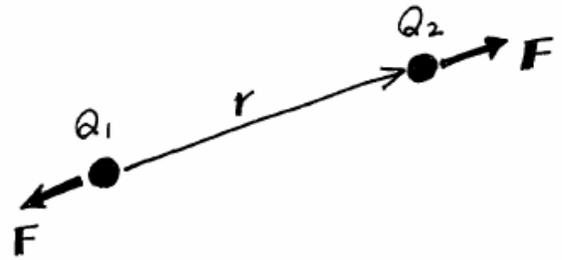


2章 静電界と電位

2.1 クーロンの法則

クーロンによる実験 (フランス 1785)

ねじれ秤を発明し、これによって電荷の間にはたらく力を非常に精密に測定し、以下に説明するクーロンの法則を発見した。電磁気学の内容はすべて、この法則をもとに成り立っている。



点電荷の間にはたらく力

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1) \quad \text{クーロンの法則}$$

Q_1 と Q_2 は電荷 (電気量)。つまり、力は2電荷の積に比例し、電荷間隔の2乗に逆比例する。力の方向は、正電荷と負電荷の間の力は引力、両方とも正電荷または両方とも負電荷なら斥力。これらを全部 上式であらわすために、 Q_1 と Q_2 には符号も含める。

上式の力は、第3の電荷 Q_3 を置いても変わらない。 Q_3 と Q_1 の間および Q_3 と Q_2 の間の力は新しく発生するが、 Q_1 と Q_2 の間の力は (それらの位置が変化しない限り) Q_3 の存在によって変わることはない。つまり、2電荷間の力は、それぞれ独立に成り立っている。これは、あとで電界を考えると重要。

右辺の最初にある $1/(4\pi\epsilon_0)$ は比例定数。ただ単に一文字だけの比例定数で書いてもよいのだが (クーロンのもともとの式はそうなっている)、あとで便利になるのでこのようにおく。 ϵ_0 は真空の誘電率とよばれる。

単位について

$$F[\text{N}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0[\text{F/m}]} \frac{Q_1[\text{C}]Q_2[\text{C}]}{r[\text{m}]^2} \quad (2)$$

電荷の単位をクーロン[C]とし、MKS 単位系で力がニュートン[N]になるように比例係数を調整する。このようにすると、 ϵ_0 の単位は $[\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]$ となるが、これを通常 $[\text{F/m}]$ (ファラッド/メートル) と書く。 ϵ_0 の実際の値は $8.852 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$ (= $8.852 [\text{pF/m}]$)。ピコファラッドで表しておくとも実用上便利。

余談をいくつか

- 電気現象の最初の発見は摩擦電気の発生であった。最初は琥珀を摩擦して埃がひきつけられる性質に注目するところから始まったらしい。ギリシャ語の琥珀という言葉が変化して英語の電気 (electricity) になったということである。
摩擦電気の研究から始まって、電荷というものが存在すること、そしてそれが移動するということを認識するまでも長い歴史があったに違いないが、それらはここでは一切省略した。
- 電荷は究極的には電子と陽子であるが、どちらを正、どちらを負にするかは、全く定義の問題であって、たまたま電子が負電荷、陽子が正電荷と定義されたに過ぎない。ついであるが、電流は電荷の流れであるが、方向を正負どちらの電荷の流れの方向とするかということも単に定義の問題である。電流を定義したのはフランクリンであるが、正か負か確率 1/2 で将来のための定義を行ったことになる。しかし、当時、電子は発見されていなかった。現在、電流と電子の流れの方向は逆である。確率 1/2 は不便な方向にはずれた。(アイザック・アシモフのエッセイより)
- クーロンの法則が距離の逆 2 乗になっているのは実験結果であることに注意する必要がある。ちょうど 2 乗ならばきれいな式なので、そうあるべきと思ってしまうそうであるが、あくまでも実験事実にしたがうべきであり、実験の精度の範囲内で 2 乗になっているにすぎない (2.0001 乗かもしれない)。しかし、ここでは、正確に 2 乗であると仮定して先へ進む。だんだん述べていくように、このあとの法則はすべて正確に 2 乗であることを元にしており、少しでも異なると大幅な変更が生じる。このように電磁気学は実験を基に成立している。これは数学と全く異なる点である。たとえば、ピタゴラスの定理は千年後も疑いなく正しいが、クーロンの法則は実験精度が上がれば変更されるかもしれないという恐れを常に含んでいる。少なくとも $2 + \delta$ ($|\delta| < 10^{-9}$) 乗というかなり高精度で成り立ってはいるが。

2.2 電界

クーロンの法則の式(1)を次のように書き変える。

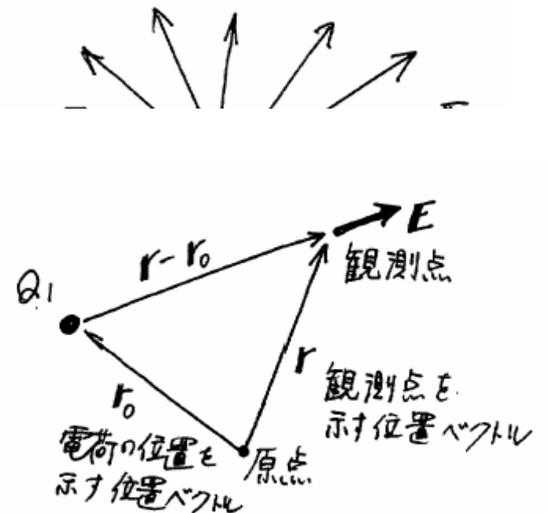
$$\mathbf{F} = Q_2 \times \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^3} \mathbf{r} \right) \equiv Q_2 \times \mathbf{E} \quad \text{ただし} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

第 1 回の資料で説明したように、この式に書き換えたとき、界という考え方を取り入れている。すなわち \mathbf{E} は点電荷 Q_1 のつくる界「静電界」を表しており、それを Q_2 が感知して力が発生したということを示す式である。

空間に界(場)が発生して、それを介して力がはたらくという考えを「近達作用論」または「近接作用論」とよぶ。これに対して力は 2 つの物体の間だけのやりとりであるとする考えを「遠達作用論」または「遠隔作用論」とよぶ。これらは単に考え方の違いというだけではなく、電磁波のように界が空間を伝搬することから、近接作用が物理として正しい。

電界の定義を簡単に言うとき、+1 クーロンの電荷にはたらく力という言い方をすることがある。もちろんこの定義は正しいが、電界は以上のように近接作用の考えを経て生まれた概念である。

上式は Q_1 を原点においた場合であるが、 Q_1 が原点になく位置



ベクトル \mathbf{r}_0 で表される位置にあるときには、位置 \mathbf{r} における電界は (右図)、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (4)$$

式(4)を直角座標で表すと

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z) = iE_x(x, y, z) + jE_y(x, y, z) + kE_z(x, y, z) \quad (5)$$

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 (x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 (y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \\ E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 (z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (6)$$

電荷の集合による電界分布

電界の合計

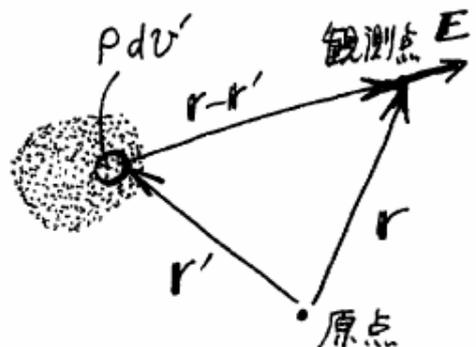
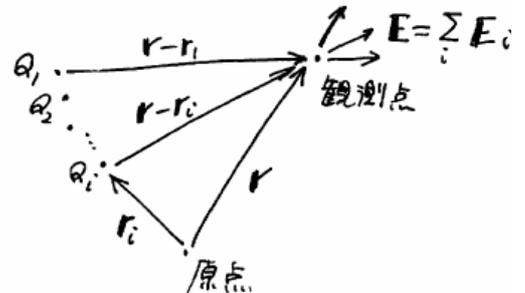
たくさんの点電荷が存在する場合、位置 \mathbf{r}_i における電荷を Q_i とすると、電界は全電荷からの合計 (ベクトル和) となり (右図、重ね合わせという)、式(4)から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (7)$$

存在している電荷が点電荷の集まりではなく、空間に連続的に分布している場合は、位置 \mathbf{r} における単位体積あたりの電荷密度を $\rho(\mathbf{r})$ とすれば、位置 \mathbf{r}_i にある微小体積 dv_i の電荷は $\rho(\mathbf{r}_i)dv_i$ なので、式(7)で $Q_i = \rho(\mathbf{r}_i)dv_i$ とおき、和を積分に換えれば

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_{\text{全空間}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (8)$$

ただし、 \mathbf{r}_i と dv_i を \mathbf{r}' と dv' に書き換えた。



計算例

以下は上式の計算例。

やや面倒な計算もあるが、あとでガウスの法則を使った結果と比較できるものを選んだ。

① 2つの点電荷による電界分布

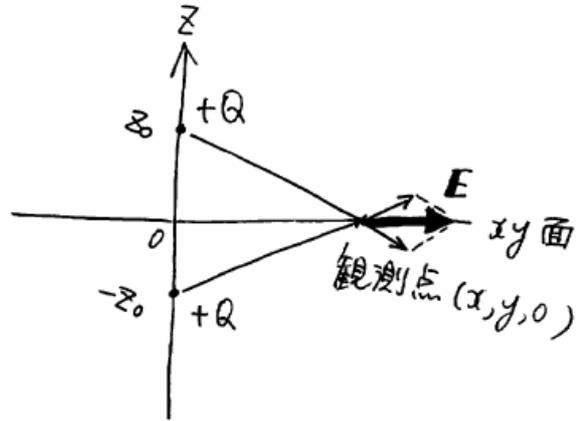
座標 $(0, 0, z_0)$ と $(0, 0, -z_0)$ のそれぞれに電荷 $+Q$ がある場合(右図)、 xy 面内の任意の点 $(x, y, 0)$ における電界を求める。

式(7)の各成分に式(6)を用いて

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_y(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_z(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

xy 面内では電界ベクトルは z 軸に垂直に放射状に出ていることが上式から得られる。

もちろん、図から合成ベクトルを求めてもすぐにわかる。



② 線状に分布している電荷

z 軸上に単位長さあたり λ [C/m] で電荷が無限長の直線状に分布しているとき(右図)、 x 軸上の電界を求める。

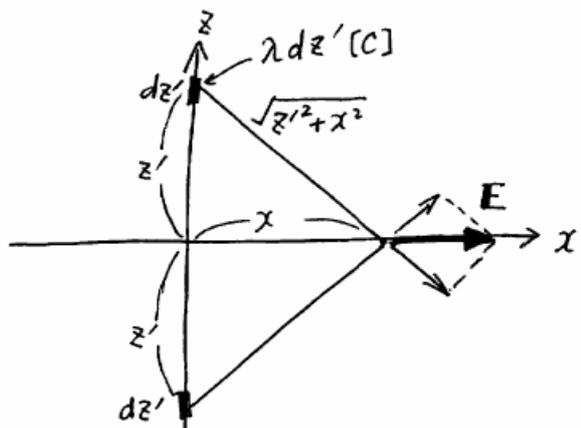
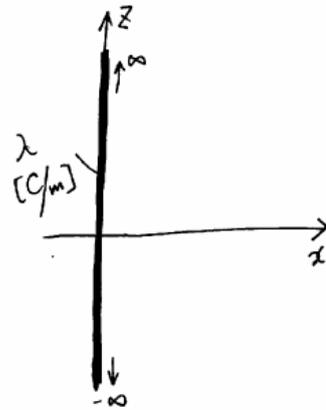
①の点電荷が密集したものだと考えれば、この結果が利用できる。式(9)で $y = 0$ (x 軸上) とおくと、 x 成分だけであることがわかる。

さらに、式(9)で $z_0 = z'$ および $Q = \lambda dz'$ と書き換えて z' について積分すれば

$$E_x(x, 0, 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz'}{(x^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (10)$$

(最後の項の答えを出すための面倒な積分計算は数学公式集を用いるのがよい。数学の講義ではないのでなるべく省力化を図る。)

x 軸上でなくても、 z 軸から垂直に距離 ρ の点の電界ベクトルは ρ 方向成分のみであり、大きさは $\lambda/(2\pi\epsilon_0\rho)$ となる。つまり軸対称である。



③ 面状に分布している電荷

yz 面上に単位面積あたり σ [C/m²] で電荷が無限平面状に分布しているとき (右図)、 x 軸上の電界を求める。

②の無限長直線電荷が密集したものだと考えれば、この結果が利用できる。

y 軸上の 2 点 $\pm y'$ を通り、 z 軸に平行な 2 つの直線状電荷 (線電荷密度 λ [C/m]) が x 軸上につくる電界ベクトルの合計は x 成分のみであり、②の結果から大きさは、

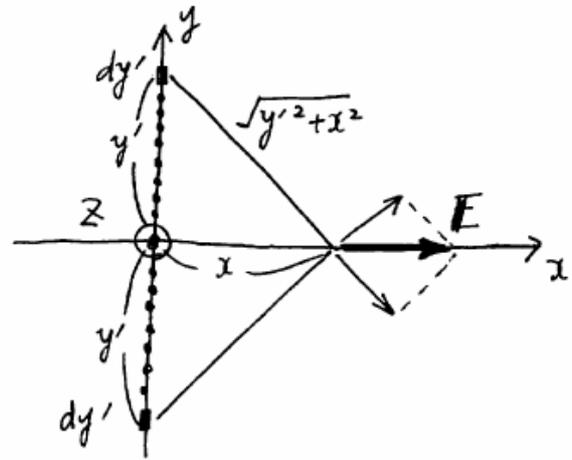
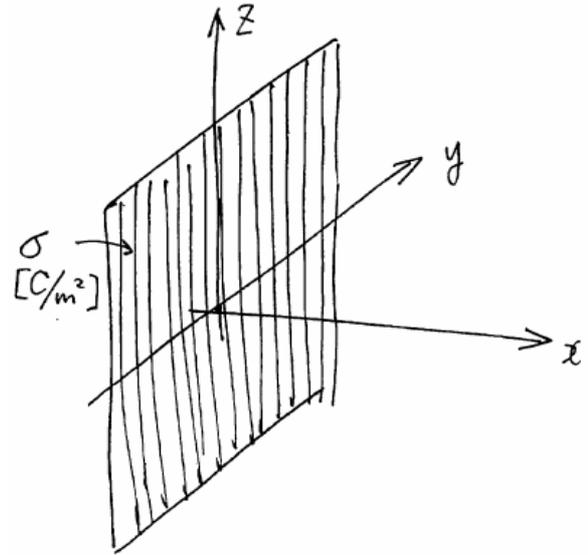
$$\begin{aligned} E_x(x, 0, 0) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(x^2 + y'^2)^{1/2}} \frac{x}{(x^2 + y'^2)^{1/2}} \times 2 \\ &= \frac{\lambda x}{\pi\epsilon_0(x^2 + y'^2)} \end{aligned} \quad (11)$$

$\lambda = \sigma dy'$ と書き換えて y' について積分すれば

$$E_x(x, 0, 0) = \int_0^\infty \frac{\sigma x}{\pi\epsilon_0(x^2 + y'^2)} dy' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (12)$$

x によらない (yz 面からの距離によらない) 一定電界という結果になる。

x 軸上でなくても、どの位置でも yz 面から垂直方向に大きさ $\sigma/(2\epsilon_0)$ の電界が発生している。対称性からこれは明らかである。



ガウスの法則

式(7)または(8)のように、電荷分布が与えられれば、上式により静電界は計算できる。しかし、一般的にはこれはベクトル計算であり (つまり方向あるいは成分に注意しながら加算していく必要がある)、複雑でめんどろな計算である。

電荷分布が対称性のよい形をしているとき (球対称や軸対称のとき) は、以下に説明するガウスの法則を使うと簡単な計算で電界分布が求められるのである。

ガウスの法則はクーロンの法則から導出される。つまり、クーロンの法則の一部である。後の回で、クーロンの法則から出てくるもう一つの性質 (静電界には渦がなく、電位というものが定義できるという性質。これによっても電界分布が簡単に計算できるようになる。) について説明する。クーロンの法則は、これとガウスの法則を合わせたものに置き換えられる。

ガウスの法則

空間の任意の閉曲面に対して、電界ベクトルを面積分した値は、その閉曲面内に含まれる電荷の合計を ϵ_0 で割った値に等しい（閉曲面に対して外向きを正とする）。

式による表現

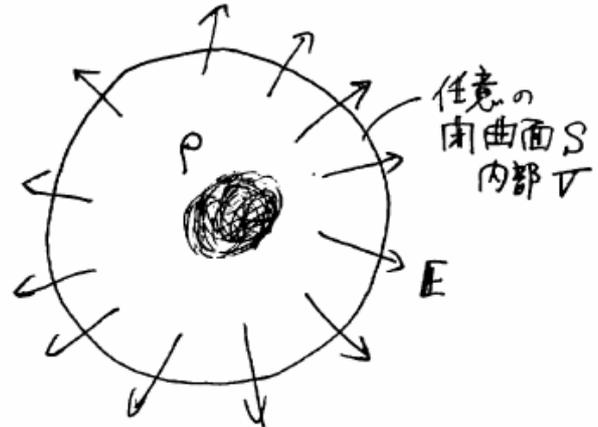
積分形式

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv \quad (13)$$

微分形式（空間の任意の点において）

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (14)$$

積分形式から微分形式の導出、およびその逆は前回説明したベクトル解析の中のガウスの発散定理（ガウスの法則と別）を用いて行うことができる。

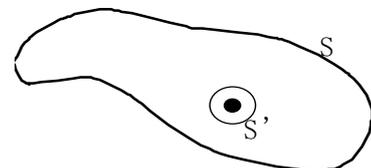
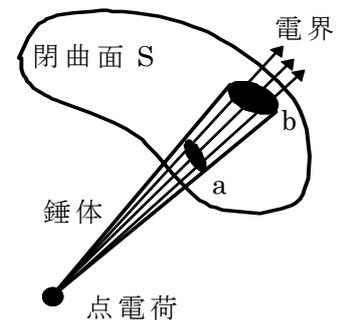


ガウスの法則の最も簡単な例は点電荷

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 \times E = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ が確かに成り立っている。}$$

クーロンの法則からガウスの法則の導出

まず、図のように閉曲面 S と、その外側に点電荷がある場合を考える。閉曲面 S は、点電荷を頂点とする錐体によって切りとられる微小面積 a および b の集まりと考える。一つのペア a, b を考える。 a と b は点電荷からの距離が異なる。 a は b より点電荷に近いから面積が小さい。しかし電界は強い。電界は点電荷からの距離の二乗に反比例し、面積は二乗に比例する。これより a から閉曲面内部に流れ込む電界 $\times a$ の面積と、 b から流れ出す電界 $\times b$ の面積はちょうど等しい。この関係はすべてのペアについて成立する。その結果、閉曲面 S 全体に流れ込む電界と流れ出す電界の総量は互いに等しく、閉曲面からの正味の流れ出しは零。これは閉曲面の外に点電荷がある場合である。



次に、閉曲面の内に点電荷がある場合を考える。電荷を中心として S 内におさまる球面 S' を作る。二つの曲面 S および S' で作られる体積内には電荷が無く、上で証明したように、この空間からの正味の電界の流れ出しは0。面 S' からの流出は、半径を r とすると $E = Q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ であり、球面の面積をかけて Q / ϵ_0 となる。これが S' から流入しそのまま S から流出する。結局、内部に電荷 Q を含む閉曲面 S からは、 Q / ϵ_0 だけの流れが出てくる。この結論は閉曲面 S の形や大きさには一切依らない。

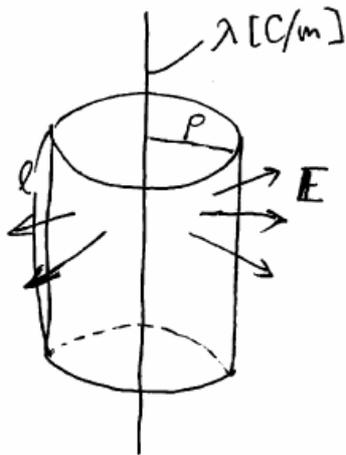
以上は、点電荷一つの場合。複数の点電荷が体積の内外にあるときには、重ね合わせの原理に基づいて、一つ一つの電荷について上の結論を適用すればよい。結果として、閉曲面 S の内部の電荷の合計を Q として、 Q / ϵ_0 だけ流れ出る。以上よりガウスの法則が成り立つ。

ここで、次の重要な点を指摘しておこう。

E が $1/r^2$ に比例することはクーロンによって得られた実験式である。上式ではこれに球の表面積 $4\pi r^2$ をかけてガウスの法則が確かめられた。表面積に含まれている r^2 は、数学で出てくるものなので、厳密に2乗である。したがって、クーロンの報告が正確にちょうど2乗に逆比例しなければガウスの法則は成り立たない。このことから、ガウスの法則から出てくる結論を実験で確かめれば、クーロンの法則が正確に逆2乘法則かどうか分かることになる。このような実験については後の講義で述べる。

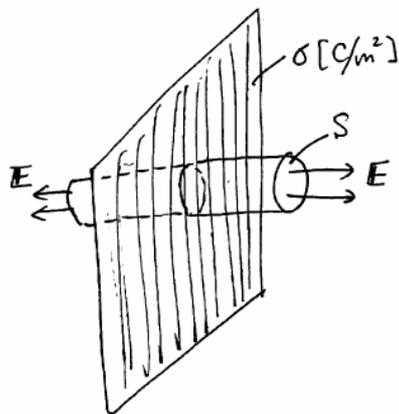
計算例

- 無限長線電荷分布



$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV \\ \uparrow & \qquad \qquad \uparrow \\ 2\pi r l E &= \frac{1}{\epsilon} \lambda l \\ \downarrow & \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \end{aligned}$$

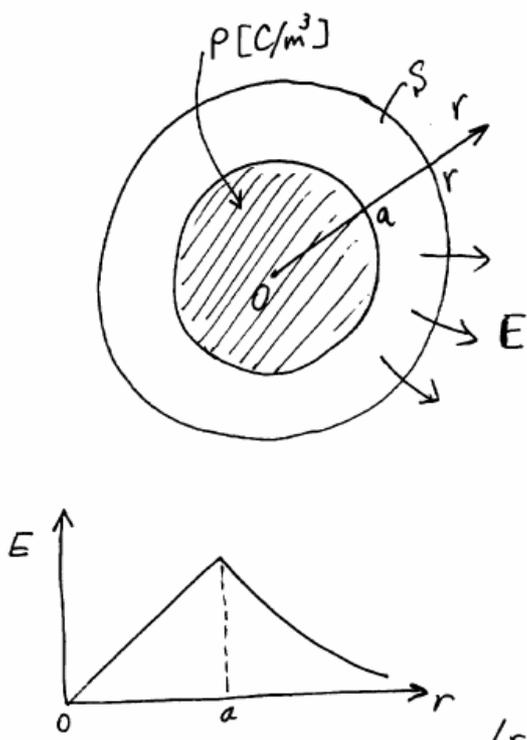
- 無限平面電荷分布



$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \\ \uparrow & \qquad \qquad \uparrow \\ ES \times 2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \\ \downarrow & \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

これらは、上述の各電荷からの電界を積分して求めた結果と確かに一致することがわかる。しかし、ガウスの法則を用いるほうがずっと簡単であることがわかる。

・ 球状電荷分布



$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

全電荷

$r > a$ のとき

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi a^3 \rho}{3} (= \frac{Q}{\epsilon_0})$$

$$E = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} (= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2})$$

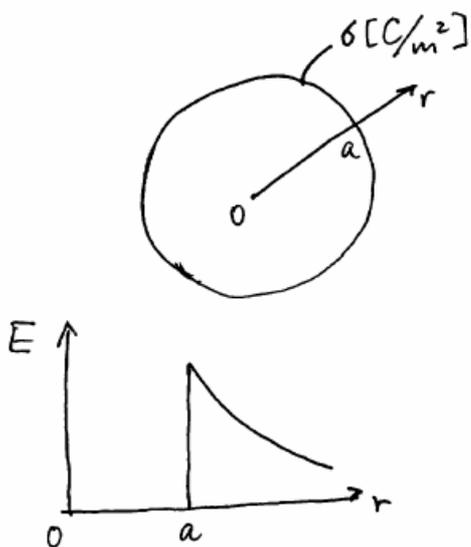
$r \leq a$ のとき

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r (= \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 a^3})$$

($r > a$ の E は全電荷が中心にある点電荷のときと同じ E に等しい)

・ 球殻(膜状)電荷分布



$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

全電荷

$r > a$ のとき

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma 4\pi a^2 (= \frac{Q}{\epsilon_0})$$

$$E = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} (= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2})$$

$r < a$ のとき

$$4\pi r^2 E = 0 \rightarrow E = 0$$

これらは前回の計算方法（重ね合わせ）では求めているが、もちろん計算できる。しかし、やはり面倒な計算であり、ガウスの法則を用いるほうがずっと簡単である。

以上の例が簡単に計算できるのは対称性のよい分布形状をしているからである。

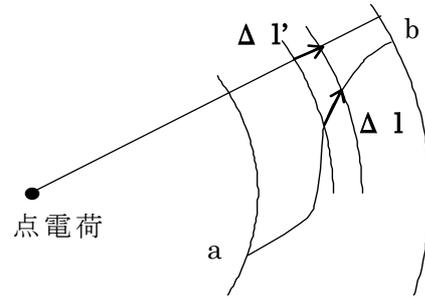
球の表面だけに電荷があるときは上述のように内部の電界は 0 になる。これは球に限らず、任意の閉曲面において成り立つ。これを実験で確かめることによりガウスの法則が（したがってクーロンの法則が）本当に正しいか確かめられる。詳しい説明は、第 3 章で行う。

2.3 保存界と電位

静電界の存在する空間において、任意の点 a から b まで経路 C に沿った電界の線積分

$$\int_{C(a \rightarrow b)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (15)$$

は経路 C をどのようにとっても同じ値になることを第 1 章で説明した。
 このような性質を持つ界を保存界とよぶ。
 つまり静電界は保存界である。



経路 C が閉ループの場合、すなわち a から b まで行き、 b から a に戻る場合（閉路積分）次式が成り立つことも説明した。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (16)$$

ストークスの定理（第 3 回資料参照）を使って微分で表現すると、空間の任意の点において

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0 \quad (17)$$

これがガウスの法則と並ぶ静電界の基本法則、つまり「静電界は保存界」である。

以上は点電荷一つの場合であった。電荷が多数存在するときには、重ね合わせの原理により、一つずつの電荷が作る電界はどれも閉ループでの線積分が零になる。全電荷が作る電界の閉ループでの線積分は零を加え合わせたものであり、やはり零である。結局、どんな静電界も閉ループでの線積分は零である。

静電界の基本方程式

ここまでの説明により、クーロンの法則から次の 2 つの式が得られた。

積分形では

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv \quad (\text{ガウスの法則}) \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{静電界は保存界}) \end{array} \right.$$

微分形では

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \text{curl } \mathbf{E} = 0 \end{array} \right.$$

クーロンの法則を使う代わりに、これら 2 つの式により静電界を表わすことができる。つまり、この 2 つの式が静電界の基本方程式となっている。

電位

静電界 \mathbf{E} の存在する空間に +1 クーロンの電荷を置くと、この電荷にはたらく力は \mathbf{E} であるから、上の説明で扱ってきた点 \mathbf{a} から \mathbf{b} までの電界の線積分に負号をつけた量

$$V_{ba} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (18)$$

は、+1 クーロンの電荷を点 \mathbf{a} から \mathbf{b} まで運んだときの仕事量（運び手が電荷に対してした仕事を正と考えている）になっている。この仕事量は、上の説明から、 \mathbf{a} から \mathbf{b} までの経路によらない。

式(16)~(17)と下記の(19)はすべて保存界の性質である（第1章参照）。

V_{ba} を \mathbf{b} 点の \mathbf{a} 点に対する電位差とよぶ。

\mathbf{a} 点は \mathbf{b} 点に対する電位の基準点である。 \mathbf{a} 点を無限遠の点とすることが多く、この場合 V_{ba} を単に V_b または \mathbf{b} 点の位置ベクトルが $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ならば $V(\mathbf{r})$ と書いて電位とよぶ。つまり、電位は無限遠点との電位差ということになる。（電界分布によっては、無限遠点を基準にできない場合もある。無限遠点から電荷を運んでくる仕事を計算すると無限大に発散してしまう場合である。この例は次回出てくる。）

電界と電位の関係を微分形式で書くと $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ (19)

簡単な例

- 最も簡単な例として点電荷の作る電位

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \mathbf{r}}{r^2} \quad \text{に対して} \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (20)$$

- 点電荷の集合（重ね合わせ）

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad \text{に対して}$$

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i V_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (21)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_{\text{全空間}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad \text{に対して}$$

$$V(\mathbf{r}) = \iiint_{\text{全空間}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (22)$$

次回、具体的ないくつかの例を説明する。

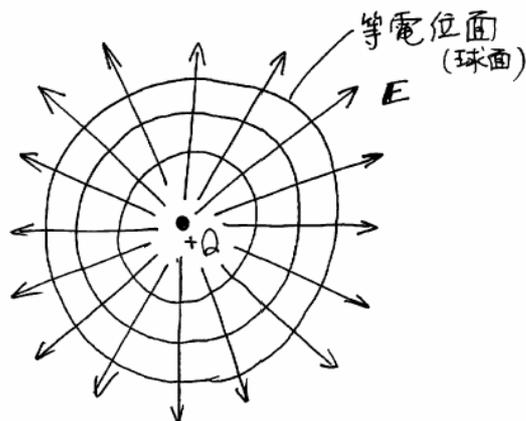
電位は何の役に立つのか

上のようにわざわざ電位というものを定義した。電界だけで電荷の作る界の性質は十分表わされるのに、なぜ、新しいものを持ち出してきたのか。

上で示した点電荷の集合の式を使って、これに答えることができる。電界を求めるとき、各電荷の作る電界を合計するわけであるが、これはベクトルの合計であるから、各成分（3つ）について計算しなければならない。ところが、電位の場合はスカラだから、合計は一つだけ計算すればよい。

つまり、電界を求めるとき、まず電位を求めてからその **gradient** を求める、という手順で計算すれば、計算量は少ない。

さらには、いつも電位で表わすだけにしてしまってもよく、電界はいつもその傾きからすぐ分かる。



電気力線と等電位面（点電荷）

電位の計算例

電位の例

- 無限長線電荷の作る電位

前回の資料から

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{i}_\rho \quad (\text{円筒座標で } \rho \text{ 方向})$$

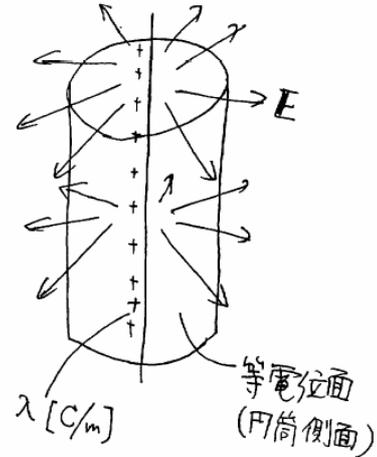
$\rho = \rho_0$ を基準とする ρ の点での電位

$$V = -\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

基準点 ρ_0 は、たとえば $\rho_0 = 1[\text{m}]$ など任意でよい。

しかし、無限遠点を基準にすることはできない。

$\rho_0 \rightarrow \infty$ とすると V が発散してしまうから。



これは線電荷が $-\infty$ から ∞ まで分布しているためである。このような線電荷分布を作るために無限遠点から点電荷を一つずつ運んでくると考えると、それに要する仕事には上式の V と同じ計算が出てきて、無限大に発散する。

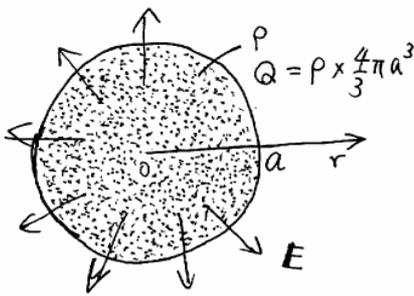
つまり、現実問題として、このような電荷分布はつくることはできないということである。しかし、有限であっても長い線電荷分布に対して、その中点付近の、長さより十分近い点では上式の V がよい近似で当てはまる。

前回の資料の無限平面状の電荷分布も同様である。(計算は簡単である。各自に任せる。)

電荷分布が無限まで広がっている場合はすべて同様で、無限遠点を基準にすることはできない。

電荷分布が、有限の空間に孤立していれば、電位の基準は無限遠点にとることができる。

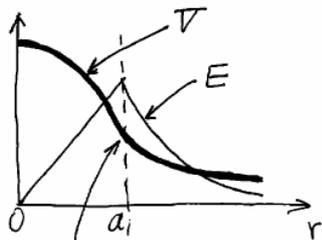
- 球状の電荷分布の作る電位



$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \geq a) \\ \frac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} & (r \leq a) \end{cases}$$

$$V = -\int_{\infty}^r E dr$$

$$\begin{cases} r \geq a & V = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r \leq a & V = -\left(\int_{\infty}^a + \int_a^r \right) E dr \\ & = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - a^2}{a^3} \end{cases}$$



V は仕事量なので連続

電気双極子

上述の例では、すでに得られていた電界分布に対して電位を計算した。しかし、前回説明したように、電荷分布から先にスカラーである電位分布を計算して、その勾配から電界分布を計算するほうが計算量は少ない。そもそも電位はそのことを考慮して定義されている。

ここでは、電位の便利さを用いる計算例として電気双極子の電位と電界を示す。

$(0, 0, a/2)$ と $(0, 0, -a/2)$ の 2 点に $\pm Q$ の電荷が置かれている場合の電位と電界の分布を求める。球座標 (r, θ, ϕ) で表したの観測点の電位は

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 [r - (a/2) \cos \theta]} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 [r + (a/2) \cos \theta]}$$

もし、原点（2 電荷の中央）から観測点までの距離が a に比べて非常に大きいとき（つまり、 $r \gg a$ のとき）上式は（ a に関してテイラー展開して一次までとる）、

$$V(r, \theta, \phi) \approx \frac{Qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (23)$$

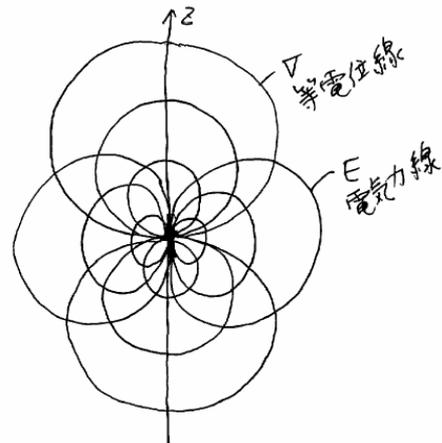
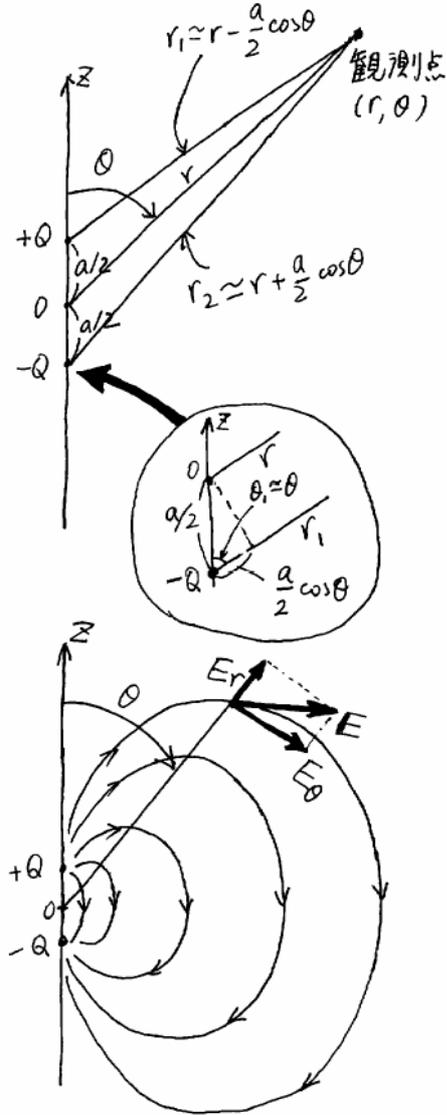
電界は球座標で $-\text{grad } V$ を計算して、

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Qa}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

このように電位を先に計算する方が、ベクトルとしての合計を考えないので簡単である。非常に接近している電荷 $\pm Q$ が遠方に作る電界は距離の 3 乗に逆比例することが分かる。

なお、 Q と a はいつも積になって出てくるので、 $p = Qa$ とおいて、 p を電気双極子モーメントとよぶ。大きさが p で $-Q$ から $+Q$ へ向かう方向のベクトルを電気双極子モーメントのベクトルとよぶ。

導体

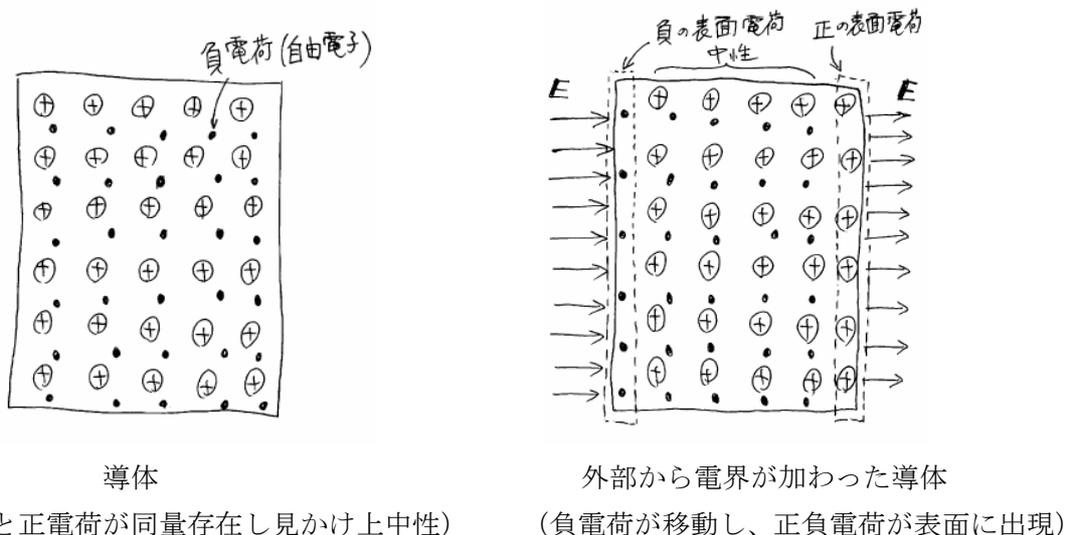


ここから導体を含めた静電界の話に進む。

金属が電気を通すことはもちろんよく知られている。金属内部には正の電荷と負の電荷が同じ量だけ分布しており、全体では中性になっているが、負の電荷（電子）は自由に移動できるので、これが電流となる。つまり電気を通す。

通常の金属は、負の電荷である電子が自由に移動できる（自由電子とよばれる）。半導体は、純度の高いものは絶縁体であるが、不純物を添加すると、自由に移動できる電荷ができて、電気を通すようになる。これら電気を通す材料を総称して導体とよんでいる。

半導体の場合も自由に移動するのは電子であるが、不純物によっては、見かけ上、正の電荷が自由に動いているような性質を示す場合もある。半導体のこのような性質は電子デバイスや集積回路などの発展につながっている話であるが、材料物性あるいは物性物理という分野の話なのでここではやらない。ともかくも、導体は全体では中性であり、中に自由に移動できる電荷があるということで先へ進む。



導体に外部から電界が加えられると（上図右側）、表面の近くの電子が力を受けて表面に現れる。電子が表面に移動してしまったところは正電荷が残り、電界が発生するので、これに他の電子が引き寄せられて移動する。この移動は導体内部に電界がある限り次々起こり、最終的には、反対側の表面が電子不足で正に帯電し、内部の電界は0になって時間的に一定になる。

結局、表面には正と負の電荷が現れ、内部の電界は0。

静電界が分布している場所に置かれた導体は、次のようになっている。

- (1) 導体内部の電界はすべて0、つまり導体内部はすべて同じ電位。
- (2) 導体表面の電界ベクトルは表面に垂直。

内部の電界が0なので電位も一定（ここまでが上記(1)）。したがって、内部から導体表面ぎりぎりまでが同電位であり、結局、導体表面の形に添って等電位面になっていることになる。電気力線は等電位面

に垂直なので、表面から出入りする電界は表面に垂直（ここまでが上記(2)）。

注1：内部の電子が全部表面に出てきて、内部に電子が全くなくなってしまうのではない。内部は正と負の電荷は同量存在して中性のまま。正と負の電荷が同じ分布をしていたところへ電界が加わり、負の電荷分布が全体にごくわずかだけずれて、表面だけに負と正の電荷分布ができる。

注2：表面の電荷とはいっても、全く厚さ0で分布するということはありえないので、非常に薄い厚さで分布している。この厚さは遮蔽長といわれるもので、どのようにして求めるかは物性物理学の範囲なのでやらない。電磁気の範囲では0としてよいほどに非常に薄いと扱う。

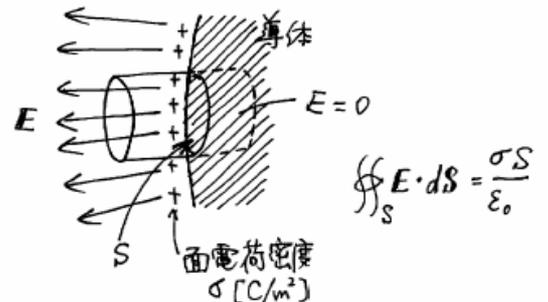
注3：静電界なので、時間的に一定になった最後の状態において内部の電界は0という話に限られる。これ以外でも、電子の移動がすばやくて電界の変化に追従できるなら、ほぼ瞬間的になりたつと考えるとよい。電子がすぐに追従できなくて導体内部に正電荷と負電荷のむらが一瞬できることもある。これは導体内の電子プラズマとよばれる。これも物性物理学の話。

導体表面の電荷密度

右図のように導体表面の微小面積を含む微小な体積を考えてガウスの法則を適用すると、表面の電荷密度 σ [C/m²] と電界の大きさの関係は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

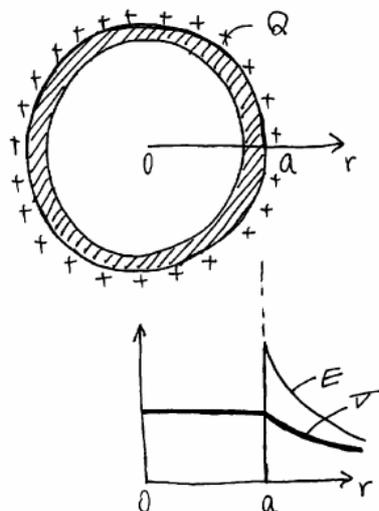
電界の方向は上記のように表面に垂直。



計算例

帯電した導体が置かれた空間の電界分布・電位分布

帯電した導体球殻（全電荷が +Q）。導体内はもちろん、球内部の空間も電界は0。また、内側表面には電荷は存在しない。



$$E \begin{cases} r \geq a & \oint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0} & E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ r \leq a & \oint_S E \cdot dS = 0 & E = 0 \end{cases}$$

$$V \begin{cases} r \geq a & V = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ r \leq a & V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (\text{一定}) \end{cases}$$

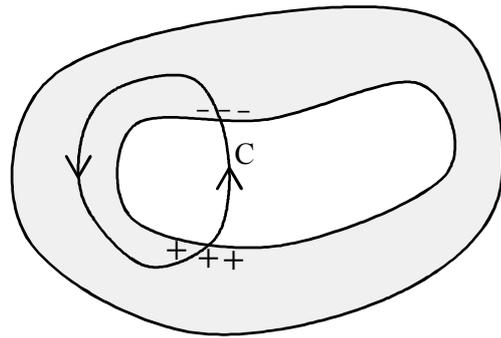
考えてみよう

任意形状帯電導体に囲まれた空洞内の静電界

図のように任意形状の導体とそれに囲まれた空洞（電荷は存在しない）がある。今導体に電荷を与えたとするとそれはどのように導体上に分布するであろうか？空洞内に電界は発生するか？導体が球殻となっているならば対称性により電荷は導体の外側表面に均一に分布し、空洞内に電界は存在しないことが理解できる（上記計算例）。では導体形状が任意ではどうか？この場合も電荷は導体の外側表面に分布し、空洞内に電界が存在しない。

さてこれはどう証明したらよいだろうか。ガウスの法則だけで証明できるだろうか。それともガウスの法則と渦無し法則と両方が必要だろうか。

（図にはヒントとして何か線が書き込まれている）（ファインマン物理学より）

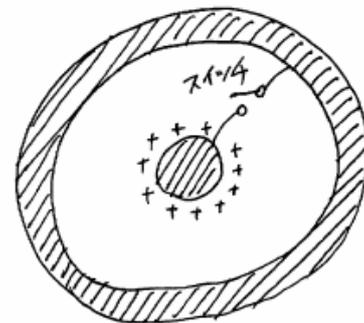


キャベンディッシュの実験 (1772)

上の空洞のある導体（球の場合および任意の場合）の例は、すべて、クーロンの法則をもとに出てきた結果である（ガウスの法則も渦無しの法則も、もともとクーロンの法則から）。しかも、ガウスの法則はクーロンの法則が精確に $1/r^2$ に比例しなければ（精確に2乗でなければ）成り立たない。

したがって、本当に内部に電界がないのか、あるいは内側表面に電荷が存在しないのか、ということ調べれば、 $1/r^2$ の2が完全に2なのかどうか分かることになる。

キャベンディッシュは右図の巧みな実験でこれを調べ、少なくとも測定限界までは確かに成り立っていることを見出した。



内導体を帯電し、閉殻の外導体で包んでから、スイッチをつないでまた切る。次に内導体を取り出して帯電しているかどうか調べる。

この実験を行ったのは、実はクーロンが、クーロンの法則を発表したのより早かった。それより前に自分で見つけていたことになる。しかしキャベンディッシュは公表しなかった（死後に遺稿から発見された）。この実験は、 $1/r^2$ が成り立つかどうかということ直接（たとえばグラフを書いたりして）調べるのではなく、電荷が0かそうでないかということ調べるという明瞭な話なので、精度が上がるのである。キャベンディッシュは球を舐めて帯電しているかどうか調べたらしい。現在では、もちろんもっと高精度の電荷検出が行える。原理はキャベンディッシュと同じ方法であるが $2 + \delta$ ($|\delta| < 10^{-9}$)までは成り立つことが確かめられている。

最新の実験では 10^{-13}

2.4 ラプラス・ポアソンの方程式

静電界の 2 つの基本方程式 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ (ガウスの法則) と $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$ (保存界) は電界に対する方程式であるが、これを電位を用いて表わしてみる。

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$ だから 2 番目の式は自動的に成り立っている。1 番目の式 (ガウスの法則) はこの式から

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\rho / \epsilon_0$$

または

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$$

これをポアソンの式という。電荷がない場合 (つまり右辺が 0 の場合) をラプラスの式という。

この式は、電界の 2 つの基本方程式と同じ内容を持っている。あるいはクーロンの法則と同じ内容を持っているともいえる。したがって、この式が静電界 (静電位) の基本方程式であるといってもよい。

▶ ラプラス・ポアソンの方程式の解の例

まず、比較的簡単な解法例を示す。

平行な 2 枚の平板導体の間の空間の電位と電界の分布

(1 次元問題、つまり y, z 方向は一様で方程式は 1 次元)

方程式は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

以下、電荷分布 ρ がいろいろな場合について、この式を解いてみよう。

- (1) 平行平板間には電荷がなく両端の電位差が与えられた場合の電位分布と電界分布

右図において

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq d)$$

($\rho = 0$ なのでラプラスの方程式)

2 回積分して

$$V(x) = C_1 x + C_2 \quad (C_1 \text{ と } C_2 \text{ は積分定数})$$

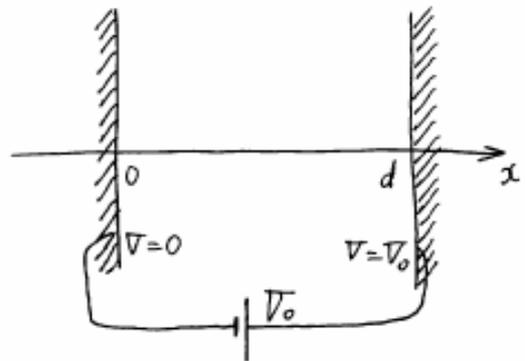
境界条件として電位差が与えられている。

すなわち

$$x = 0 \text{ で } V = 0$$

$$x = d \text{ で } V = V_0$$

これらを上式に代入して積分定数を求めると

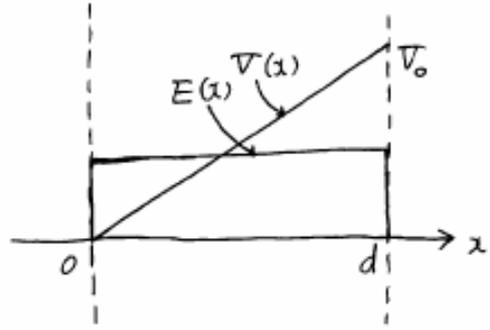


$$C_1 = V_0/d \quad \text{および} \quad C_2 = 0$$

したがって

$$V(x) = V_0 \frac{x}{d}$$

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{V_0}{d}$$



電位は直線的な分布、電界は一定（右図）。

また、電極表面の電荷密度（単位面積あたり）を σ とすると $E = -\sigma/\epsilon_0$ から $\sigma = (\epsilon_0/d)V_0$

2階の微分方程式なので、積分定数が2個出てきた。2個の積分定数は境界条件を2個与えることによって一意的に定められた。このようにラプラス・ポアソンの方程式は境界条件を定めると一意的に解が決まる。上の例では2個の境界条件は両端電極の電位であった。（電位差だけでもよい。その場合は定数を除いて同じ解になる。）

境界条件としては、このほかに、たとえば左側電極の電位と電界など、いろいろの与え方がある。ただし、与えすぎると、解は存在しなくなってしまうので注意が必要である。どのような境界条件を与えれば必要十分であるのか、については後述する。

(2) 平行平板間に一枚の電荷シート（面電荷密度 σ [C/m²]）がある場合の電位分布と電界分布

右図において

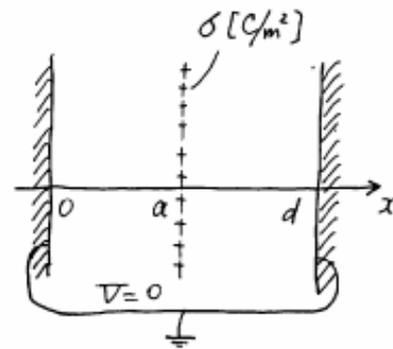
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq d, \quad x \neq a)$$

積分すれば

$$V(x) = A_1 x + A_2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$V(x) = B_1 x + B_2 \quad (a \leq x \leq d)$$

(A_1, A_2, B_1, B_2 は積分定数)



境界条件は

- $x = a$ において、 $V(x)$ が連続。このことから $A_1 a + A_2 = B_1 a + B_2$
- $x = a$ においてガウスの法則を適用すると(下図)、電界 $E = -\partial V / \partial x$ に対して

$$-\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=a-0} + \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=a+0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

このことから

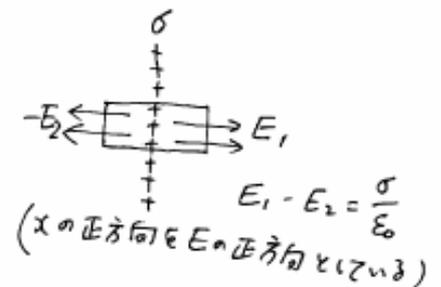
$$A_1 - B_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- $x = 0$ において $V = 0$ であるから

$$A_2 = 0$$

- $x = d$ において $V = 0$ であるから

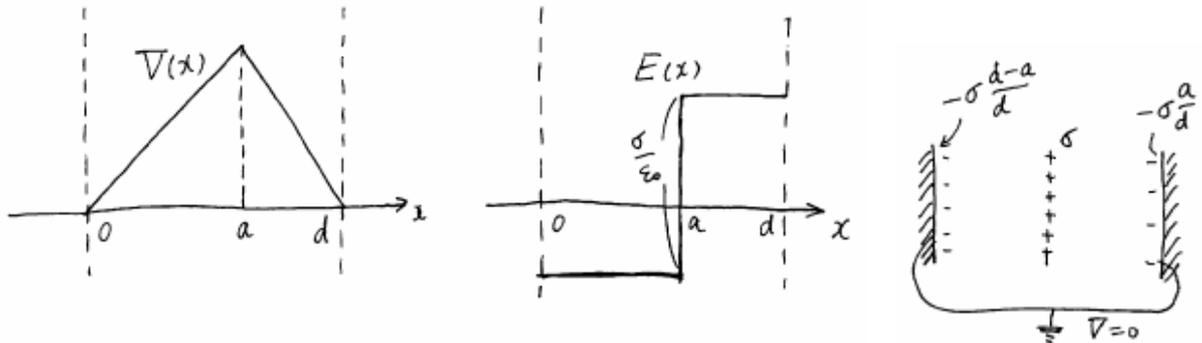
$$B_1 d + B_2 = 0$$



4つの積分定数に対して必要十分な数の式がこれで得られたので、これらから

$$A_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{d}\right), \quad A_2 = 0, \quad B_1 = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0 d}, \quad B_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

電位分布と電界分布は下図のようになる。



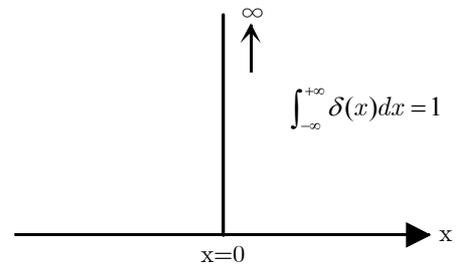
参考

上の例(2)では、電荷シートの左右ではラプラスの式 $\partial^2 V / \partial x^2 = 0$ が成り立っているが、ちょうど電荷シートの位置ではこれが成り立たないので、電荷シートの左右2つの領域に分けて解いてつなぐという方法をとった。

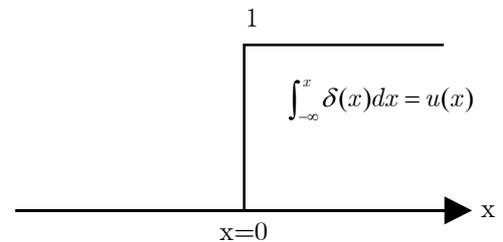
電荷シートの位置は特殊な点である。しかし、第3回の資料で説明した δ 関数を用いると、電荷シートまですべてを含めたポアソンの方程式が次のように書かれる。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \delta(x-a) \quad (0 \leq x \leq d)$$

この式を積分していけば、 δ 関数の積分がユニットステップ関数になることを利用して(第3回資料、および右図)、例(1)と全く同じ手順だけで上述の解が得られる。このように δ 関数を用いると、形式上一つの式で表すことができ、応用上便利なことが多い。



デルタ関数 $\delta(x)$



ユニットステップ関数 $u(x)$

(3) 任意の電荷密度の場合

平行平板間の電荷密度がどのような関数形であっても、与えられた電荷分布を一次元のポアソンの方程式に代入して積分し、与えられた境界条件を満たすように積分定数を定めれば、電位分布は求められる。

▶ ラプラス・ポアソンの方程式の一意性

ラプラス・ポアソンの方程式は、

- ・ 電荷分布
- ・ 境界条件 (境界表面の電位、または、表面に垂直な方向の電界)

が与えられれば、一意的に解ける。

(境界条件のうち、垂直方向の電界を与えるのは、境界表面の電荷密度を与えるのと同じ。

なぜなら、垂直電界成分と単位面積あたりの電荷密度の間に $E = \sigma / \epsilon_0$ が成り立つので。)

つまり、空間の電位分布はこれにより唯一に定まり、それ以外に (定数の差を除いて) 解はない。

この一意性は非常に重要である。なぜなら、これで安心して静電界を求めることができるようになったのであるから。もし、いくつも解があるとすれば、一つ求めてもそれで終わりにならない。一つだけしかないとする、ひとたび解が求められればそれが唯一の解であることになる。

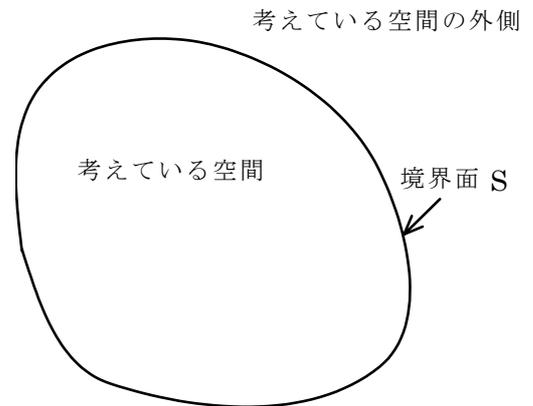
このことをうまく利用して、ラプラス・ポアソンの方程式を直接解かないでも電位分布を求めてしまう巧妙な解法がいくつか存在する。これらについても後述する。

解の一意性の証明

二つの電位分布 $V_1(\mathbf{r})$ 、 $V_2(\mathbf{r})$ が同じポアソン方程式を満たすと仮定してみる。すなわち、

$$\nabla^2 V_1 = -\rho / \epsilon_0, \quad \nabla^2 V_2 = -\rho / \epsilon_0$$

考えている空間は、例えば右図に示すように、境界面で囲まれている。全空間を考えているならば境界面を無限大半径の球とすればよい。



ここで、二つの分布の差として指定される電位分布、

$V(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r})$ の境界面 S での面積分 $\oint_S V \text{grad } V \cdot d\mathbf{S}$ を調べる。以下の面積積分はすべて境界面 S についての積分である。

ベクトル解析のガウスの定理を用いると、

$$\oint_S V \text{grad } V \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div}(V \text{grad } V) dv$$

体積積分は境界面で囲まれた空間、すなわち、考えている空間全体に渡る。

ところで、ベクトル解析の公式(教科書の p284 参照)を用いると、

$$\text{div}(V \text{grad } V) = \text{grad } V \cdot \text{grad } V + V \text{div}(\text{grad } V)$$

さらに、この式の第 2 項の中の因子に対して $\text{div}(\text{grad } V) = \nabla^2(V_1 - V_2) = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2$ 。最初に仮定し

たように、 V_1 と V_2 は同じポアソンの式を満たす電位（つまり同じ電荷分布 ρ による電位）なので、この因子は0になる。したがって、

$$\oint_S V \text{grad} V \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\text{grad} V)^2 dv$$

すなわち、

$$\oint_S (V_1 - V_2) \text{grad}(V_1 - V_2) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V [\text{grad}(V_1 - V_2)]^2 dv$$

次に、境界面上で電位について何らかの指定を行うことを考える。これが境界条件である。

次の二通りを考える。すなわち、境界上で、

(1) 電位を、または、

(2) 電位の垂直方向の傾き(電界の垂直方向成分)を、

指定することを考える。 ”指定する” のであるから、分布 $V_1(\mathbf{r})$ における値も、分布 $V_2(\mathbf{r})$ における値も指定された同じ値にするということであり、すなわち、相等しい。

(1) の場合には、境界面上で、 $(V_1 - V_2)$ が0である。(2) の場合には、境界面上で $\text{grad}(V_1 - V_2) \cdot d\mathbf{S}$ が0である。境界上の場所によって(1)の与え方と(2)の与え方とが混合していても構わない。境界上の至る所で(1)または(2)の方法で指定がなされていると、

$$\oint_S (V_1 - V_2) \text{grad}(V_1 - V_2) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

が成り立ち、上で得られた等式より、 $\iiint_V [\text{grad}(V_1 - V_2)]^2 dv = 0$ でなければならない。

さて、 $\iiint_V [\text{grad}(V_1 - V_2)]^2 dv = 0$ が成り立つためには積分領域内すなわち境界で囲まれた内部のいたるところで $\text{grad}(V_1 - V_2) = 0$ でなければならない。すなわち、 $V_1 - V_2 = \text{定数}$ でなければならない。よって二つの電位分布は定数を除いて一致しなければならない。

境界値問題

以上のように、ポアソン方程式を満足する電位分布は、(1)または(2)の境界条件を指定すると、一意的に決まることが証明された。逆に静電界を一意的に決めるためには、ポアソンの方程式は自然法則として必ず成り立つが、(1)または(2)の境界条件を指定しなければならないことが判明した。

(1)の境界条件を第一種の境界条件(またはディリクレの境界条件)、(2)の境界条件を第二種の境界条件(またはノイマンの境界条件)という。ひとつの問題に対して境界の各場所ごとに(1)と(2)が指定されることもある。ただし、境界の同じ場所に対しては(1)または(2)のどちらかを指定すればよく、両方同時に指定してしまうと、解が存在しなくなることもある。同時に指定する場合をコーシーの境界値問題という。また、境界の電位を V_s 、電界の垂直成分を E_n 、 a を定数(長さの次元)として $V_s + aE_n$ を指定するような(1)と(2)の中間的な条件もあり、これは第三種の境界条件という。

▶ ラプラス・ポアソンの方程式の一般解

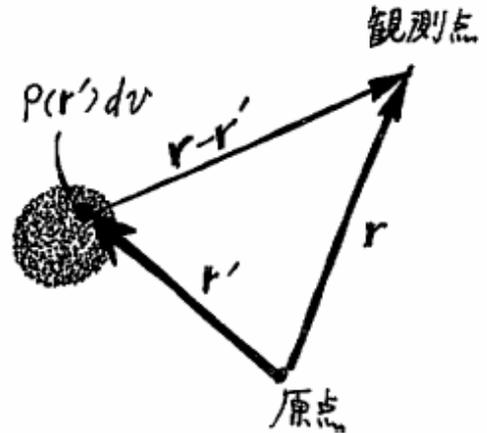
特殊解 境界のない場合

$$V(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv$$

これは、ポアソンの方程式の特殊解、つまり、境界がない場合の解である。

導出は省略する（後述の境界がある場合と同じ方法で導出できる）が、この解をポアソンの式に代入して計算してみると確かに成り立っていることがわかる。

この式は以前出てきた電位の重ね合わせの式に等しい。



一般解 境界のある場合（参考）

境界面が存在する場合の、ラプラス・ポアソンの方程式の形式的な一般解は

$$V(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv - \frac{1}{4\pi} \oint_S V(\mathbf{r}') \text{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{grad} V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}$$

ただし、第1項のVは境界内部、第2項と第3項のSは境界面、 $d\mathbf{S}$ は境界面外向き。 \mathbf{r}' は第1項では dv の位置、第2項と第3項では $d\mathbf{S}$ の位置を示すベクトル。積分中の grad は \mathbf{r}' を変数とみなす勾配。第1項は上で述べた特殊解である。第2項と第3項は斉次解とよばれる項で、 $\rho=0$ における解、つまり、ラプラスの方程式の解である。このようにラプラス・ポアソンの方程式はいつも特殊解と斉次解の和として与えられる。

第2項は境界面での電位分布が与えられれば計算でき、また、第3項は境界面での電界分布（垂直成分）が与えられれば計算できる。これらはちょうど上述の境界条件（1）と（2）に対応している。ただし、これは、右辺にVと $\text{grad} V$ を同時に勝手に与えて計算すれば必ず解が得られるという意味ではなく、もし $V(\mathbf{r})$ が正しい解ならば右辺を計算すれば左辺になるということを表しているに過ぎない。上で説明した境界条件によれば、境界面でVと $\text{grad} V$ のどちらかが与えられれば内部のVは決定されるのであるから、両方を勝手に与えると、上式は成り立たない場合（つまり解とならない場合）もある。一般には境界上のVまたは $\text{grad} V$ の垂直成分のどちらかだけを与え、上式全体を積分方程式とみなして改めて解くということになる。これは結局、もとの微分方程式であるラプラス・ポアソンの方程式を直接解くのと同一ことになる。要するに、上式はそのまま公式的に解として使えるとは限らない。

しかし、もし、何か別の方法で、境界面上のVと $\text{grad} V$ がわかれば、そのときは、上の式から解が計算できる。つまり、この場合に限り、ラプラス・ポアソンの方程式を直接解かなくても、解が得られる。これが、後述する「直接には解かない方法」である。

一般解の導出 (参考)

このページと次のページはやや高度な内容であり、ごく参考程度に示したに過ぎない。とばしてもよい。

次の2つを用いて導出できる。

(1) スカラ関数 $\varphi = 1/r$ に対して

$$\text{grad}\varphi = -\mathbf{r}/r^3 \quad \text{および} \quad \nabla^2\varphi = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

(δ 関数の部分に関しては第3回資料参照。これは点電荷に対するポアソンの方程式である。)

(2) グリーンの第2公式 (第1章参照)

$$\oiint_S [\varphi \text{grad} V - V \text{grad} \varphi] \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V [\varphi \nabla^2 V - V \nabla^2 \varphi] dv$$

(1)において、変数を \mathbf{r} の代わりに \mathbf{r}' と書き、さらに原点を \mathbf{r} だけずらすと

$$\varphi = 1/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \quad \text{grad}\varphi = -(\mathbf{r}' - \mathbf{r})/|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 \quad \nabla^2\varphi = -4\pi\delta(x' - x)\delta(y' - y)\delta(z' - z)$$

これらを(2)の公式に代入すると

$$\text{左辺} \quad \oiint_S [\varphi \text{grad} V - V \text{grad} \varphi] \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{grad} V \cdot d\mathbf{S} - \oiint_S V \text{grad} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

(ただし $\text{grad}\varphi$ は計算せずに代入した式のままにした。)

$$\begin{aligned} \text{右辺} \quad \iiint_V [\varphi \nabla^2 V - V \nabla^2 \varphi] dv &= \iiint_V \left[\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nabla^2 V + 4\pi V \delta(x' - x)\delta(y' - y)\delta(z' - z) \right] dv \\ &= \iiint_V \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nabla^2 V dv + 4\pi V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

(最右辺第2項は δ 関数の定義(性質)を使った結果である。)

$$= \iiint_V \frac{-\rho/\varepsilon_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dv + 4\pi V(\mathbf{r})$$

(V を求めたいポテンシャルとして $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ とした。)

これらを等しいとおいて整理すれば、上述の一般解が得られる。

一般解の各項の意味

一般解の第1項は、すでに説明したように、境界がない場合に電荷密度 ρ のつくる電位を表している。それでは、第2項と第3項はどのような意味を持っているだろうか。

・第3項

$$\frac{1}{4\pi} \oiint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{grad} V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}$$

上式に含まれる $\text{grad} V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}$ は、境界表面の電界の垂直成分を E_n とすると $-E_n dS$ である。 E_n は、境界表面の電荷密度を σ とすると σ/ε_0 に等しい。

したがって、

$$\frac{1}{4\pi} \iint_s \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{grad}V(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS$$

第1項とくらべればわかるように、この式は、境界表面に、もとの電位分布（第1項）を打ち消すような電荷分布が存在するという式である。

・第2項

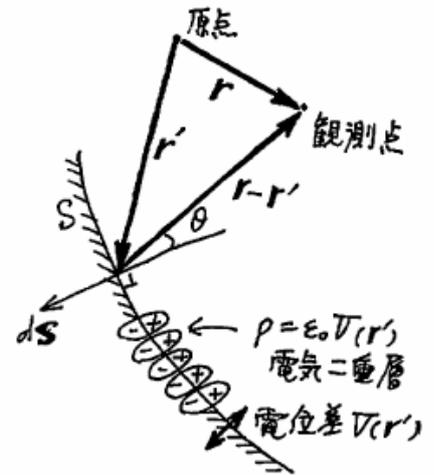
$$-\frac{1}{4\pi} \iint_s V(\mathbf{r}') \text{grad}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

$\text{grad}(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = -(\mathbf{r}'-\mathbf{r})/|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3$ (\mathbf{r}' に対する勾配) を

代入すると

$$\frac{1}{4\pi} \iint_s V(\mathbf{r}') \frac{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \frac{p(\mathbf{r}') \cos\theta}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dS$$

ただし、 $p(\mathbf{r}') = \epsilon_0 V(\mathbf{r}')$ であり、 θ は境界面の法線（内向き）と $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ のなす角（右図）。この式は、見かけ上、境界表面に分布した単位面積あたり p の電気双極子モーメントのつくる電位を積分したものになっている。



一次元のポアソンの方程式の解法例のところで示したように、間隔 d の平行電極間に電位差 V_0 を加えると、電極の表面に正負の電荷密度（単位面積あたり） $\sigma = (\epsilon_0/d)V_0$ が発生する。この式から、単位面積あたり σd の層状の電気双極子モーメントと電極間の電位差には $\sigma d = \epsilon_0 V_0$ の関係がある。これを上式と比べれば、一般解の第2項は、見かけ上、境界面に電位差 $V(\mathbf{r}')$ をもつ双極子モーメントの層ができていて（このような層を電気二重層という）、それが内部の空間につくる電位という意味を持っていることになる。

以上から、一般解の第2項と第3項は、以下のことと形式上同じである。

境界表面に電荷（電気一重層）と双極子モーメントの層（電気二重層）が存在し、前者は境界表面で電界を終端して境界外側の電界を0にし、また、後者は境界面内側と外側に電位差を与えて境界外側の電位を0にしている。前者が境界内部の空間につくる電位分布が一般解の第3項、後者のつくる電位分布が第2項となっているのである。

これはあくまでも形式上のことであって、実際の式には境界表面の電位や電界しか含まれていない。しかし、このような電荷分布をうまく見つけて、第2項と第3項をこれらによる電位に置き換えてしまってもよいということを示している。（このような電荷を等価電荷とよぶ。）

2. 5 ラプラス・ポアソンの方程式を直接には解かない解法

電位分布・電界分布の解法について

電位分布を求めるには、結局、ラプラス・ポアソンの方程式を解けばよいということになった。これは以上で述べてきたように、内部の電荷分布と境界条件を与えれば、原理的には解ける。また、電界分布は得られた電位の勾配を計算すればよい。一次元の場合は比較的簡単にこの方法で対処できた。

しかし、3次元の一般的な場合には、ラプラス・ポアソンの方程式を解くのは簡単ではない。3次元の場合でも、対称性のよい場合（球状や円筒状など）にはガウスの法則を使えば、簡単に電界分布が求められる。あるいは、ラプラス・ポアソンの方程式を使っても、対称性のよい場合には簡単に解くことができる。また、境界が無く電荷分布が与えられた場合には、ラプラスの方程式の特殊解はわかっているので、積分によって電位分布を得ることができる。

しかし、これらを使うことができない一般的な場合に対しては、それぞれの問題に対して工夫が必要となる。以下では、ラプラス・ポアソンの方程式を直接解かず電位分布を求める方法について説明する。

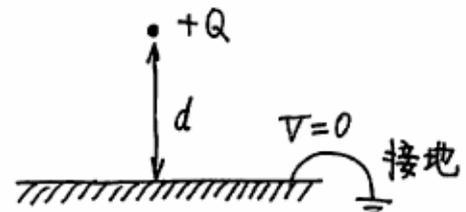
ラプラス・ポアソン方程式は、境界条件を与えれば、それを満たす解はただひとつ（定数を除いて）である。ということは、この方程式を直接解く代わりに、何か別の方法でもよいから、もし境界条件を満たす解が見つかれば、一意性によってそれが唯一の解であるから、解いたのと同じである。以下は、ポアソンの方程式を直接解く代わりに、境界条件を満たす解を求める巧みな方法の例である。

▶ 電気映像法

例を示しながら説明していこう。

無限平面導体とその上方に置かれた点電荷

接地*された無限平面導体から距離 d の位置に点電荷 $+Q$ が置かれたとき(右図)、平面導体上方の空間の電位や電界の分布はどうなるだろうか。また導体表面の電荷密度はどのように分布するだろうか。



*接地：電位が0で、電荷の出入りが自由な大地（大きな導体）に接触させること。接地した導体は電位が強制的に0になり、帯電も自由。

もし、ポアソンの方程式を直接解いて求めるとすると、無限平面導体の表面の電位が0という境界条件の下に導体上方の空間でのポアソン方程式を解く問題になる。

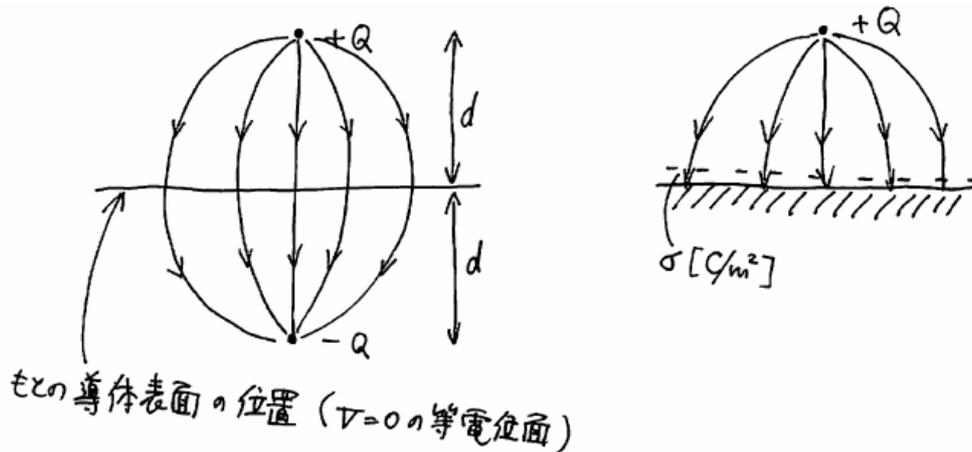
しかし、直接解かなくても、点電荷がこの位置にあるときに、導体表面（平面）の電位が0であるような電位分布が別の方法で見つかればそれが解。

それは、平面導体を取り去って、その代わりに平面導体の表面だったところから下方へ距離 d の位置

に点電荷 $-Q$ を置いたときの電位分布である（下図）。

このとき、導体表面だったところでは、電位は正負両電荷の電位の合計で確かに0であり、また、電界は面に垂直になっている（各自確かめること）。

したがって、導体表面より上方の空間では、この電位分布が求めたい電位分布に等しい。導体平面より下方は、もちろん、もとの状態と違うが、ここは境界より外側なので解く対象ではなく、どのような状態でもよい。



電気映像法

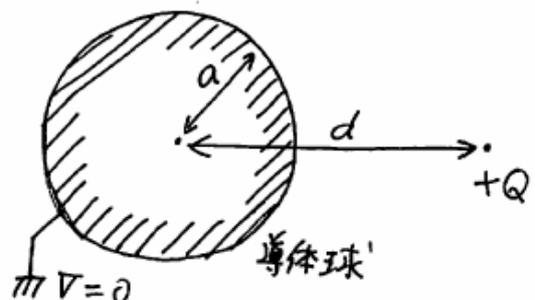
右図のうち、上半分が現実の電位分布

ようするに、導体表面を一定電位にするために、表面に対して下方の対称の位置に反対符号の映像電荷を考えて（導体は取り去り）、 $+Q$ と $-Q$ のつくる電位分布を求めれば、この上半分が求める解である。また、導体表面上の電荷密度 σ は、 $+Q$ と $-Q$ が導体表面だったところにつくる電界（垂直成分のみ） E を求めれば、 $\sigma = \epsilon_0 E$ により直ちに得られる。（負電荷であることも方向からすぐにわかる。）

ポイントは、導体表面だった位置が導体を取り去っても等電位面になっているように、境界より外側に新しく電荷を置くということである（一般的には、電荷はひとつだけとは限らない。点電荷とも限らない。）そのような電荷の配置が見つかれば、ポアソンの方程式を境界条件のもとに解かなくても、それらの電荷による電位分布、電荷分布が、境界の内側では解になっているのである。

導体球と点電荷

よく使われる映像法の例をもう一つ。半径 a の接地された導体球の中心から d の距離 ($a < d$) に点電荷 $+Q$ を置いたとき(右図)の電位分布はどのようなになるか。



この場合は導体表面が球面なので、等電位面（電位0）が球面になるような電荷を新たに置くことを考える必要がある。そこで以下のように、まず、間隔 f で置かれた正負の点電荷 $+Q$ と $-\alpha Q$ (α は定数)

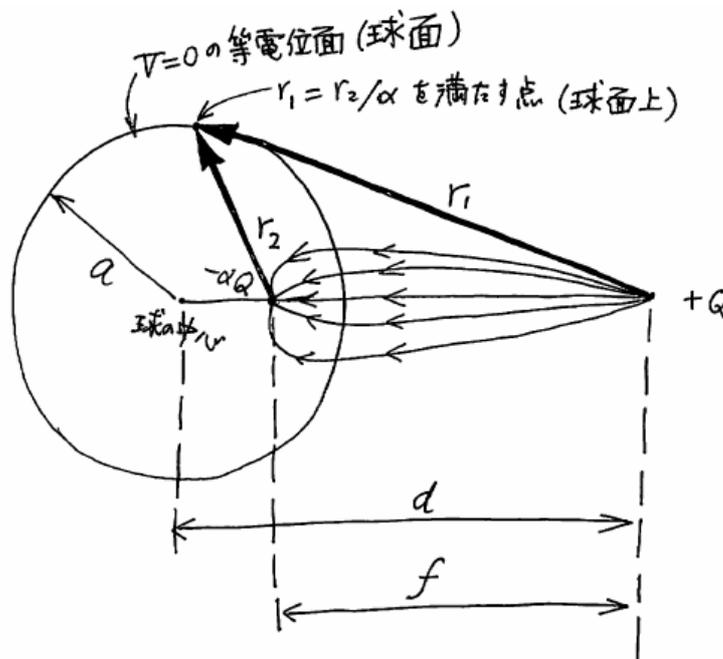
のつくる電位を考えてみる(下図)。

$+Q$ と $-\alpha Q$ からそれぞれ距離 r_1 と r_2 の点の電位は $V = Q/(4\pi\epsilon_0 r_1) - \alpha Q/(4\pi\epsilon_0 r_2)$ である。 $V = 0$ (接地)とすると $r_1 = r_2/\alpha$ が成り立つ。このような点は球面上にあり (ただし $r_1 > r_2$ すなわち $\alpha < 1$ とする)、この球の半径は $\alpha f/(1-\alpha^2)$ であり、球の中心は $+Q$ から $f/(1-\alpha^2)$ の距離にある (各自確かめよ)。

この結果を、いま解きたい問題に使うことができる。すなわち、等電位面を導体球の表面に一致させる。つまり、 $\alpha f/(1-\alpha^2) = a$ および $f/(1-\alpha^2) = d$ とすればよい。このとき $\alpha = a/d$ が得られる。また、球の中心と $-\alpha Q$ の位置は $\alpha^2 f/(1-\alpha^2)$ だけずれていることになる。

言い換えると、この問題では、導体球の代わりに映像電荷 $-\alpha Q$ ($\alpha = a/d$) を導体球の中心から $\alpha^2 f/(1-\alpha^2)$ だけ $+Q$ のほうにずれた位置におけば、導体球表面に一致する等電位面ができるのである。

導体球の外側の電位分布と電界分布は、このような位置にある $+Q$ と $-\alpha Q$ のつくるものと等しくなる。導体表面では確かに電界は表面に垂直である。もちろん導体内側は等電位で、これらのつくる電位分布とは異なる。表面の電荷の合計は $-\alpha Q$ である (ガウスの法則からすぐわかる)。



なお、 $a \ll d$ のときは (つまり導体球と $+Q$ が十分離れているときは) 映像電荷は球のほぼ中心におけばよい。

上の問題では導体球が接地されていたので、電荷は出入り自由で、そのために導体表面の全電荷の合計が0でない値になる (したがってひとつの点電荷 $-\alpha Q$ を置いて解くことができた)。もし、導体球が接地されていないならば、表面の電荷の合計は0でなければならない。このときは $-\alpha Q$ のほかに導体球の中心に $+\alpha Q$ をさらに置いてやればよい。この場合、接地されていないので導体球表面の電位はもちろん0ではないが、一定値になっている。

帯電していない

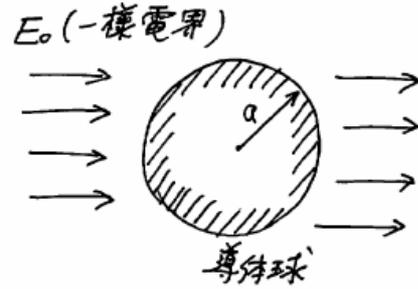
導体球と平行電界

平行で一様な電界の中に半径 a の導体球を置く (右図)、導体球表面に正負の電荷が誘起され (もちろん表面全体では合計は0)、これがつくる電界が平行電界に加わり、電界は乱される。この電界を求めてみよう。

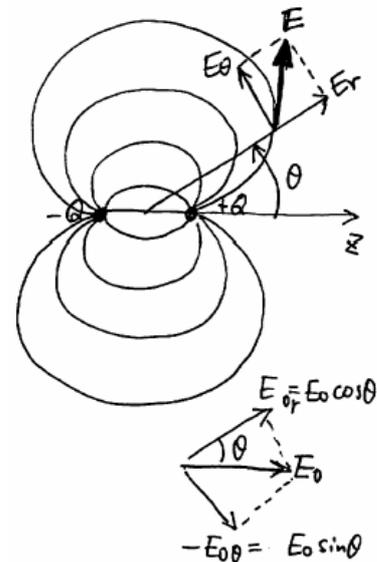
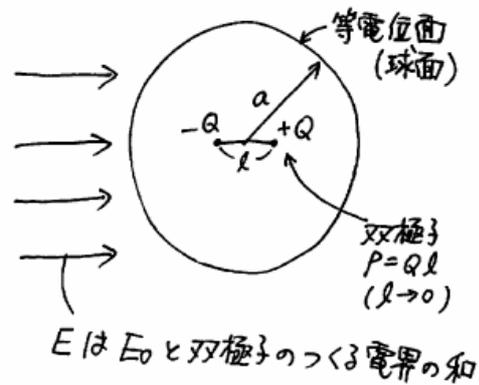
このときは、球の中心に以前説明した電気双極子をおけばよい (右図)。電気双極子は間隔 l の $\pm Q$ の電荷であり、 l は (a や中心から観測点までの距離に比べて) 非常に小さい。

以下に示すように、この電気双極子のつくる電界と平行電界の重ね合わせは、導体球表面では球の半径方向成分だけになり、導体球表面が等電位面になることが示される。

注：なぜ電気双極子を置けばよいことがわかるのか。解が最初から予想できているのでこう置いたと言われてしまえばそれまでで答えにならないが、もう少し納得できる答えとして、電気双極子のつくる電界のうちの球表面に平行な成分 (接線成分) の式 (以下で示す) が平行電界のこの方向の成分を打ち消しそうだと感じたといってもよいかもしれない。しかし、最初からこう置かないで解く方法もある。複雑なのでごく概略だけ述べると、球の中心に双極子、四重極子、八重極子、...すべてをおいたときに作られる電界の和は、可能な解すべてを含む一般解であることが数学的に証明できるので (球面調和関数という特殊関数が出てくるので省略)、この一般解の中から球の表面で境界条件を満たすものだけを選び出すと双極子による解だけが残る、ということになるのである。



↓ 電気映像



上図のように球座標を定めると、電気双極子のつくる電界は、以前説明したように (前回資料)

$$\begin{cases} r \text{ 方向} & E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^3} & 0 \\ \theta \text{ 方向} & E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi r^3} & 0 \end{cases}$$

ただし、 $p = Ql$ は電気双極子モーメントの大きさである。

外部から加えた平行電界は z 方向のみである (この大きさを E_0 とする) が、球座標成分で書くと、 r

方向成分 $E_{0r} = E_0 \cos \theta$ および θ 方向成分 $E_{0\theta} = -E_0 \sin \theta$ に分けられる (上図)。したがって、導体球の表面 ($r = a$) における接線方向 (θ 方向) の電界成分は

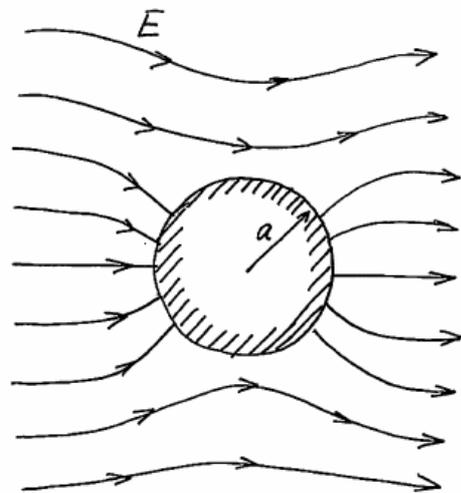
$$E_{0\theta} + E_{\theta} = -E_0 \sin \theta + \frac{p \sin \theta}{4\pi a^3} \quad 0$$

この式から、電気双極子モーメントの大きさを $p = 4\pi a^3 E_0$ とすれば、導体球表面の電界は表面に垂直方向の成分だけになり、導体球表面は等電位になることがわかる。

このような電気双極子を用いれば、導体球の外側の電界は、外部からの平行電界と電気双極子の作る電界の重ねあわせとして

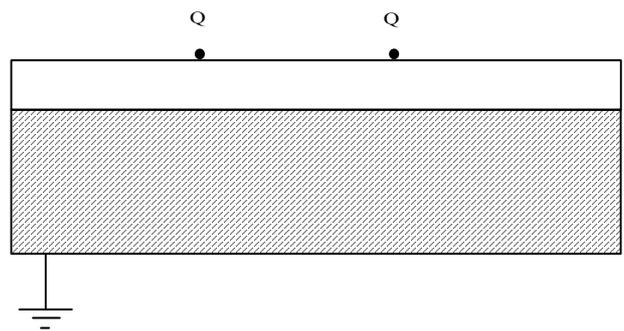
$$\left\{ \begin{array}{l} r \text{ 方向 } E_{0r} + E_r = E_0 \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ \theta \text{ 方向 } E_{0\theta} + E_{\theta} = E_0 \left(-1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{array} \right.$$

となる (概略右図)。



考えてみよう

二つの点電荷間の力について導体板を近づけるとどう変化するか調べよう。具体的に考えるために、小さな導体球が二つ、表面が滑らかな絶縁体 (図のハッチ無し部分) の上に置かれていて、それぞれ電荷 Q を帯電している。絶縁体の下に導体 (図のハッチ部分) がある場合と無い場合とで二つの導体球に働く反発力はどう変化するか、また、それはなぜか説明せよ。



▶ その他の解法

ラプラス・ポアソンの方程式を直接解かない方法には、電気映像法のほかに以も、等角写像法やグリーン関数法などがある。ただし、やや高度でもありここでは省略する。

2. 6 数値的解法

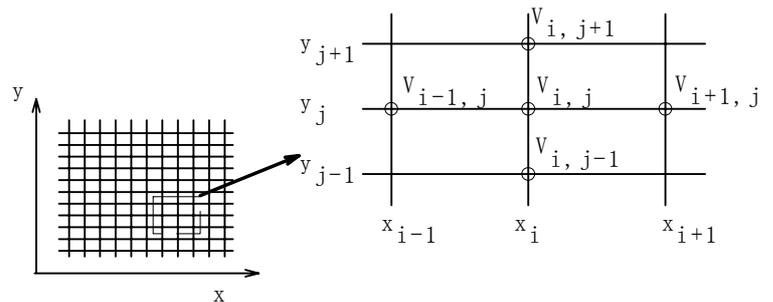
最後に、ラプラス・ポアソンの方程式を直接解く方法であるが、数値計算法について説明する。

実際に直面する問題では上のような単純な電極構造でないことが多い。そこでどんな形状の電極構造にも対応ができる数値計算法が有力である。ここでは数値計算法がどんな原理で、どんなことができるのか、簡単に述べることにしよう。

昔、コンピュータが今ほど便利ではなかった頃は、等角写像法などの数学を駆使し、好運にも解析的に取り扱える形状を見つけ、現実の形状に最も近いもので近似して問題を解決していた。今ではコンピュータのソフト(シミュレータ)を利用して任意の形状の静電界解析を任意の精度で行うことができるようになってきている。

シミュレータでは計算効率のよい有限要素法などが用いられるが、これは数値計算法の講義で扱うのでここでは話さない。ここではより簡単な差分法でラプラス方程式を解いてみる。ポアソン方程式に拡張することもできるが、各自で考える問題として残すことにしよう。

まず、二次元空間の電位分布 $V(x, y)$ に対するラプラス方程式を差分法で数値計算の原理を説明しよう。差分法では、空間を等分割で x 方向は Δx ごとに、 y 方向は Δy ごとに区切って、とびとびの格子点 (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, N$ および $j = 1, \dots, M$) での値 $V(x_i, y_j)$ だけを求める (右図)。



ラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

の左辺の微分は、差分法では次のように四則演算で近似される。

まず、関数 $f(x)$ のテーラー展開を2次まで行くと次のようになる。

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2$$

$+\Delta x$ を $-\Delta x$ にすれば $f(x - \Delta x)$ に対する式も得られ、これらから次式が成り立つ。

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) \approx 2f(x) + \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2$$

したがって

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

すなわち、微分を3つの点 $(x + \Delta x, x, x - \Delta x)$ での関数の値の四則演算で近似できた。

この関係を用いると次式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} \simeq \frac{V(x + \Delta x, y) - 2V(x, y) + V(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + \frac{V(x, y + \Delta y) - 2V(x, y) + V(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

したがって、上図の (x_i, y_i) 点（以下、単に (i, j) 点という）でのラプラスの方程式は

$$\frac{V(x_{i+1}, y_i) - 2V(x_i, y_i) + V(x_{i-1}, y_i)}{\Delta x^2} + \frac{V(x_i, y_{i+1}) - 2V(x_i, y_i) + V(x_i, y_{i-1})}{\Delta y^2} \simeq 0$$

である。いま、 $\Delta x = \Delta y$ として、 $V_{i,j} \equiv V(x_i, y_i)$ について解くと、

$$V_{i,j} \simeq \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}}{4}$$

この差分表現から、ラプラス方程式の解は「すべての点の電位は最近接4点の電位の平均値に等しくなっている」ことが分かった。逆にこのようになるように各点の値を選べばそれがラプラスの方程式の解になる。つまり、上式を領域内のすべての (i, j) 点に対して成り立つ連立方程式とみなして解けば、各点の $V_{i,j}$ が求められることになる。

このとき、境界では電位または垂直方向の電界の大きさがすでにわかっている（与えられている）と仮定していることに注意する必要がある。（なぜなら、すでに説明したように、ラプラスの方程式は境界条件を与えることにより解が定まるのであるから。）境界線上の電位が与えられている場合は、上式において境界線上の $V_{i,j}$ に対しては未知数とせず値を代入する。（垂直方向の電界が与えられている場合は工夫が必要。省略するが各自考えてみるとよい。）

このように、境界条件を与えて、境界内部の $V_{i,j}$ に対する連立差分方程式を解けば、電位分布が近似的に求められるのである。境界がどのような形でも、格子点がある上にくるようによく区切れば、必ず連立方程式の形に近似できる、つまり、解ける。格子点の間隔を細かくするほど近似の精度はあがる。しかし、コンピュータのメモリの必要量と計算時間も増えるので、場合に応じて決めることになる。

なお、上式の結論（すべての点で、電位は最近接4点の電位の平均値に等しい）は、数値解法で用いる以外に、後の回（静電的なエネルギーと力、アーンショウの定理の説明）でも用いる。

参考（表計算ソフトによる数値解法）

以上の数値的解法は、適当なプログラミング言語を用いて数値計算プログラムを作成すれば実際に行うことができるが、ここではイメージが掴みやすい表計算ソフトを用いる方法を説明しよう。

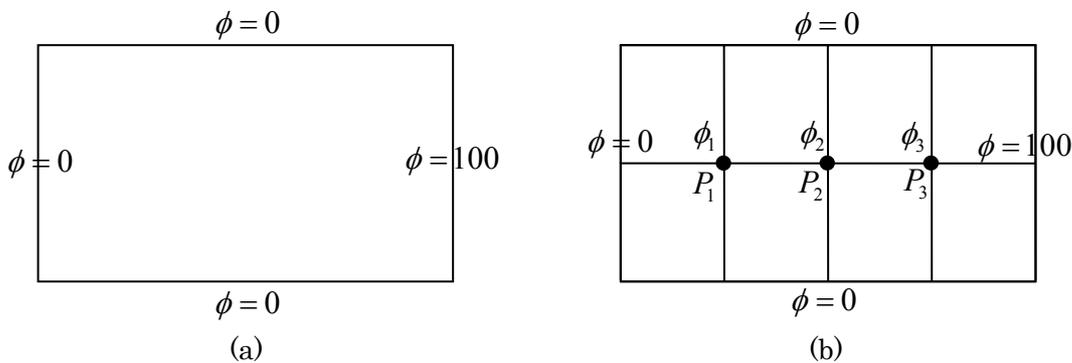
表計算ソフトはこのような作業を自動的に実行してくれる。縦横行列状に並べられたセル一つ一つに演算命令を割り当てる。すなわち、セルには、上隣、下隣、右隣および左隣の4つのセルの値の平均値を入れるものとする。このように、すべてのセルが共通の規則で値を決定する。この命令のセルへの埋め込み作業（これがコンピュータのプログラミングに相当する）は簡単に実行できる。それは一つのセルに規則を書き込み、これをすべてのセルに複製すればよい。演算規則の埋め込みが終わったら、表計算を実行する。表計算ソフトは自動的に1番目のセルから順に計算しすべてのセルの値を計算し終わる。1ラウンド計算が終了すると各セルの値は最初の値から変化する。計算を繰り返す。何ラウンドか計算していくと値が収束する。値を監視していて十分に収束したら計算を停止させる。このようにコンピュータで解を求める方法は上で解析的に式を導いてそれに値を代入する方法とは全く異なる興味深い方法である。セルの数を制限することとコンピュータの演算速度を上げることによりこのような試行錯誤

的な手法が実用になる。上の説明から分かるようにこの方法はプログラミングも極めて簡単である。

境界条件の入力は、電位指定された導体部分のセルには電位の固定値を入れる。一方、計算領域の一番外側のセルには、それが電位が指定されない場合には次のように値を決める。すなわち、実際には無いがそのセルの外側にもう一つのセルがあってその値は一つ内側のセルの値と同じ値であるとして計算した平均値を入れる。この決め方は一番外側の列あるいは行に関して対称分布を仮定することに対応する。対称分布ということは境界で微分係数が零になることを意味する。

数値解法の例

例 1

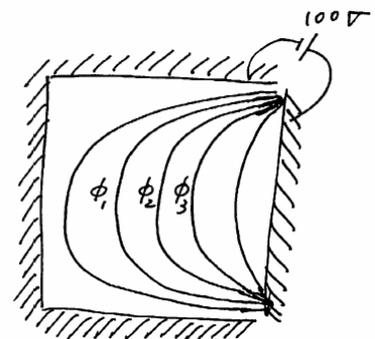


上図(a)のように右側の壁のみ 100V とし、その他の壁が 0V という境界条件が与えられているとき、内部の空間の電位分布 ϕ を数値計算で近似的に求めてみる。

上図(b)のようにメッシュ分割したとき、ある点の ϕ が周囲の 4 点の平均という上で得られた結論から

$$\begin{cases} \phi_2 - 4\phi_1 = 0 & (P_1) \\ \phi_1 + \phi_3 - 4\phi_2 = 0 & (P_2) \\ \phi_2 + 100 - 4\phi_3 = 0 & (P_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\phi_1 - \phi_2 = 0 & (P_1) \\ -\phi_1 + 4\phi_2 - \phi_3 = 0 & (P_2) \\ -\phi_2 + 4\phi_3 = 100 & (P_3) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.78571 \\ 7.14286 \\ 26.7857 \end{bmatrix}$$



実際の等電位線 (概略)

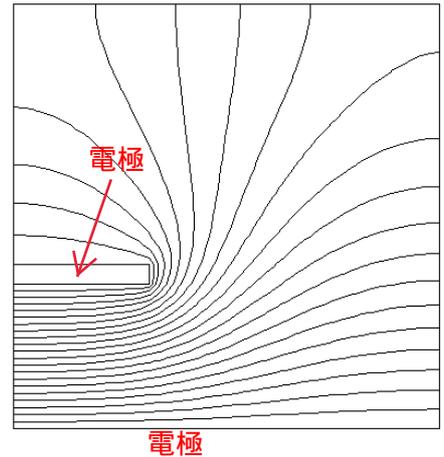
上の行列方程式の解法は Gauss の消去法、反復解法などを用いればよい。

ところで、上の行列は対称行列、かつ対角優位 (対角成分の絶対値が一番大きい) である。対称行列、かつ対角優位の行列は正定値行列 (すべての固有値は正) であり、数値的には非常に安定で解きやすい形である。

例 2

有限面積の平行平板電極間の電位分布を調べてみよう。解析解は面積が無限大の場合しか厳密には使えない。しかし、現実の問題では必ず面積は有限である。どんな違いが現れるのだろうか。

右図では、計算している領域（四角）の一番下の辺全体が設置電極であり、電極間に電圧を印加した場合の、等電位線が要ったの電位間隔で描かれている。この等電位線の分布から電気力線の様子を知ることができる。等電位線に直交する方向が電界ベクトルの方向であり、等電位線が密なところは電界の大きさが大きい。電極の端では等電位線がまがっている。電気力線が電極版の裏側（2つの電極が向かい合う面以外の面）にも届いていることがわかる。

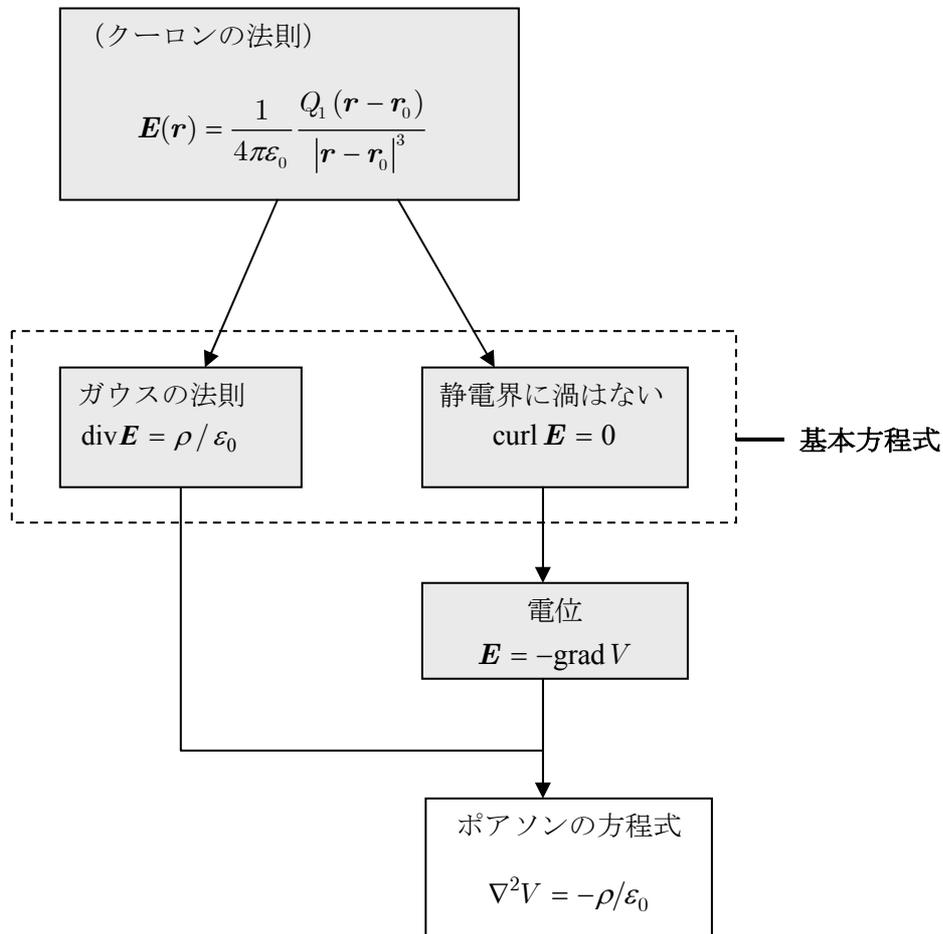


注意してみると、領域周辺で等電位線が不自然にカーブして等電位線が領域境界に垂直になっている。これは上に述べた領域境界での境界条件による。このような処理が所望部分の分布に影響を与えないようにするためには境界を所望部分から十分に離して電界が十分に小さくなるようにする。

考えてみよう

上ではラプラスの方程式の数値計算法を説明した。それではポアソンの方程式はどのようにしたら計算できるか考えてみよう。

まとめ



クーロンの法則から出発してこれまでの流れを示すと上図のようになる。すべてクーロンの法則というひとつの実験法則から出発しているが、これを2つの基本方程式で置き換えた。これらの方程式からポアソンの方程式を導出した。クーロンの法則、基本方程式、ポアソンの方程式はどれも同等である。

▶ ラプラス・ポアソンの方程式

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0$$

- ・ 基本方程式（電界に対する2つの式）あるいはクーロンの法則とおなじ内容を表わす式。
- ・ 境界条件（境界表面の電位または垂直方向の電界）が与えられれば、空間の電位分布は一意的に定まり、それ以外に（定数の差を除いて）解はない

▶ 電界・電位のいろいろな計算方法と例

- ・ ラプラス・ポアソンの方程式を直接解く例

対称性のよい場合（ガウスの法則を用いて解くのもよい）

一次元問題

境界のない場合 → 電荷分布の各電荷による電位の重ね合わせ

数値計算 → 各点の電位は最近接4点の電位の平均値として連立方程式を解く

- ・ ラプラス・ポアソンの方程式を直接には解かない例

電気映像法 → 与えられた境界条件（導体表面などの等電位面）の代わりに、境界外部に境界条件を満たすような電荷分布を置いて、それによる電位分布、電界分布を求めると、それが境界内部では解になる。

- これらはいずれも巧みな方法であるが、理解するにはもちろん演習で実際に解くのが一番よい。

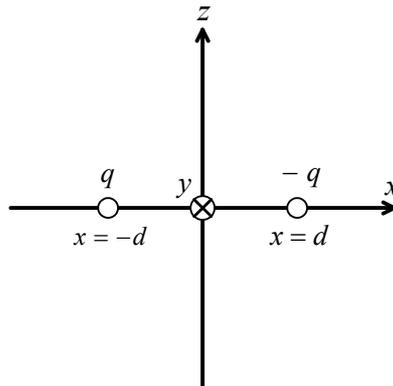
注：章末の演習問題では単位ベクトルの記号が、次のように本文と異なっている。

直角座標： $i, j, k \rightarrow \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
 円筒座標： $i_\rho, i_\phi, i_z \rightarrow \hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z}$
 球座標： $i_r, i_\theta, i_\phi \rightarrow \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$

演習問題

2-1 クーロン力の大きさが電荷間の距離の $2 + \delta$ 乗に反比例すると仮定した場合、点電荷 q を中心とする半径 a の球面を貫く全フラックス（電界の法線面積分）を求めよ。

2-2 図のように $x = +d$ の位置に電荷量 $-q$ の電荷が、 $x = -d$ の位置に電荷量 $+q$ の電荷が置かれている。 z 軸上の電界を求めよ。

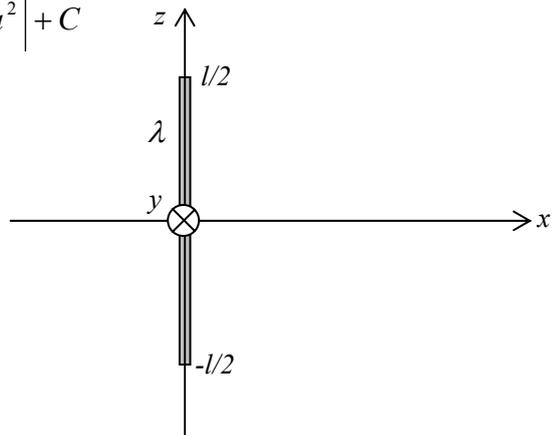


2-3 問題1-3のベクトル場 \mathbf{F} は保存界であるか、またはそうでないか理由とともに答えよ。

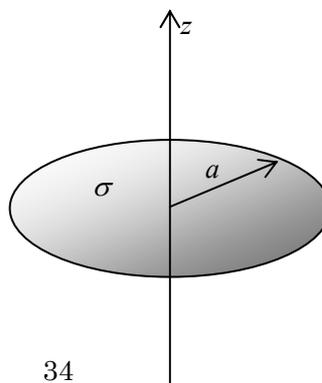
2-4 長さ l の直線状電荷があるとき、この直線状電荷の中点を通り、かつ垂直な面内の電位と電界を求めよ。ただし、線状電荷の線電荷密度は λ [C/m]とする。必要があれば

$$\text{公式 } \int (z^2 + a^2)^{-1/2} dz = \ln|z + \sqrt{z^2 + a^2}| + C$$

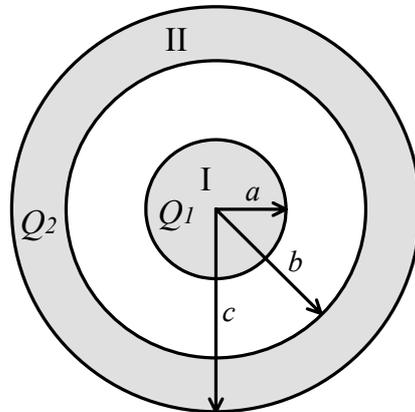
を用いて良い。



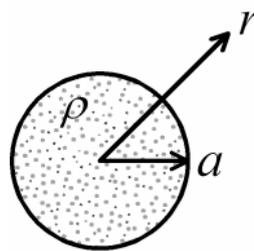
2-5 半径 a の薄い円板を面電荷密度 σ [C/m²]で一様に帯電させるとき、円板の軸上の点の電位及び電界の強さを求めよ。



2-6 図のように2つの同心導体球がある。内導体 I に電荷量 Q_1 を、外導体 II に電荷量 Q_2 を与えたとき、電界および電位を内導体 I の中心からの距離 r の関数として求めよ。ただし、無限遠の電位を基準とする。

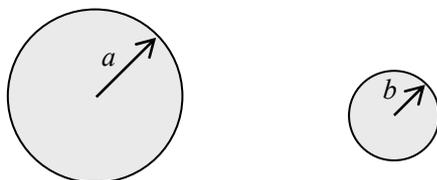


2-7 半径 a 、電荷密度 ρ [C/m³] の無限長円柱状電荷がある。円柱表面を電位の基準にとり、 r の関数として、電界及び電位の分布を求めよ。



2-8 半径 a, b の2つの導体球 A, B がある。

- (1) 導体球 A, B をそれぞれ q_A, q_B で帯電させたとき、それぞれの球のポテンシャル（無限遠が基準）を求めよ。ただし、2導体球は十分離れているとする。
- (2) 次に、導体球 A, B を細い針金で接続したとき（電位を等しくしたとき）、それぞれの導体球上の電界強度の比を求めよ。



2-9 原点に置かれた単位点電荷 $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ が作る電位を求める。電位 ϕ はポアソンの方程式 $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ を満たすので、微分方程式 $\nabla^2 \phi(x, y, z) = -\frac{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}{\epsilon_0}$ を ϕ について解けばよい。

- (1) 球対称性を仮定し、斉次方程式 $\nabla^2 \psi(x, y, z) = 0$ （ラプラスの方程式）の解を求めよ。ただし、 ψ は原点からはるか遠方では 0 であるとする。（ヒント：球座標で解くと楽である。また、途中

で $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial r}$ を考慮し、 $\Psi = r\psi$ と置換する)

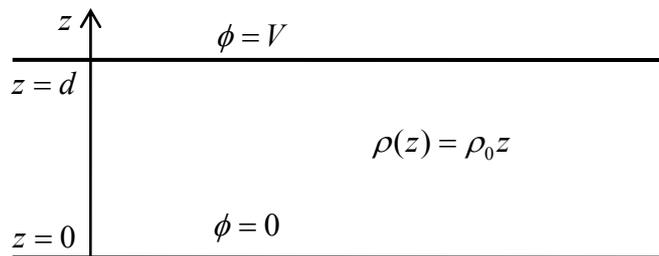
- (2) (1)で求めた解は原点以外において $\nabla^2 \psi(x, y, z) = 0$ であるが、原点では発散する。ポアソンの方程式に(1)の解を代入して(1)の未知係数を決定せよ。(ヒント：原点を中心とする球内で両辺を体積積分する。左辺は $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \nabla \psi$ だからガウスの発散定理を用いて境界の面積分に変換できる)

2-10 原点からの距離 r にある電荷密度が a/r^2 [C/m³]で与えられる空間の電位分布を求めよ。ただし、 a は定数である。

2-11 z 軸から垂直に r の距離にある点の電位が $b e^{-r/a}$ で与えられる空間の電荷密度分布を求めよ。ただし、 a, b は定数である。

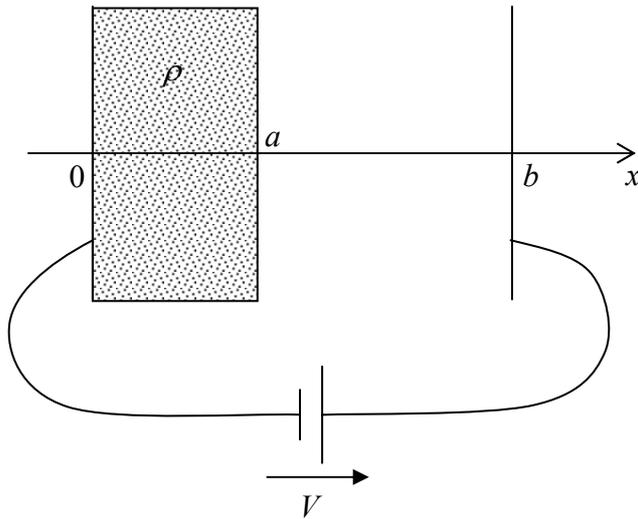
2-12 図のように、 $z = 0, d$ の位置に無限に広い2枚の平行平板が置かれている。

- (1) 両平板間の電荷密度分布は $\rho(z) = \rho_0 z$ で与えられるとする (ρ_0 は定数)。電位分布 $\phi(z)$ を求めよ。
 (2) (1)で求めた電位分布を使い、電界 \mathbf{E} を求めよ。また、上下の平板に生じる電荷を求めよ。

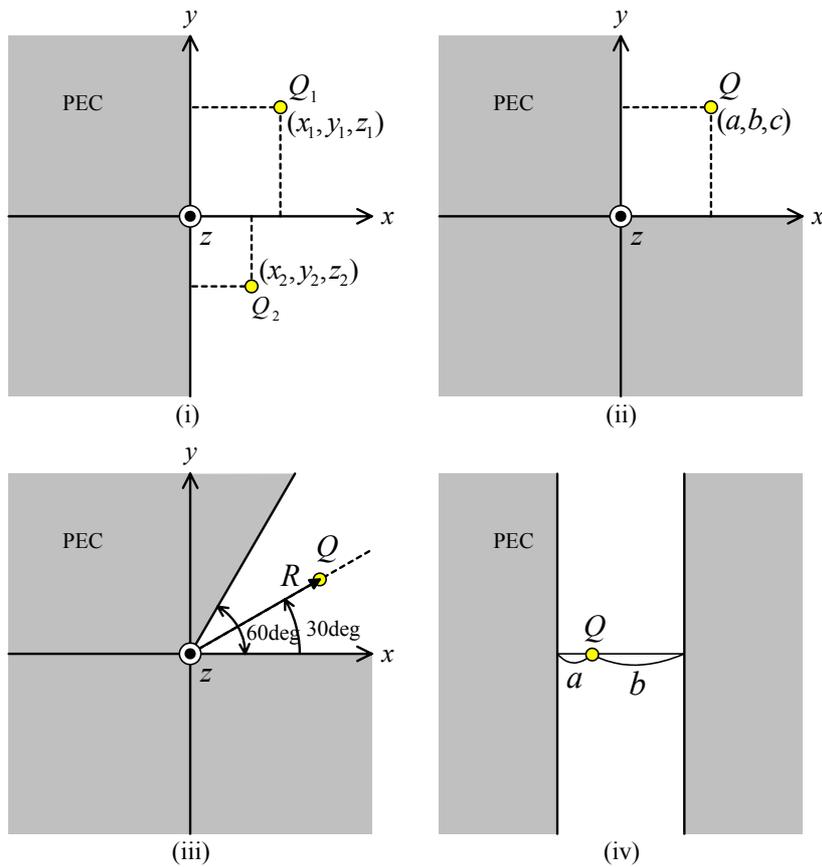


2-13 $0 < x$ の空間に密度 ρ [C/m³]で電荷が一樣に分布している。 $x = 0$ の電界を0、電位を0としたときの空間の電位分布、電界分布をポアソンの方程式を解いて求めよ。

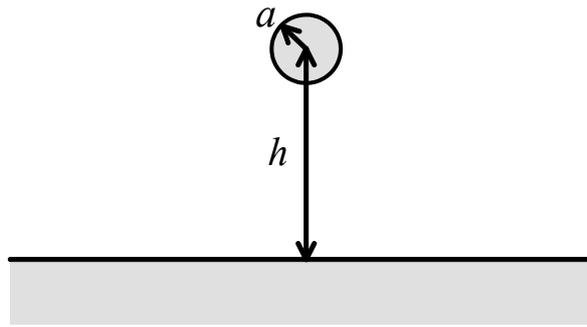
2-14 図のように2枚の平行平板が $x = 0, x = b$ に置かれ、 $y \cdot z$ 方向に無限に広がっている。平行平板の間の一部 $0 \leq x \leq a$ に電荷密度 ρ の領域がある。平行平板間に電圧 V が与えられているとき、電位(電池の負側を0とする)と電界を求めよ。



2-15 図(i)-(iv)について、どのように映像電荷を配置したら完全導体を取り除くことができるか (完全導体取り除いても完全導体以外の空間で同じ電界分布を再現できるか) 答えよ。



2-16 地上 h [m]の高さに半径 a [m]の電線が地面に平行に置いてある。電線を λ [C/m]で帯電した時、地面に対する電線の電位を求めよ。ただし、地面は完全導体と見なすことができるものとし、 $a \ll h$ (a は h に比べて非常に小さい)とする。



2-17 電荷を与えた導体（あるいは誘電体）中の電界を測定するにはテスト電荷に働く力を測定すればよいが、テスト電荷の大きさ ΔQ は十分に小さくする必要がある。それは被測定電界を乱さないようにするためである。さて、ここで「テスト電荷により電界が乱される」とはどのようなことか考えて説明せよ。早合点の A 君は「テスト電荷が作る電界が被測定電界に加わるためだ」と答えたが、彼の答は正しいだろうか。もし正しくないとする、正しい答は何か答えよ。

章末問題略解

2章 静電界と電位

$$2-1 \quad \frac{q}{\varepsilon_0 a^{\delta}}$$

$$2-2 \quad \hat{x} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(z^2 + d^2)} \frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}$$

2-3 $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ だから保存場

$$2-4 \quad \phi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \left| \frac{l/2 + \sqrt{(l/2)^2 + r^2}}{r} \right|$$

$$\mathbf{E} = \hat{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}}$$

2-5

$$\mathbf{E} = \text{sign}(z) \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

ただし、 $\text{sign}(z) = 1(z \geq 0), -1(z < 0)$

2-6

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{0} & (0 \leq r < a) \\ \hat{r} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a \leq r < b) \\ \mathbf{0} & (b \leq r < c) \\ \hat{r} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (c \leq r) \end{cases}, \quad V = \begin{cases} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (0 \leq r < a) \\ \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (a \leq r < b) \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} & (b \leq r < c) \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (c \leq r) \end{cases}$$

2-7

$$E_r = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r & (0 \leq r \leq a) \\ \frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0 r} & (a < r) \end{cases}, \quad U = \begin{cases} \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (a^2 - r^2) & (0 \leq r \leq a) \\ -\frac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0} \log \frac{r}{a} & (a < r) \end{cases}$$

$$2-8 \quad (1) V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 a}, V_B = \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (2) \frac{E_B}{E_A} = \frac{a}{b}$$

$$2-9 \quad (1) \psi = \frac{C}{r} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (2) \psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$2-10 \quad V = -\frac{a}{\epsilon_0} \ln r$$

$$2-11 \quad \rho = \frac{\epsilon_0 b}{a} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) e^{-r/a}$$

$$2-12 \quad (1) \phi = -\frac{\rho_0 z^3}{6\epsilon_0} + \left(\frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} + \frac{V}{d} \right) z = \frac{\rho_0 z}{6\epsilon_0} (d^2 - z^2) + \frac{V}{d} z$$

(2)

$$\mathbf{E} = \hat{z} \left(\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_0 d^2}{6\epsilon_0} - \frac{V}{d} \right), \quad \sigma|_{z=0} = -\frac{\rho_0 d^2}{6} - \frac{\epsilon_0 V}{d}, \quad \sigma|_{z=d} = -\frac{\rho_0 d^2}{3} + \frac{\epsilon_0 V}{d}$$

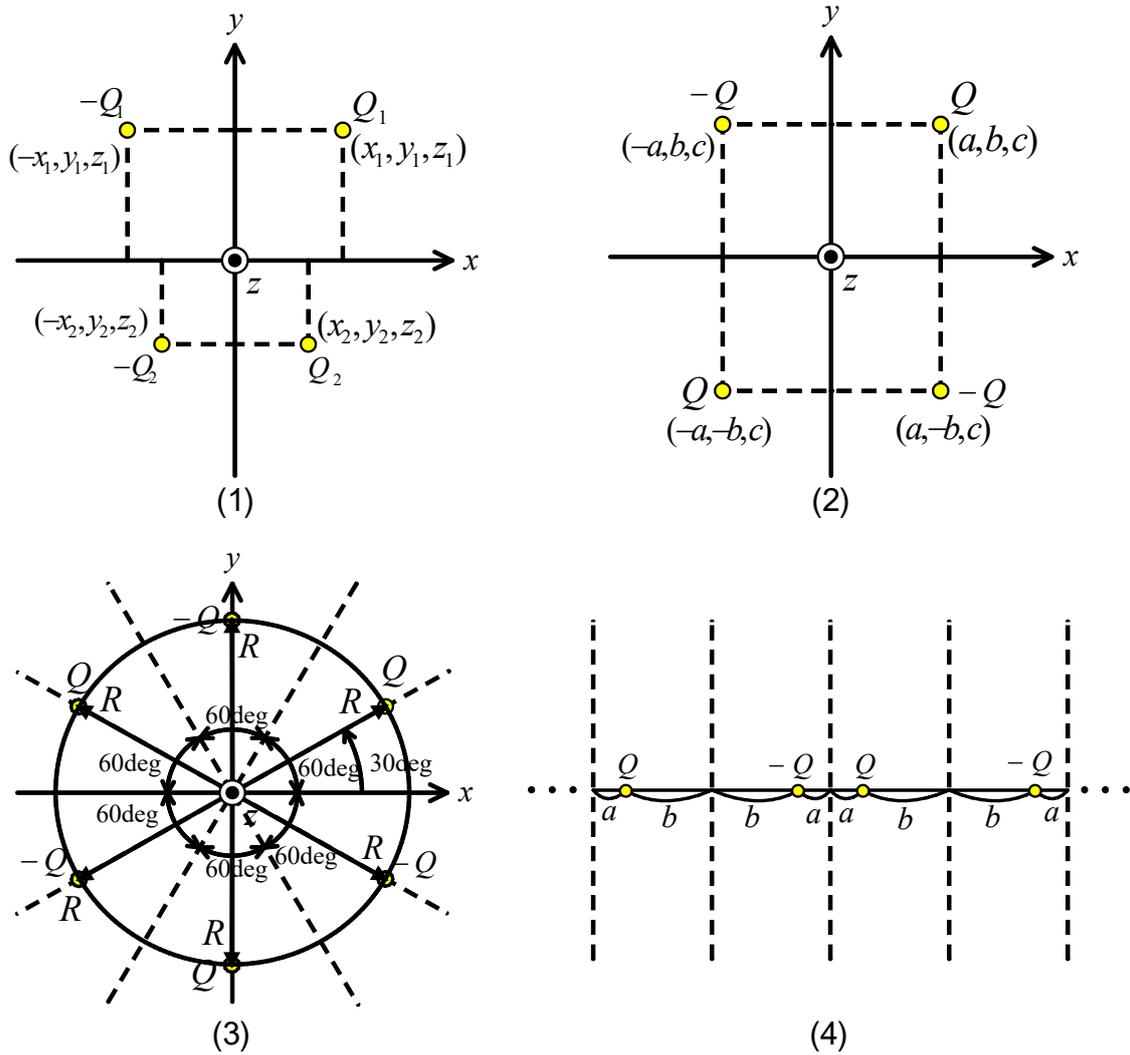
2-13

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \quad E_x = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

2-14

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0} x^2 + \left\{ \frac{1}{b} \left(V - \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} a \right\} x & (0 \leq x < a) \\ \frac{1}{b} \left(V - \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 \right) x + \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 & (a \leq x \leq b) \end{cases}$$

$$E_x = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} x - \left\{ \frac{1}{b} \left(V - \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 \right) + \frac{\rho}{\epsilon_0} a \right\} & (0 \leq x < a) \\ -\frac{1}{b} \left(V - \frac{\rho}{2\epsilon_0} a^2 \right) & (a \leq x \leq b) \end{cases}$$



$$2-16 \quad \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a} \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} \quad [\text{V}]$$

2-17

電荷はそれ自身の電界による力は受けない。周囲の導体、誘電体表面に誘起された電荷により力を受ける。元の電界を測定するためには、この力が元の電界から受ける力よりも十分小さくなければならない。