

解析学 演習 1

答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を明記. 裏面使用可.

問題 1. 次の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{Re} z \leq |z|$ を証明せよ. ただし, $\operatorname{Re} z$ は複素数 z の実部を表すものとする.

(2) 三角不等式 $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ を,

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{および(1)で示した関係を利用して導出せよ.}$$

(3) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ を導出せよ. ただし, $\bar{z}$ は z の共役複素数を表すものとする.

(4) $\bar{z} + 2iz = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ.

問題 2. 偏角の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ として, 以下の複素数を極形式で表せ. なお, 複素数 z の極形式表示とは, $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ のような形で, $|z|$ は大きさなので必ず ≥ 0 の実数であることに注意せよ.

(1) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ (2) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{i}$ (4) $\sqrt[2]{i}$ (i の 2 乗根)

問題 3. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ のとき, 次の(1)~(4)の複素数を極形式, および, $x+iy$ の形で表し, 複素平面上に図示せよ.

- (1) $2z$
(2) iz
(3) z^2
(4) $1/z$
(5) $\sqrt[2]{z}$

