

電磁気学第一 演習 第3回 解答

【VA-28】 次のスカラー関数の勾配を直角座標、球座標においてそれぞれ計算せよ。

$$\frac{1}{r} \quad (\text{ここで、} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

解答

直角座標では、

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \hat{z} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{z} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \hat{x} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \hat{y} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \hat{z} \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \end{aligned}$$

球座標では、

$$\nabla V = \hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \text{ より、}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left(= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

■

【VA-29】 次のスカラー関数の勾配を円筒座標において計算せよ。

$$\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z$$

解答

$$\text{円筒座標系において、} \nabla V = \hat{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \text{ だから、}$$

$$\begin{aligned} \nabla (\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z) &= \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z) \\ &= \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z) + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \cos \phi + \rho \sin \phi + z) \end{aligned}$$

$$= \hat{\rho}\{\cos\varphi + \sin\varphi\} + \hat{\phi}\{\cos\varphi - \sin\varphi\} + \hat{z}$$

■

【VA-44】 次のベクトル関数の発散を直角座標、球座標においてそれぞれ計算せよ。

$$\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ここで、 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

解答

直角座標では、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ より、} \\ \nabla \cdot \left(\frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \left\{ ((x^2 + y^2 + z^2) - x \cdot 2x) + ((x^2 + y^2 + z^2) - y \cdot 2y) + ((x^2 + y^2 + z^2) - z \cdot 2z) \right\} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

球座標では、

$$\begin{aligned} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ は、 } \frac{\hat{r}}{r} \text{ に書き換えられるから、} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \text{ より、} \\ \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r} \right) \\ = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

■

【VA-45】 次のベクトル関数の発散を円筒座標において求めよ。

$$\rho^2 \cos \varphi \cdot \hat{\rho} + \rho \sin \varphi \cdot \hat{\phi} + z \rho \cos \varphi \cdot \hat{z}$$

解答

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ より、} \\
\nabla \cdot (\rho^2 \cos \varphi \cdot \hat{\rho} + \rho \sin \varphi \cdot \hat{\varphi} + z \rho \cos \varphi \cdot \hat{z}) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \rho^2 \cos \varphi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (z \rho \cos \varphi) \\
&= (4\rho + 1) \cos \varphi
\end{aligned}$$

■

【VA-50】円柱 $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$ の全表面に関する $\mathbf{A} = x\hat{x} - y\hat{y} + (z^2 + z - 1)\hat{z}$ の法

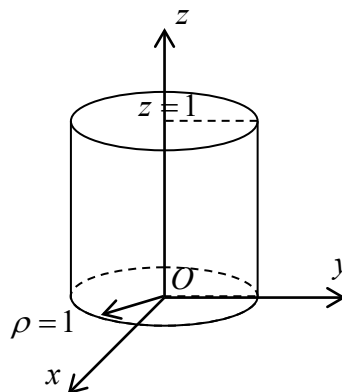
線面積分を求めよ。ただし、面素ベクトルは円柱の外向きとする。また、円柱の内部に

対して $\mathbf{A}$ の発散の体積積分を求めてガウスの定理が成り立つことを確認せよ。

解答**[面積分]**

側面での積分

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} & \quad \begin{cases} \hat{x} \cdot \hat{\rho} = \cos \varphi \\ \hat{y} \cdot \hat{\rho} = \sin \varphi \\ \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0 \end{cases} \\
\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{= \hat{\rho} \rho d\varphi dz} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (x\hat{x} - y\hat{y} + (z^2 + z - 1)\hat{z}) \cdot (\hat{\rho} d\varphi dz) \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi dz \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2\cos^2 \varphi - 1) d\varphi \int_{z=0}^1 dz \\
&= 2\pi - 2\pi = 0
\end{aligned}$$



下面での積分

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{= -\hat{z}\rho d\rho d\varphi} &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} + (0^2 + 0 - 1)\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{z}\rho d\rho d\varphi) \\
&= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \\
&= \underbrace{\int_{\rho=0}^1 \rho d\rho}_{=1/2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

上面での積分

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{= \hat{z}\rho d\rho d\varphi} &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}} + (1^2 + 1 - 1)\hat{\mathbf{z}}) \cdot (\hat{z}\rho d\rho d\varphi) \\
&= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \\
&= \pi
\end{aligned}$$

よって、

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

[体積積分]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 1 - 1 + 2z + 1 = 2z + 1$$

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (2z + 1) \rho d\rho d\varphi dz \\
&= \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^1 (2z + 1) dz \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

よって、ガウスの発散定理 $\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$ が成り立っている。

■