

フーリエ変換とラプラス変換

第11回講義資料

担当: 角嶋邦之

kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp

工学院電気電子系

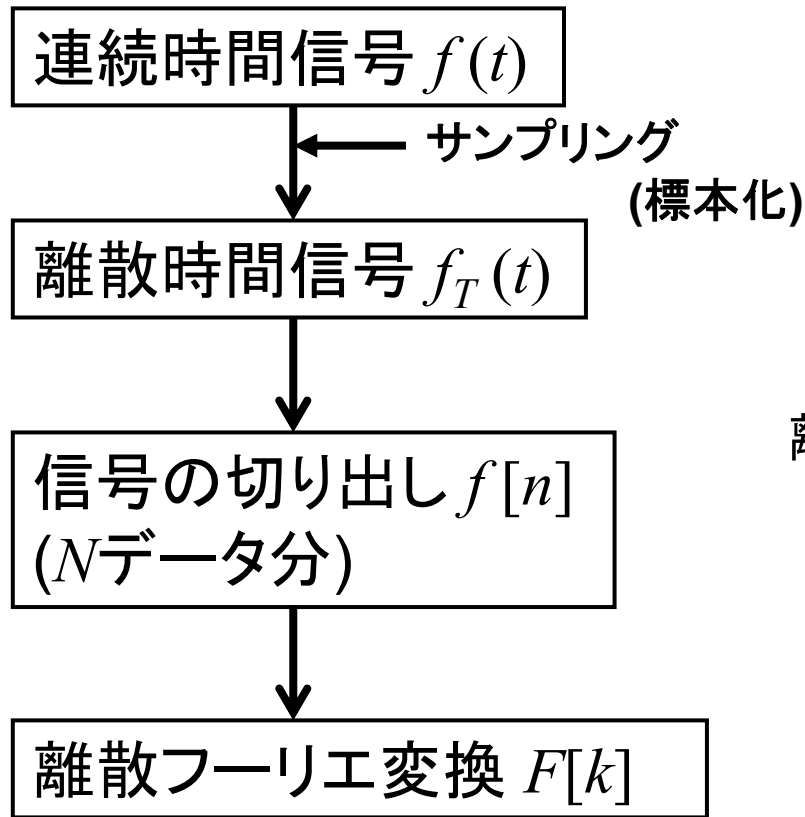
講義予定(全15回)

第1回	6/14	線形システムとは, 周期関数の級数展開
第2回	6/19	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/26	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	7/3	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示, 線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/10	理解度の確認と解説

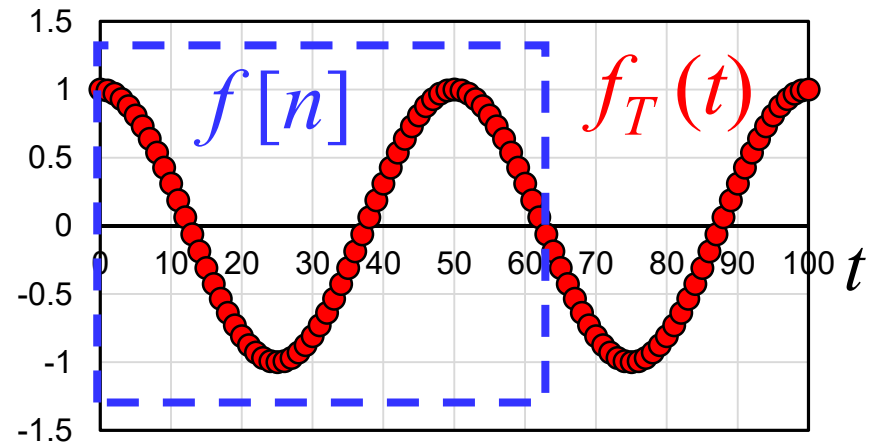
第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/17	離散フーリエ変換の基礎 (定義, 性質)
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際 (帯域制限, 窓関数, 高速フーリエ変換, 応用例)
第12回	7/24	$0 \sim \infty$ 上の関数とラプラス変換, ラプラス変換の性質, 部分分数展開
第13回	7/26	ラプラス逆変換, 線形回路の過渡応答
第14回	7/31	システムの安定性, 電気電子システムへの応用, z 変換
第15回	8/2	講義後半の期末試験 (試験会場: H103, H104)

離散フーリエ変換によるスペクトル解析

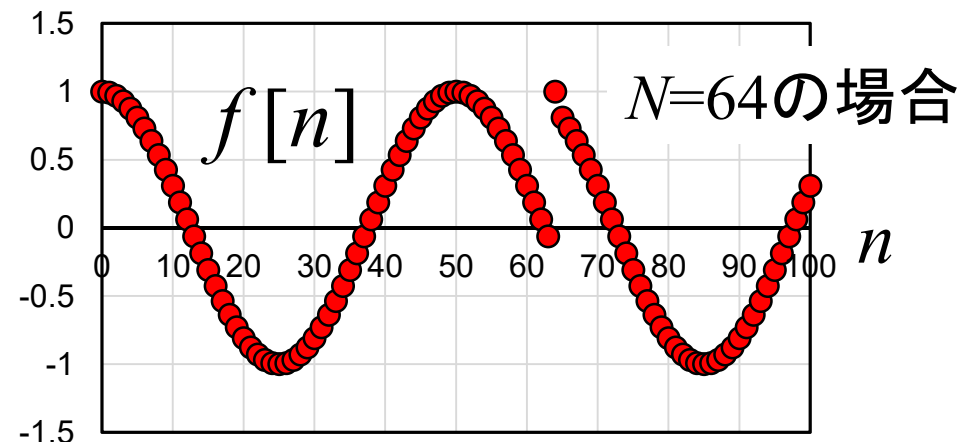
典型的なスペクトル解析



$f(t)=\cos(2\pi t/50)$ を例に考える



離散フーリエ変換は周期関数を想定している

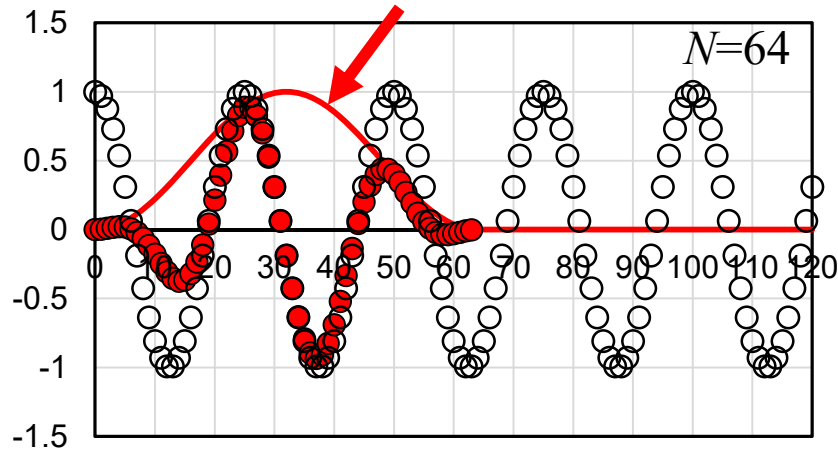


解析しようとしたスペクトルと別のスペクトルになってしまう。
そこで、窓関数法を用いてつながりを修正する。

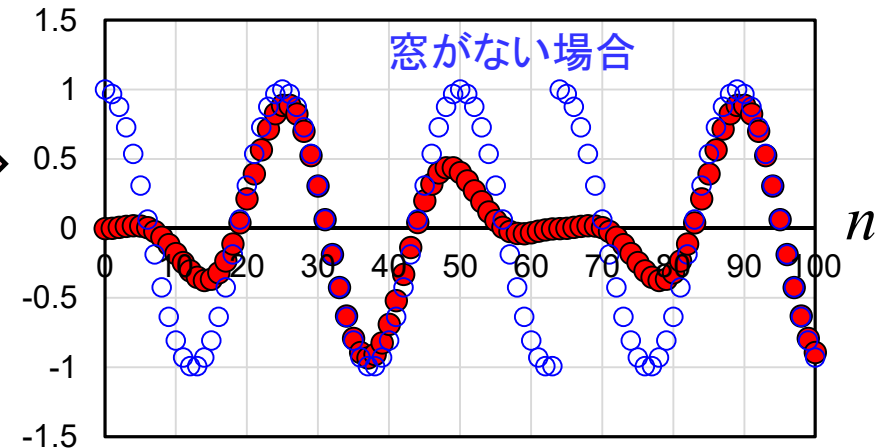
窓関数法を用いた離散フーリエ変換

窓関数: 信号の一部を切り出すために掛ける関数

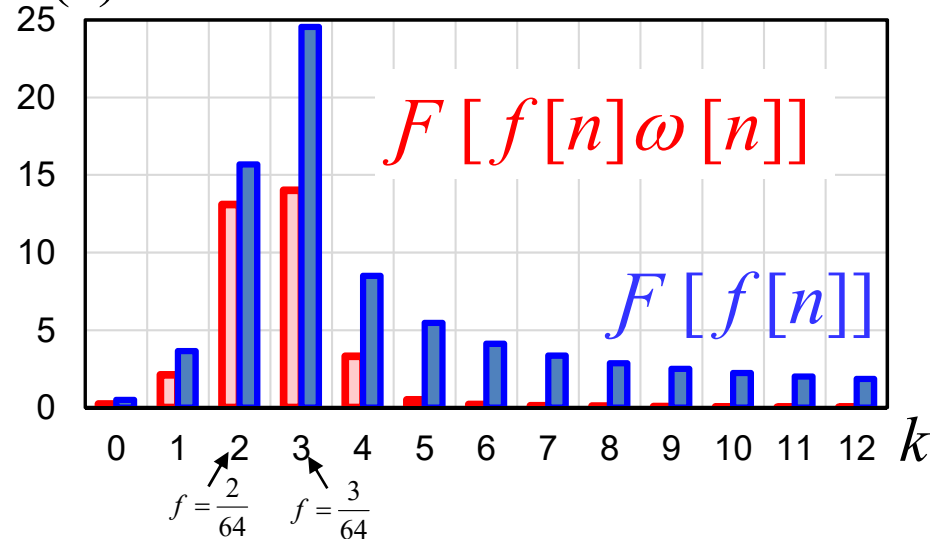
$f(t) = \cos(2\pi t/30)$ hann窓関数 $\omega[n]$



$f[n]$ は連続な周期関数にみえる



$F(k)$ 離散フーリエ変換を行うと



$F(k)$ は k/N の周波数成分を表す。

$f(t) = \cos(2\pi t/30)$ なので、 $1/30$ の周波数成分。

$\frac{2}{64} < \frac{1}{30} < \frac{3}{64}$ なので、理想的には $F(2) \sim F(3)$ 辺りに信号が出るはず。

不連続点 → 高周波成分の発生

窓関数の導入 → 高周波成分の除去

代表的な窓関数の関数系とその特徴

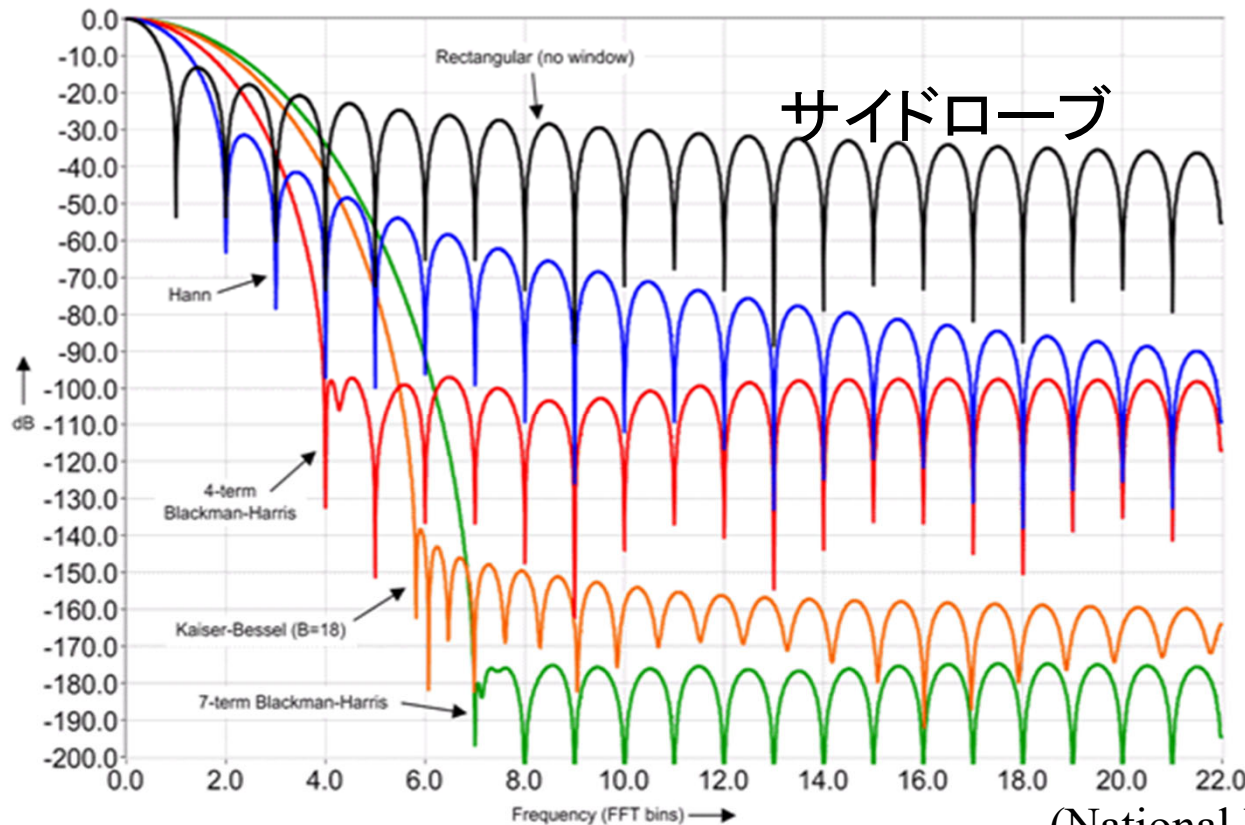
窓関数名	$\omega[n]$ 但し、 $0 \leq n \leq N-1$	特徴、用途
rectangular (矩形窓)	$\omega[n] = 1$	周波数分解能 ◎ ピーク値誤差 × 過渡現象を見る場合
hann (ハニング窓)	$\omega[n] = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$	n の両端は0になる 周波数分解能 ○ ピーク値誤差 ○ ランダム信号
hamming (ハミング窓)	$\omega[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$	n の両端は0にならない 周波数分解能 ○ ピーク値誤差 ○ ランダム信号
Blackman (ブラックマン窓)	$\omega[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$	周波数分解能 △ ピーク値誤差 ◎ 周期信号のピーク値

完璧な窓関数は存在しないため、適切な窓関数を選択

代表的な窓関数の離散時間フーリエ変換

矩形窓の場合 $F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega(n) e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\omega n} = \frac{1 - e^{-i\omega N}}{1 - e^{-i\omega}}$

メインローブ $= \frac{e^{-i\omega N/2}}{e^{-i\omega/2}} \frac{e^{i\omega N/2} - e^{-i\omega N/2}}{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}} = e^{-\frac{\omega(N-2)}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$



矩形窓

hann窓

Blackman窓

(National InstrumentsのHPより引用抜粋)

メインローブの細さ、サイドローブの抑制にはトレードオフが存在する 6

高速フーリエ変換(Fast Fourier Transform: FFT)

$N=2^P$ (P : 自然数) のとき、離散フーリエ変換(DFT)、逆離散フーリエ変換(IDFT)要する乗算回数を N^2 から $(N/2)\log_2 N$ に減らすことが可能

$$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \text{ とおく}$$

■ W_N^{kn} の kn の値について ($m=0, 1, 2, \dots$)

$$kn = mN \text{ の場合} \quad W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}mN} = W_N^0 = 1$$

$$kn = mN+1 \text{ の場合} \quad W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(mN+1)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}} = W_N^1$$

$$kn = mN+2 \text{ の場合} \quad W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(mN+2)} = e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = W_N^2$$

以下、同様

■ W_N^{kn} の N について

$$W_N^2 = e^{-i\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}^1$$

$$\text{例えば} \quad \begin{cases} W_8^2 = W_4^1 \\ W_8^4 = (W_8^2)^2 = W_4^2 \\ W_8^6 = (W_8^2)^3 = W_4^3 \end{cases}$$

この関係を用いれば、計算量を少なくすることが可能

FFTの計算例($N=2^3$ とする)

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \\ F[4] \\ F[5] \\ F[6] \\ F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \\ f[4] \\ f[5] \\ f[6] \\ f[7] \end{bmatrix}$$



ビット逆転操作

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[4] \\ F[2] \\ F[6] \\ F[1] \\ F[5] \\ F[3] \\ F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \\ f[4] \\ f[5] \\ f[6] \\ f[7] \end{bmatrix}$$

ビット逆転操作

偶数と奇数に並び替える作業

0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

FFTの計算例(上半分)

上半分(偶数)の式変形

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[4] \\ F[2] \\ F[6] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[4] \\ f[5] \\ f[6] \\ f[7] \end{bmatrix}$$

$$W_8^0 = W_8^8 = W_8^{16} = \dots$$

$$W_8^2 = W_8^{10} = W_8^{18} = \dots$$

$$W_8^4 = W_8^{12} = W_8^{20} = \dots$$

$$W_8^6 = W_8^{14} = W_8^{22} = \dots$$

を利用すると2つの行列は同一になる

$W_N^2 = W_{N/2}^1$ の関係を利用すると

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[4] \\ F[2] \\ F[6] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix}}_{N=4 \text{ のFFT となっている}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] + f[4] \\ f[1] + f[5] \\ f[2] + f[6] \\ f[3] + f[7] \end{bmatrix}$$

$N=4$ のFFTとなっている

FFTの計算例(下半分)

下半分(奇数)の式変形

$$\begin{bmatrix} F[1] \\ F[5] \\ F[3] \\ F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[4] \\ f[5] \\ f[6] \\ f[7] \end{bmatrix}$$

$$W_N^{\left(kn + \frac{N}{2}\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(kn + \frac{N}{2}\right)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = -W_N^{kn}, \text{ を利用すると行列式は“-”をつければ同じ}$$

一方で、 W の指数に注目し、 $W_{N/2}^0 = W_N^2$ を利用

($W_8^5 = -W_8^1$ など)

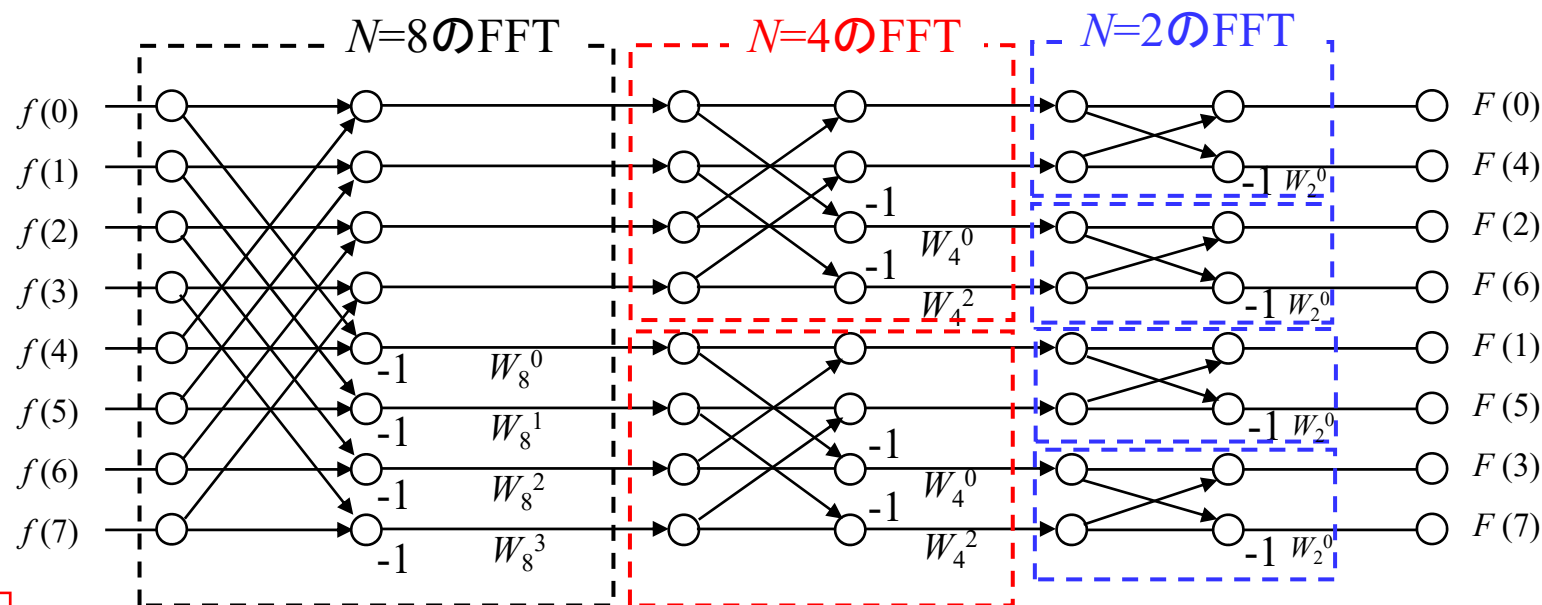
$$\begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F[1] \\ F[5] \\ F[3] \\ F[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] - f[4] \\ f[1] - f[5] \\ f[2] - f[6] \\ f[3] - f[7] \end{bmatrix}$$

$N=4$ のFFTとなっている

FFTの信号流れ図(バタフライ演算)

周波数間引き形FFT



$N=4$

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[2] \\ F[1] \\ F[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 & 1} & 0 & 0 \\ \boxed{1 & -1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1 & 1} \\ 0 & 0 & \boxed{1 & -1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}$$

$N=2$

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \end{bmatrix}$$

(参考)

- $f[n]$ の偶奇を最初に分ける場合は、時間間引き形FFT
- もし、 $N=2^P$ でなければ、データ0で埋めてFFTを行う

本日の演習問題1

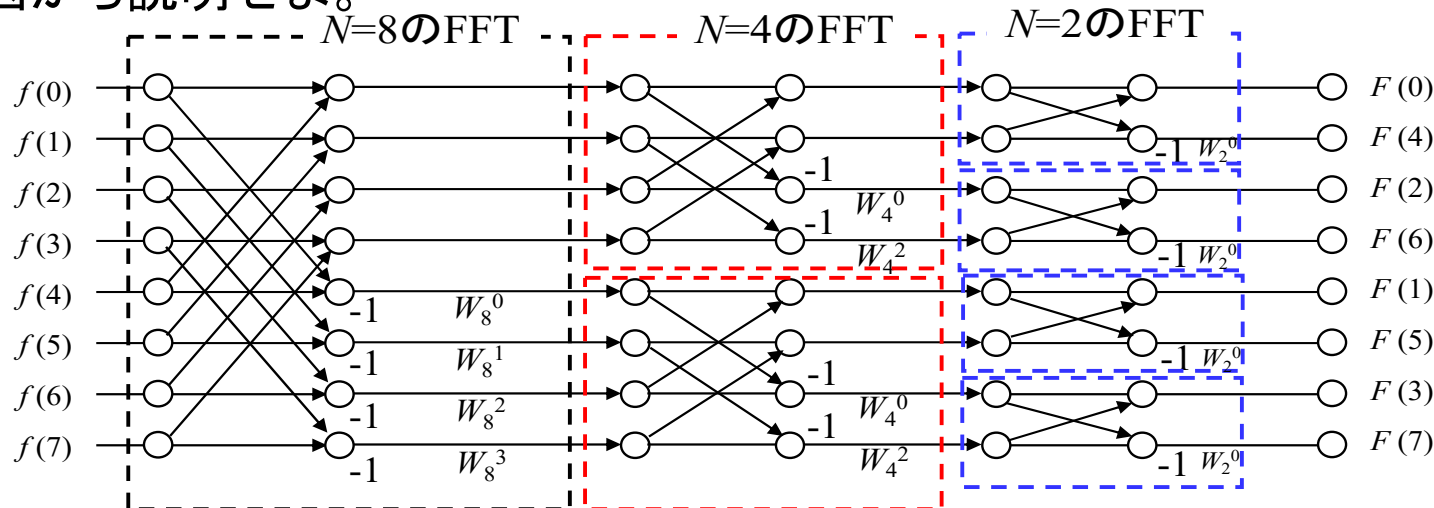
1Hz以下に帯域制限された周期的な連続時間信号 $f(t)$ を $t=0$ から0.5秒のサンプリング時間でサンプリングしたところ、 $f[n] = \{1, 1, 0, 0\}$ の離散時間信号を得た。この離散時間信号の離散フーリエ変換をFFTを用いて $F[k]$ 求めよ。

本日の演習問題1(つづき)

前ページで、導出した $F[k]$ から、 $f(t)$ を求めよ。

本日の演習問題2

$N (=2^P, \text{ 但し } P \text{ は自然数})$ 個のデータの離散フーリエ変換において、高速フーリエ変換 (FFT) を用いた場合、複素積の計算回数が $(N/2)\log_2 N$ となることをバタフライ演算の図から説明せよ。



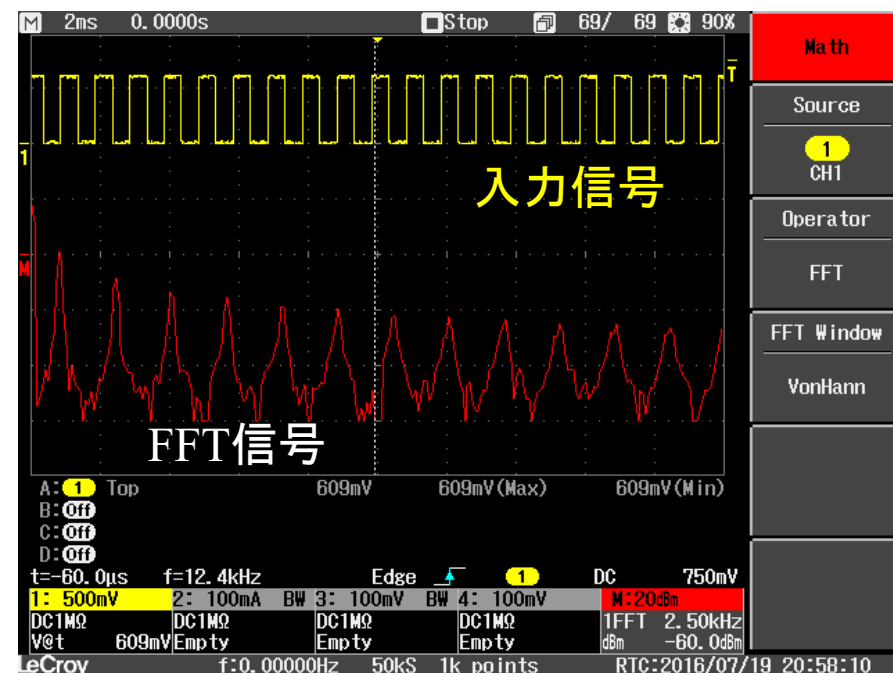
$N=8$ の場合
12回の乗算

FFTの応用例: スペクトラムアナライザ

周波数解析を行うスペクトラムアナライザ

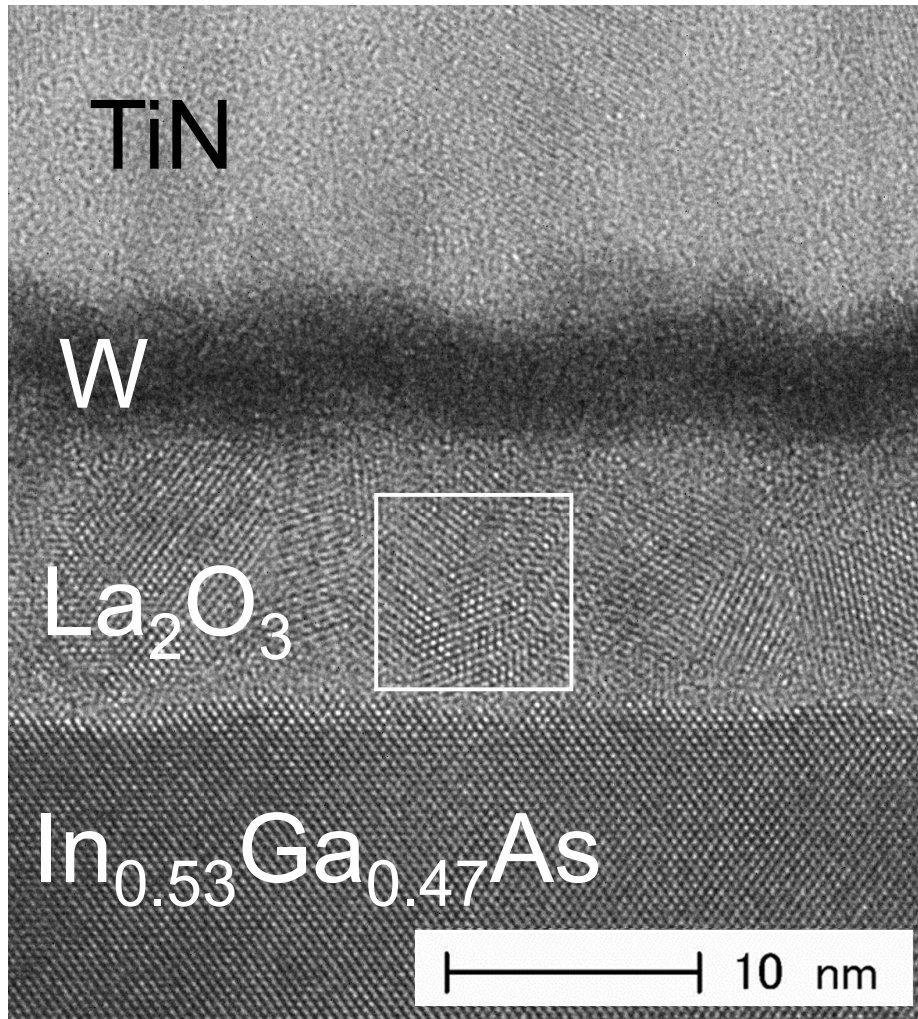
周波数スペクトル への変換方式	計算方式	計測時間	周波数領域
FFT (FFTアナライザ)	デジタル 高速なAD変換器、DSP などが必要	短い 後で演算も可能	～数MHzまで
アナログフィルタ	アナログ 特定のフィルタ周波数に 対応した瞬間のみ計測	長い 周波数成分が時間で 変わる場合は不可	1Hz～300GHz over

FFTの機能は最近ではオシロスコープ
に付属してあることが多い
※尚、この場合はHann窓を選択

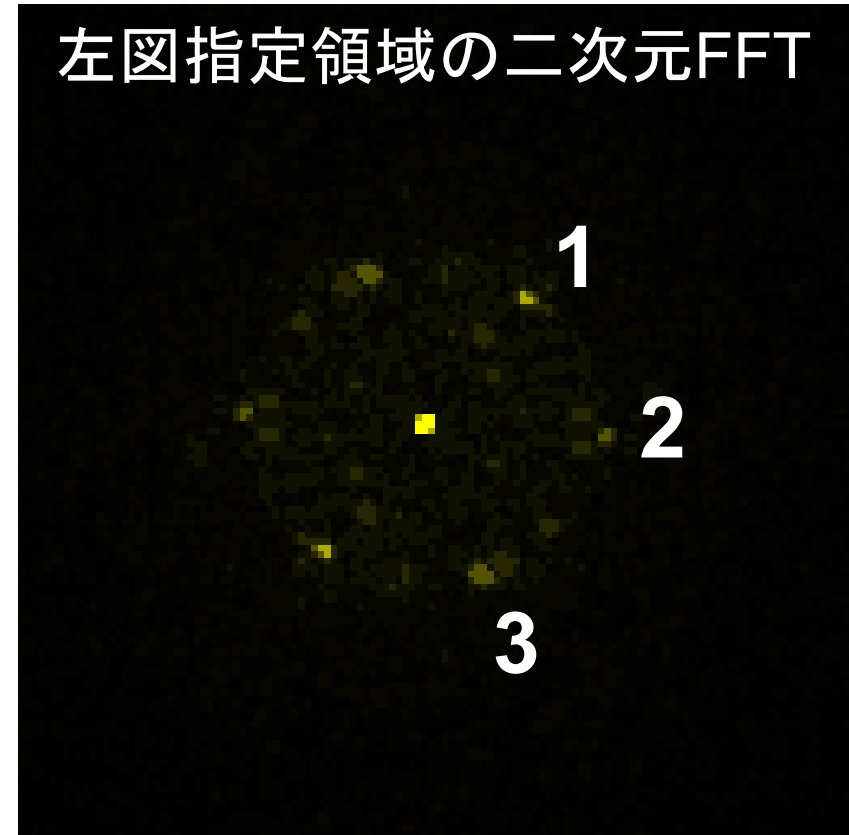


FFTの応用例: 画像の解析(結晶構造から材料同定)

透過電子顕微鏡像



左図指定領域の二次元FFT



実測値

$d_1 = 0.322 \text{ nm}$

$d_2 = 0.285 \text{ nm}$

$d_3 = 0.317 \text{ nm}$

$\phi_{12} = 55.2^\circ$

$\phi_{23} = 66.4^\circ$

JCPDS 05-0602 (hex La_2O_3)

$d_{(1-11)} = 0.298 \text{ nm}$

$d_{(0-11)} = 0.298 \text{ nm}$

$d_{(-100)} = 0.341 \text{ nm}$

$\phi_{12} = 51.8^\circ$

$\phi_{23} = 64.1^\circ$

本日の演習問題1

1Hz以下に帯域制限された周期的な連続時間信号 $f(t)$ を $t=0$ から0.5秒のサンプリング時間でサンプリングしたところ、 $f[n] = \{1, 1, 0, 0\}$ の離散時間信号を得た。この離散時間信号の離散フーリエ変換をFFTを用いて $F[k]$ 求めよ。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F[0] \\ F[2] \\ F[1] \\ F[3] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_4^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} W_4^0 = 0 \\ W_4^1 = -i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F[k] = \{2, 1-i, 0, 1+i\}$$

本日の演習問題1(つづき)

前ページで、導出した $F[k]$ から、 $f(t)$ を求めよ。

$$F[k] = \{2, 1-i, 0, 1+i\}$$

$F[k]$ は $2\text{Hz} \times k/N \text{ Hz}$ の成分を表す。 (サンプリング周波数は 2Hz , $N=4$)

$F[0]$: DC成分

$F[1]$: 0.5 Hz の成分

$F[2]$: 1 Hz の成分

$F[3]$: -0.5Hz の成分

- DC成分がある
- $F[1]$ の成分があり、 $\sin$ の成分もある
- $F[2]$ の成分はない

⇒ $f(t) = A + B \cos(\pi t) + C \sin(\pi t)$ とおける

$f[n] = \{1, 1, 0, 0\}$ を代入

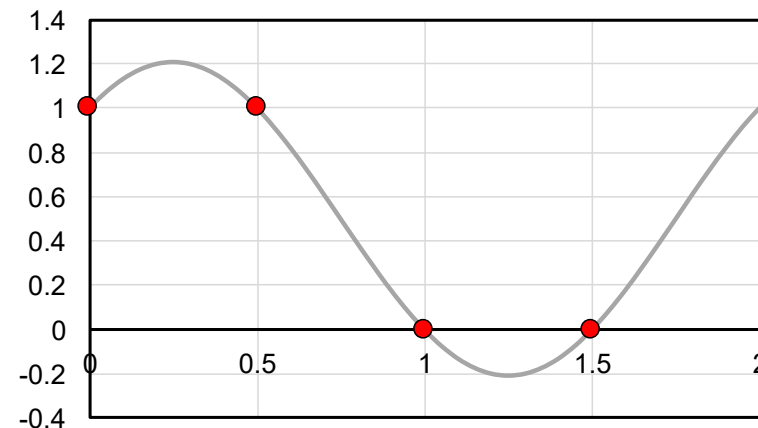
$$f(0) = A + B = 1$$

$$f(0.5) = A + C = 1$$

$$f(1) = A - B = 0$$

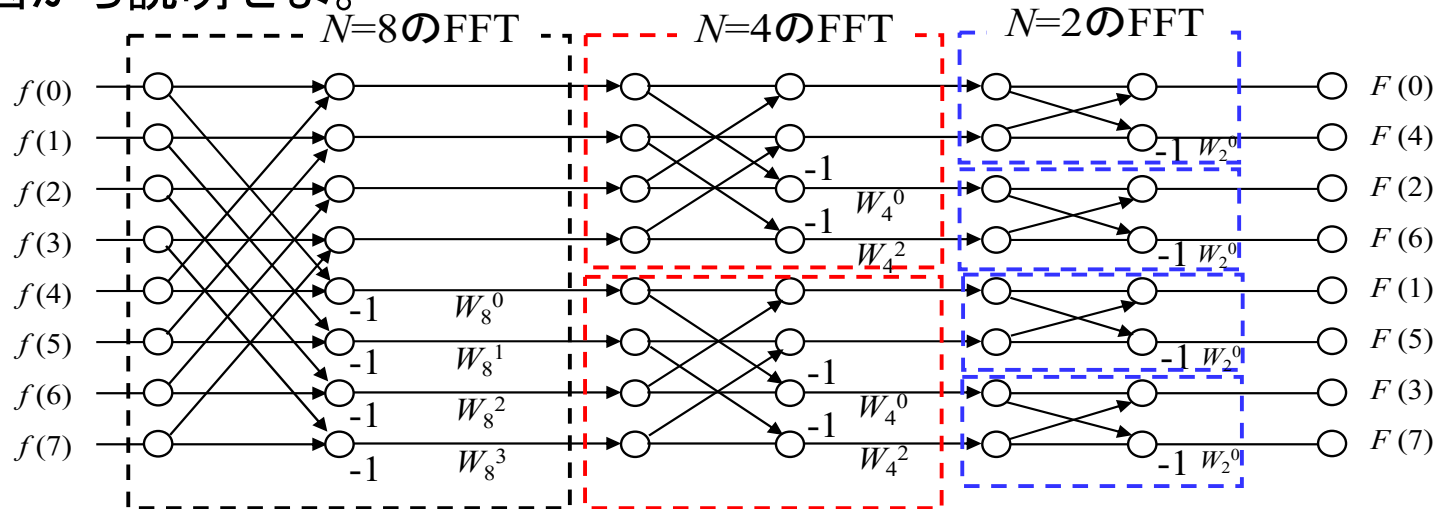
⇒ $A=0.5, B=0.5, C=0.5$

よって $f(t) = 0.5 + 0.5 \cos(\pi t) + 0.5 \sin(\pi t)$



本日の演習問題2

$N (=2^P, \text{ 但し } P \text{ は自然数})$ 個のデータの離散フーリエ変換において、高速フーリエ変換 (FFT) を用いた場合、複素積の計算回数が $(N/2)\log_2 N$ となることをバタフライ演算の図から説明せよ。



$N=8$ の場合
12 回の乗算

$N=2^P$ の FFT に必要な乗算回数を $f(P)$ とする ($P \geq 2$)。

$N=2^P$ の時、乗算を $2^P/2$ 回 (つまり 2^{P-1} 回) 行って、 $N-1$ の FFT を 2 つつくる。

$$\left\{ \begin{array}{l} f(P) = 2f(P-1) + 2^{P-1} \\ f(P-1) = 2f(P-2) + 2^{P-2} \\ \vdots \\ f(3) = 2f(2) + 2^2 \\ f(2) = 2f(1) + 2^1 \end{array} \right.$$

$$f(P) = 2^{P-1} \times 2f(1) + (P-1)2^{P-1}$$

$$f(1) = 1 \text{ で, } N=2^P \text{ あるから}$$

$$f(P) = 2^{P-1} \times (P-1)2^{P-1} = PN/2$$

$$= (N/2)\log_2 N$$