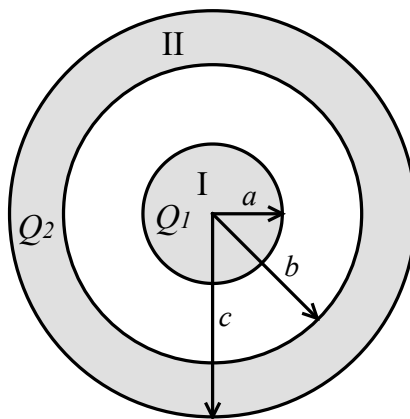


電磁気学第一 演習 第7回 解答

9.

(1) 図のように2つの同心導体球がある。内導体Iに電荷量 $Q_1(>0)$ を、外導体IIに電荷量 $Q_2(>0)$ を与えたとき、電界を内導体Iの中心からの距離 r の関数として求め、グラフを描け。

(2) 無限遠の電位を基準(0)としたとき、電位分布を無限遠から中心に向かって順に積分していくことにより求めよ。



【解答】

(1) 電界を求める

(i) Reg.i ($0 \leq r < a$)

導体中に電界は無いから

$$\mathbf{E} = 0$$

(ii) Reg.ii ($a \leq r < b$)

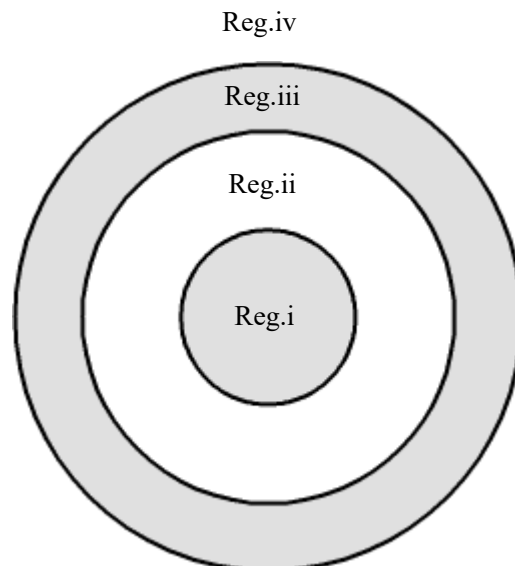
$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(iii) Reg.iii ($b \leq r < c$)

導体中に電界は無いから

$$\mathbf{E} = 0$$



(iv) Reg.iv ($c \leq r$)

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

よって、まとめると、

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & (0 \leq r < a) \\ \hat{r} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (a \leq r < b) \\ \mathbf{0} & (b \leq r < c) \\ \hat{r} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (c \leq r) \end{cases}$$

(2) 電位を求める

(iv) Reg.iv ($c \leq r$)

$$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$V = -\int_{r=\infty}^r E_r dr = -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=\infty}^r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(iii) Reg.iii ($b \leq r < c$)

$$\begin{aligned} V &= -\int_{r=\infty}^r E_r dr = -\int_{r=\infty}^c E_r dr - \int_{r=c}^r E_r dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} - \int_{r=c}^r 0 dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \end{aligned}$$

(ii) Reg.ii ($a \leq r < b$)

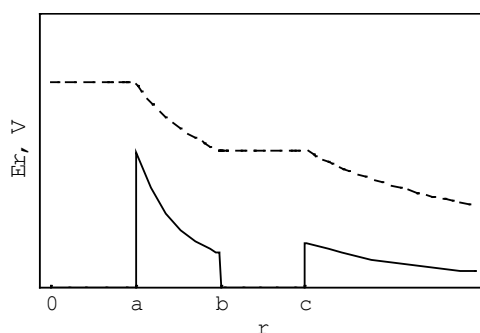
$$\begin{aligned} V &= -\int_{r=\infty}^r E_r dr = -\int_{r=\infty}^c E_r dr - \int_{r=c}^b E_r dr - \int_{r=b}^r E_r dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=b}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=b}^r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \end{aligned}$$

(i) Reg.i ($0 \leq r < a$)

$$\begin{aligned}
 V &= -\int_{r=\infty}^r E_r dr = -\int_{r=\infty}^c E_r dr - \int_{r=c}^b E_r dr - \int_{r=b}^a E_r dr - \int_{r=a}^r E_r dr \\
 &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \int_{r=a}^r 0 dr \\
 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c}
 \end{aligned}$$

よって、まとめると、

$$V = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} & (0 \leq r < a) \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} & (a \leq r < b) \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} & (b \leq r < c) \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} & (c \leq r) \end{cases}$$



Q1, Q2 > 0 のとき

16'. 2階常微分方程式 $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ を求めよ。ただし、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で定義され、 $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ とする。

【解答】

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

$$\frac{df}{dx} = C_1$$

$$f(x) = C_1 x + C_0$$

$$\begin{cases} f(0) = C_0 = 1 & \Rightarrow C_0 = 1 \\ f(1) = C_1 + C_0 = 3 & \Rightarrow C_1 = 2 \end{cases}$$

よって、

$$f(x) = 2x + 1$$

■

21. 原点からの距離 r にある電荷密度が a/r^2 [C/m³]で与えられる空間の電位分布を求めよ。

ただし、 a は定数である。

【解答】

対称性から距離 r の球面上の電界は放射方向を向き大きさはどこでも等しい。よってガウス

の法則から、 $4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \frac{a}{r'^2} dr' \rightarrow E = \frac{a}{\epsilon_0 r}$ 。よって、 $r=1$ を電位の基準とすると、

$$V(r) = -\int_1^r E(r') dr' = -\frac{a}{\epsilon_0} \int_1^r \frac{1}{r'} dr' = -\frac{a}{\epsilon_0} \ln(r)$$

【別解】

球座標でポアソン方程式を解く。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{a}{\epsilon_0 r^2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{a}{\epsilon_0} \rightarrow r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{a}{\epsilon_0} r + C_1 \quad \cdots (*)$$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{a}{\epsilon_0 r} + \frac{C_1}{r^2} \rightarrow V = -\frac{a}{\epsilon_0} \ln r - \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$V|_{r=1} = -C_1 + C_2 = 0 \text{ より、} C_2 = C_1;$$

ガウスの法則 $4\pi r^2 \mathbf{E} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{s_0} d\mathbf{v}$ において、 $r \rightarrow 0$ とすると右辺は0となるので

$$4\pi r^2 \mathbf{E} = -4\pi r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \rightarrow 0 \text{ (} r \rightarrow 0 \text{) でなければならない。これと上式(*)から } C_1 = 0$$

$$\therefore V = -\frac{a}{\epsilon_0} \ln r$$

■

25. $0 \leq x$ の空間に密度 $\rho [\text{C/m}^3]$ で電荷が一様に分布している。 $x=0$ の電界を0、電位を0としたときの空間の電位分布、電界分布をポアソンの方程式を解くことで求めよ。

【解答】

ポアソン方程式の解

(i) $x \geq 0$ について、

ポアソンの方程式は $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ であり、 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ だから

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} x + a$$

$$\phi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 + ax + b$$

(ii) $x < 0$ について、

ポアソンの方程式は $\nabla^2 \phi = 0$ であり、 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ だから

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = c$$

$$\phi = cx + d$$

境界条件を適用して未知定数を決定する

$x=0$ で電位 $\phi=0$ より、

$$\begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases}$$

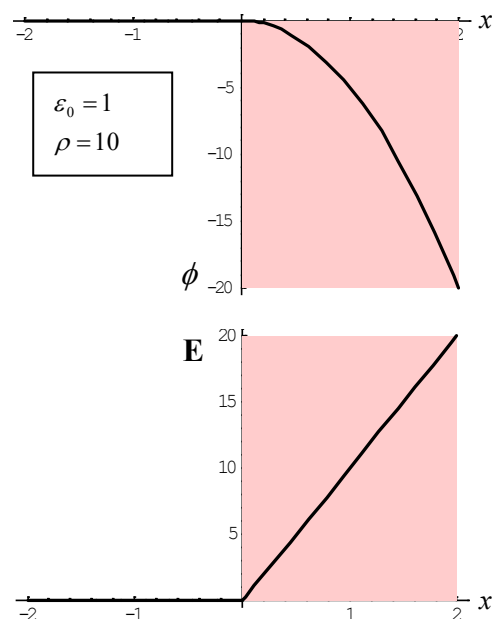
$x=0$ で電界 $\partial\phi/\partial x=0$ より、

$$\begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases}$$

よって、電位・電界分布は

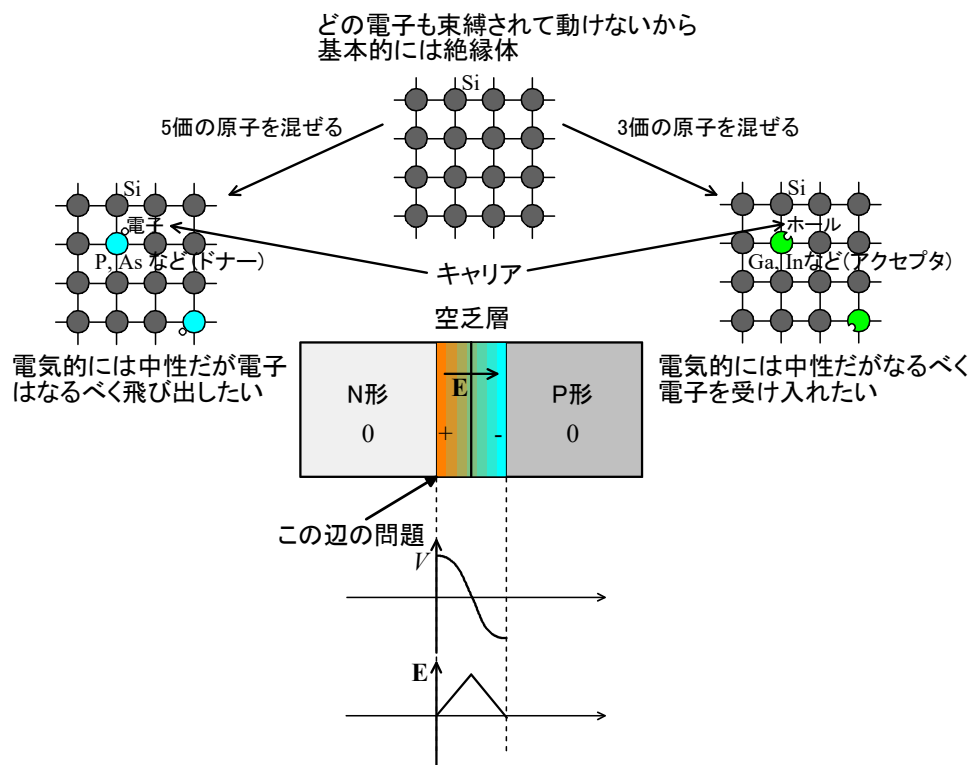
$$\text{電位: } \phi = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{電界: } E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$





コラム (PN 接合ダイオードの空乏層について)



この問題は、半導体工学でPN 接合ダイオードの空乏層の考察に使われる。実際には電荷密度は一樣ではないが、境界の近傍のみを考えれば一樣性の仮定は良い近似になっているはずである。一樣電荷密度分布では電位分布、電界分布がそれぞれ放物線、直線で表されることは半導体工学では基本知識として要求される。

■