることができる。これらをマクスウェルの応力とよぶ。

電気力線は互いに反発しあうように、また、一本一本は引っ張られたゴムひもになっている。



上の説明からわかるように、これらは電荷の間の力を言い換えたものである。実際、電荷にはたらく力(つまり電荷×電界)を、ガウスの法則とベクトル計算を使って、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{D}$ による応力テンソルに変形することができる。(しかし、複雑な計算なのでここでは省略する。)ファラデーはこれらの応力を数式なしで直感的に気づいていたといわれている。数式で導出して見せたのはマクスウェルである。

以上は、電界がエネルギーを持つという考えと同じように、電界が静電力の原因となる応力を持つという考えである。(電荷から電気力線とともに応力が伝わり、他の電荷に力が届くと考えている。) 静電界に関する限り、エネルギーと同様に、これは便宜上のことであるが、電界と磁界の流れである電磁波が物質に照射されると、その表面に圧力を及ぼすことが知られているので、実際に存在すると考えてよい。

まとめ

静電エネルギーと力

- ・ 静電エネルギーのいろいろな形式 (これらはすべて同じ静電エネルギーに対する異なる表現)

$$\text{コンデンサのエネルギー} \quad W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

$$\text{電界のエネルギー} \quad W = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

$$\text{単位体積あたりの電気エネルギー密度} \quad w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$\text{電荷分布のエネルギー} \quad W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dv$$

- ・ 静電エネルギーと安定性に関する定理

トムソンの定理 誘電体中 (あるいは真空中) に固定された導体を帯電させると、導体表面の電荷は蓄えられる静電エネルギーが最小になるように分布する。

アーンショウの定理

電荷が存在しない静電界中に置かれた帯電体は電氣的な力だけではとどまることができない。
(ラプラスの方程式を満たす電位には極大値も極小値も存在しない)

- ・ コンデンサの電極間にはたらく力

$$F = - \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{Q=\text{一定}} = + \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{V=\text{一定}} \quad \text{具体的には} \quad F = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = + \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

(この場合の W はコンデンサのみ (電源を含まない) のエネルギー。変位 x は力の方向。)

- ・ 静電力

$$\text{物体にはたらく静電力} \quad \mathbf{F} = \iiint_V \left\{ \rho(\mathbf{r}_1) + \rho_p(\mathbf{r}_1) \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \, dv_1$$

電荷密度が作る電界により自分自身にはたらく力の合計は 0

一様電界中の帯電体にはたらく力の合計は 0

(不均一電界中の帯電体には力がはたらく)

$$\text{導体表面 (単位面積あたりの力)} \quad f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

誘電体境界面、電界分布による応力

$$f = ED/2 \quad (\text{電気力線が縮もうとする応力、および、側面が広がろうとする応力})$$

誘電体境界面では、境界両側でこの応力に差が生じ、圧力として現れる。

演習問題

5-1 問題 3-6 において、コンデンサの上下の極板に $\pm\sigma$ の面電化密度を与えたとき、コンデンサの単位面積が蓄積するエネルギーを求めよ。

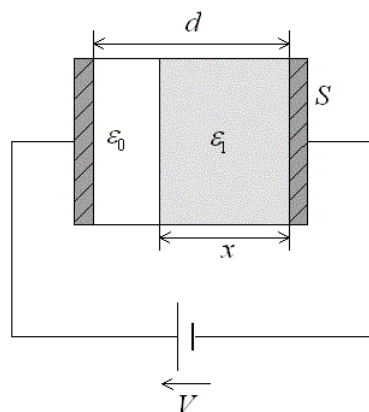
5-2 問題 4-4 において、系に蓄えられている静電エネルギーを求めよ。ただし静電容量を用いる方法、エネルギー密度を空間積分する方法の 2 通りの方法で求め、両者が等しくなることを確認せよ。

5-3 面積 S 、間隔 d の平板コンデンサに $\pm Q$ の電荷が蓄えられている。端部効果が無視できるとし、次の問に答えよ。

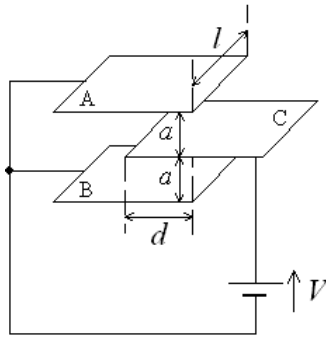
- (1) 極板間の電界を求めよ。
- (2) クーロンの法則より、極板が受ける力を求めよ。また、(1)の電界を用いてクーロンの法則から求めた力は正しい解の 2 倍になってしまう。この考え方にはどこに誤りがあるか？
- (3) 仮想変位を用いて極板が受ける力を求めよ。

5-4 図のように間隔 d 、面積 S の平行極板間に誘電率 ϵ_1 の誘電体が挿入してある。端部効果は無視できるとした場合、次の問いに答えよ。

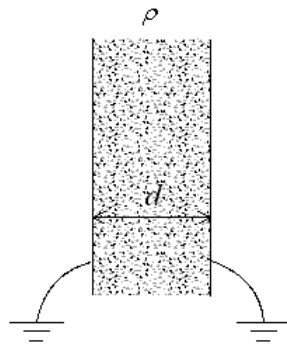
- (1) 極板間の静電容量 C を求め、 x を横軸として C の値を図示せよ。
- (2) コンデンサが蓄えるエネルギーを求めよ。電気回路的な考え方と、電気磁気学的な空間の蓄積エネルギーの考え方の 2 通りの計算法を試し、両者の値が一致することを確認せよ。
- (3) 極板間の力を求め、 x との関係を同様に図示せよ。電位を一定にした場合の仮想変位の方法と、充電後に電源を切り離して電荷を一定にした場合の仮想変位の方法の 2 通りを試し、両者の値が一致することを確認せよ。



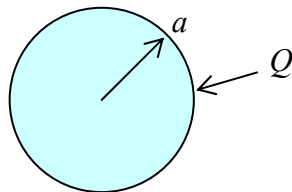
5-5 図のように幅 l の 3 枚の導体板 A, B, C が狭い間隔で平行に置かれている。A, B 間には C が d だけ挿入されていて A, B と C の間には電位差 V が加えられている。このとき導体 C に働く力を求めよ。ただし、電界の端部効果は無視せよ。



5-6 図のように接地された間隔 d の平行導体間に一様な電荷密度 ρ が分布していると仮定して、両導体の単位面積あたりに働く力を求めよ。



5-7 半径 a の球状の水滴がある。この水滴に $Q[\text{C}]$ の電荷を与えたとする。水滴は導体と見なせるとすると、水滴の表面が受ける力を求めよ。



章末問題略解

5 章 静電エネルギーと力

$$5-1 \quad \frac{\sigma^2(d-x)}{2\varepsilon_0}$$

5-2

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \left(\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2$$

$$5-3 \quad (1) \quad \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$(2) \quad -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

ただし、極板が離れる方向を正の向きとしているので、引き合う力となる。

自身の電荷が作る電界による力は受けない。(1)の電界を用いると自身の電荷が作る電界も足してしまっているので間違いである。

$$(3) \quad -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$5-4 \quad (1) \quad C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d}$$

$$(2) \quad \frac{V^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{\varepsilon_0 x + \varepsilon_1 (d-x)}$$

$$(3) \quad -\frac{SV^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1^2}{\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d\}^2}$$

ただし、 d が増える方向を正の向きとしている。

$$5-5 \quad \frac{\varepsilon_0 l}{a} V^2 \quad \text{ただし、} d \text{が増える方向を正の向きとしている。}$$

$$5-6 \quad -\frac{(\rho d)^2}{8\varepsilon_0} \quad \text{ただし、} d \text{が増える方向を正としている。}$$

$$5-7 \quad \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \quad \text{ただし、} a \text{が増える方向を正としている。}$$