

フーリエ変換とラプラス変換

第12回講義資料

担当: 角嶋邦之

kakushima.k.aa@m.titech.ac.jp

工学院電気電子系

講義予定(全15回)

第1回	6/14	線形システムとは, 周期関数の級数展開
第2回	6/19	フーリエ級数の性質
第3回	6/21	線形回路の周期波に対する定常応答
第4回	6/26	フーリエ級数の理解度確認総合演習と解説
第5回	6/28	非周期関数とフーリエ積分・フーリエ変換
第6回	7/3	フーリエ変換の存在と性質
第7回	7/5	時間領域表示と周波数領域表示, 線形回路の時間応答と周波数応答
第8回	7/10	理解度の確認と解説

第9回	7/12	シャノンの標本化定理
第10回	7/17	離散フーリエ変換の基礎 (定義, 性質)
第11回	7/19	離散フーリエ変換の実際 (帯域制限, 窓関数, 高速フーリエ変換, 応用例)
第12回	7/24	0~ ∞ 上の関数とラプラス変換, ラプラス変換の性質, 部分分数展開
第13回	7/26	ラプラス逆変換, 線形回路の過渡応答
第14回	7/31	システムの安定性, 電気電子システムへの応用, z変換
第15回	8/2	講義後半の期末試験 (試験会場: H103, H104)

ラプラス変換の定義と逆変換

変数 t について区間 $[0, +\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して、 s を t と無関係な実数あるいは複素数として、下記の積分が**存在する場合**、この変換を $f(t)$ のラプラス変換という。

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$F(s)$ は積分が収束する場合のみ定義可能

ラプラス逆変換
 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$

■ $f(t) = 1$ のとき

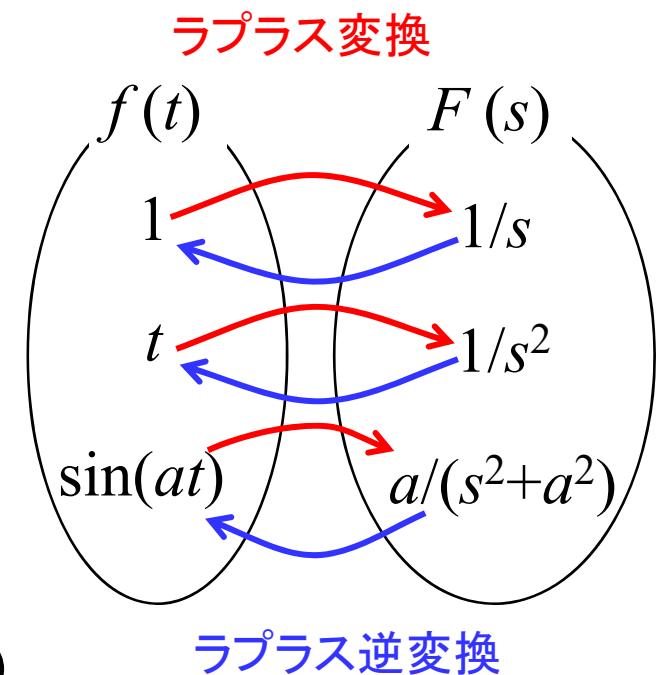
$$F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (s > 0)$$

■ $f(t) = t$ のとき

$$F(s) = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$$

■ $f(t) = \sin(at)$ のとき

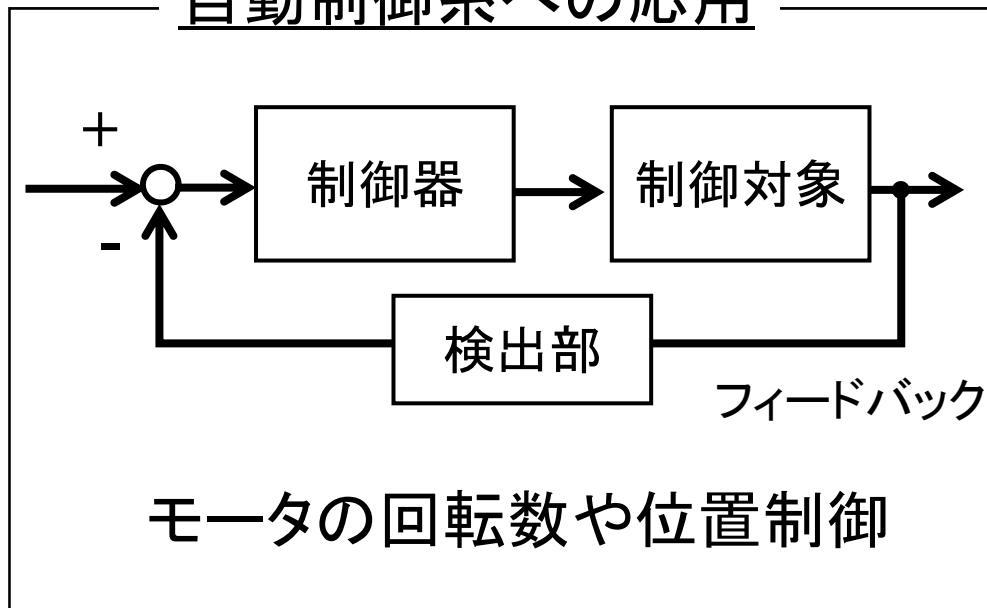
$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin at \cdot e^{-st} dt = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s > 0)$$



ラプラス変換はどこで用いるのか

数学的技法のひとつ。微分方程式を解き、システムの時間応答を把握することが可能。
制御器で時間応答を自在に変える。

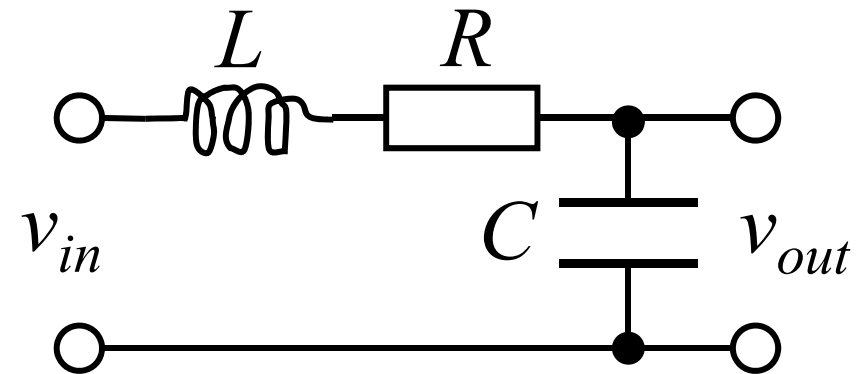
自動制御系への応用



フーリエ変換との違い

	入力変数
フーリエ変換	$-\infty < t < \infty$
ラプラス変換	$0 < t$

電気回路への応用



微分方程式

$$LC \frac{d^2 v_{out}}{dt^2} + RC \frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} = v_{in}$$

伝達関数 $W(s)$ (ラプラス変換の像)

$$W(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

過渡応答がわかる

ラプラス変換の具体例

次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f_1(t) = 3t - 2$$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} (3t - 2) \cdot e^{-st} dt = 3 \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt - 2 \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$$

よって

$$F_1(s) = \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (s > 0)$$

次の関数のラプラス変換が存在する s の範囲を調べよ。

$$f_2(t) = \exp(-t^2) \quad \int_0^T \exp(-t^2) \exp(-st) dt = \int_0^T \exp(-t^2 - st) dt$$

$t > 1 - s$, 且つ $t > 0$ であるような t に対しては、 $(t+s)t > t$ となる
 $1 - s$ と 0 の大きい方を t_0 とすると

$$\int_{t_0}^T \exp(-t^2 - st) dt < \int_{t_0}^T \exp(-t) dt = e^{-t_0} - e^{-T}$$

$T \rightarrow \infty$ で収束するため、
 $-\infty < s < \infty$ で存在する

本日の演習問題①

次の関数のラプラス変換を求めよ。

(1) $f(t) = e^{2t}$

(2) $f(t) = \cos \omega t$

ラプラス変換の基本法則

$\mathcal{L}(f(t))=F(s)$, $\mathcal{L}(g(t))=G(s)$ とする。 λ, μ は定数。

線形法則

$$\mathcal{L}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda F(s) + \mu G(s)$$

相似法則

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0)$$

移動法則

$$\mathcal{L}(f(t-\lambda)) = e^{-\lambda s} F(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s} \left\{ F(s) - \int_0^{\lambda} e^{-st} f(t) dt \right\}$$

像の移動法則

$$\mathcal{L}(e^{\mu t} f(t)) = F(s-\mu)$$

積分法則

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

像の積分法則

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$$

微分法則

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(+0)$$

像の微分法則

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(s)$$

畳み込み

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g)$$

相似法則の証明

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\lambda}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

(変数変換 $\lambda t = \tau$ を利用)

移動法則の証明

$$\mathcal{L}(f(t-\lambda)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\lambda) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(\lambda+\tau)} f(\tau) d\tau = e^{-s\lambda} F(s)$$

(変数変換 $t-\lambda=\tau$ を利用, $t>0$)

像の移動法則の証明

$$\mathcal{L}(e^{\mu t} f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\mu t} f(t) dt = F(s-\mu)$$

微分法則の証明

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t)) &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + sF(s)\end{aligned}$$

積分法則の証明

$$f(t) \text{ の積分を } g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \text{ とすると、 } f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$\text{微分定理より } F(s) = \mathcal{L}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = sG(s) - \underline{\underline{g(0)}}$$

$$\text{よって } G(s) = \frac{1}{s} F(s)$$

像の微分法則の証明

$$\begin{aligned}\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (-tf(t)) dt = \mathcal{L}(-tf(t))\end{aligned}$$

※微分と無限積分を
入れ替えられる場合

合成法則

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(g) \quad \text{下記、証明する}$$

$$f * g = \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad \text{となるので、}$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right\} e^{-st} dt$$

移動法則

$$\mathcal{L}(f(t - \lambda)) = e^{-\lambda s} F(s)$$

$$= \int_0^{\infty} g(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt \right\} d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} F(s) d\tau = F(s) G(s)$$

計算例

$f(t) = t, g(t) = e^{-t}$ の合成積を求める

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad G(s) = \frac{1}{s-1}, \quad F(s)G(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(e^{-t} - t - 1) = \frac{1}{s^2(s-1)} \quad \swarrow \text{同じ}$$

ラプラス変換表

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s} \quad (s>0)$
$t \quad (t>0)$	$\frac{1}{s^2} \quad (s>0)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad \begin{matrix} n \text{ は自然数} \\ (t>0) \end{matrix}$	$\frac{1}{s^n} \quad (s>0)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (t>0)$	$\frac{1}{\sqrt{s}} \quad (s>0)$
$e^{\lambda t} \quad (t \geq 0)$	$\frac{1}{s-\lambda} \quad (s>\lambda)$
$\cos \lambda t \quad (t \geq 0)$	$\frac{s}{s^2 + \lambda^2} \quad (s>0)$
$\sin \lambda t \quad (t \geq 0)$	$\frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2} \quad (s>0)$

$f(t), g(t)$	$F(s), G(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$df(t)/dt$	$sF(s) - f(0)$
$-tf(t)$	$dF(s)/ds$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$

本日の演習問題②

(3) 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 3) \\ (t-3)^2 & (3 \leq t) \end{cases}$$

(4) 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2 + 1}$$

常微分方程式の解法

変数 t の関数 $x(t)$ の n 階の常微分方程式 $x^{(n)}=f\{t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\}$ の一般解は n 個の任意定数を含む。 t の特定の t_0 に対して、 $x(t_0)=c_0, x'(t_0)=c_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1}$ であるような特殊解を求める。

計算例①

$$x' + 2x = e^{-t}, x(0) = 3$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$sX - x(0) + 2X = \frac{1}{s+1}$$

X について解く

$$X = \frac{1}{s+2} \left(3 + \frac{1}{s+1} \right) = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2}{s+2} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+1} \right) \\ &= 2e^{-2t} + e^{-t} \end{aligned}$$

計算例②

$$x' + \lambda x = f(x), x(0) = a$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$sX - x(0) + \lambda X = F(s)$$

X について解く

$$X = \frac{a}{s+\lambda} + \frac{F(s)}{s+\lambda}$$

合成法則を用いて、両辺のラプラス逆変換

$$x(t) = ae^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

本日の演習問題③

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

(5)

$$\begin{cases} x'' + 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 2 \end{cases}$$

ラプラス変換

Xについて解く

両辺のラプラス逆変換

(6)

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = f(t) \\ \lambda \neq 0, x(0) = a, x'(0) = b \end{cases}$$

ラプラス変換

Xについて解く

両辺のラプラス逆変換 (合成法則を用いる)

連立常微分方程式の解法

$$\begin{cases} x' + y' + x = -e^{-t}, & x(0) = -1 \\ x' + 2y' + 2x + 2y = 0, & y(0) = 1 \end{cases}$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$\begin{cases} sX + 1 + sY - 1 + X = -\frac{1}{s+1} \\ sX + 1 + 2(sY - 1) + 2X + 2Y = 0 \end{cases}$$

X, Yについて解く

$$\begin{cases} (s+1)X + sY = -\frac{1}{s+1} \\ (s+2)X + 2(s+1)Y = 1 \end{cases}$$

$$X = -\frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} = -\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2 + 1}$$

$$Y = -\frac{s^2 + 3s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{-t} (\cos t + \sin t) \\ y(t) &= e^{-t} (1 + \sin t) \end{aligned}$$

常微分方程式の境界値問題

$$x'' - 3x' + 2x = 0, \quad \overset{\text{境界値}}{x(0)=0, x(1)=1}$$

解法

$$x'(0) = c \quad \text{とおく}$$

ラプラス変換で像方程式を導出

$$s^2 X - c - 3sX + 2X = 0$$

$$X = \frac{c}{s^2 - 3s + 2} = \frac{c}{s-2} - \frac{c}{s-1}$$

原関数は

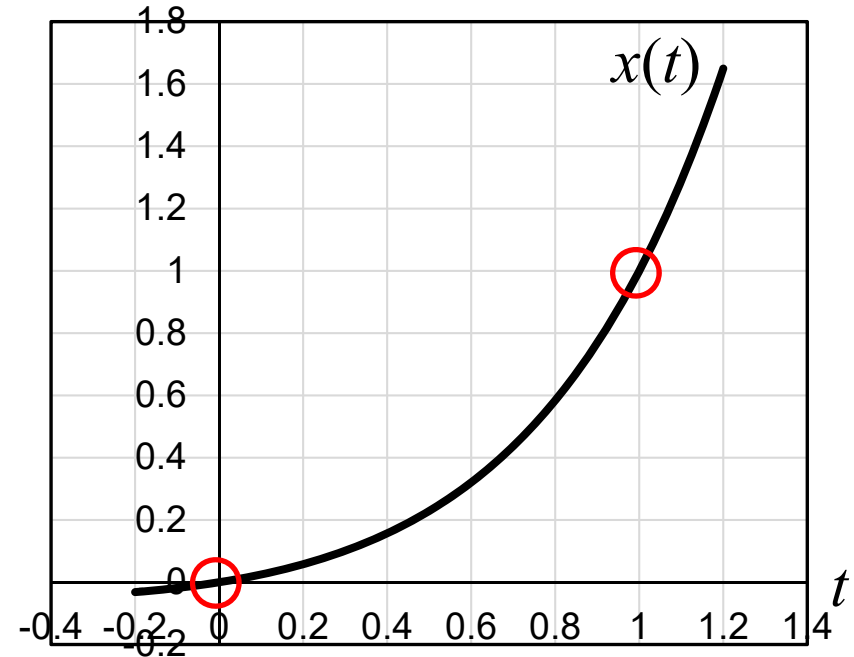
$$x(t) = c(e^{2t} - e^t)$$

$x(1)=1$ であるから

$$c = \frac{1}{e^2 - e}$$

よって

$$x(t) = \frac{e^{2t} - e^t}{e^2 - e}$$



本日の演習問題①

次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$(1) \quad f(t) = e^{2t} \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-2} \quad (s > 2)$$

$$(2) \quad f(t) = \cos \omega t$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \cdot \omega \sin \omega t dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin \omega t dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \left\{ \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \cdot \omega \cos \omega t dt \right\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \cos \omega t dt$$

$$\text{よって } F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (s > 0)$$

※ $F(s)$ がでてくる

本日の演習問題②

(3) 次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 3) \\ (t-3)^2 & (3 \leq t) \end{cases}$$

解

まず、以下の t^2 ラプラス変換を考える

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2) &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = \left[-\frac{t^2}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s} \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

移動法則を利用すると

$$\mathcal{L}\{(t-3)^2\} = e^{-3s} \mathcal{L}(t^2) = \frac{2e^{-3s}}{s^3}$$

(4) 次の関数のラプラス逆変換を求めよ。

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2 + 1}$$

解

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2 + 1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} + \frac{2}{(s-2)^2 + 1}\right) \\ &= e^{2t}(\cos t + 2 \sin t) \end{aligned}$$

本日の演習問題③

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$(5) \begin{cases} x'' + 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 2 \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2 X - sx(0) - x'(0) + 6[sX - x(0)] + 10X = 0$$

Xについて解く

$$(s^2 + 6s + 10)X = 2(s + 7)$$

$$X = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + 1} + \frac{8}{(s+3)^2 + 1}$$

両辺のラプラス逆変換

$$x(t) = 2e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

$$(6) \begin{cases} x'' + \lambda^2 x = f(t) \\ \lambda \neq 0, x(0) = a, x'(0) = b \end{cases}$$

ラプラス変換

$$s^2 X - sx(0) - x'(0) + \lambda^2 X = F(s)$$

Xについて解く

$$(s^2 + \lambda^2)X = as + b + F(s)$$

$$X = \frac{as}{s^2 + \lambda^2} + \frac{b}{s^2 + \lambda^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \lambda^2}$$

両辺のラプラス逆変換 (合成法則を用いる)

$$x(t) = a \cos \lambda t + \frac{b}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) \cdot f(\tau) d\tau$$

本日の演習問題③

次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$(5) \begin{cases} x'' + 6x' + 10x = 0 \\ x(0) = x'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x'' + \lambda^2 x = f(t) \\ \lambda \neq 0, x(0) = a, x'(0) = b \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -sf(t)e^{-st} dt$$

$$= \{0 - f(0)\} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 3) \\ (t-3)^2 & (3 \leq t) \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2 + 1}$$

sの存在範囲について

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(1) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} \right)\end{aligned}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = \begin{cases} 0 & (s > 0) \\ \infty & (s < 0) \end{cases}$$