

次の微分方程式の一般解を求めよ。

- (1) $y'' + 4y' + 4y = 0$
- (2) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- (3) $(2x + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + 3y^2)dy = 0$
- (4) $y' + y = \exp(-x)$
- (5) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$
- (6) $(1 + x)\frac{dy}{dx} + (1 + y) = 0$

以上

解答

(1) $y'' + 4y' + 4y = 0$

これは 2 階線形斉次微分方程式である。特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, すなわち $(\lambda + 2)^2 = 0$ となって、この根は $\lambda = -2$ (重解) である。したがって、この微分方程式の一般解は $y = C_1 \exp(-2x) + C_2 x \exp(-2x)$ となる (C_1, C_2 は任意定数)。

(2) $y'' - 3y' + 2y = 0$

これも 2 階線形斉次微分方程式である。特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, すなわち $(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ となって、この根は $\lambda = 2, 1$ である。したがって、この微分方程式の一般解は $y = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp x$ となる (C_1, C_2 は任意定数)。

(3) $(2x + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + 3y^2)dy = 0$

dx の前の係数となっている関数 $(2x + 2xy^3)$ を y で偏微分すると $6xy^2$, dy の前の係数となっている関数 $(3x^2y^2 + 3y^2)$ を x で偏微分すると $6xy^2$ と、互いに等しい。それゆえ、この微分方程式は完全微分形である。したがって、以下のように変形が可能である。

$(2x + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + 3y^2)dy = d(x^2 + x^2y^3 + y^3) = 0$. すなわち、この微分方程式の一般解は $x^2 + x^2y^3 + y^3 = C$ である (C は任意定数)。

(4) $y' + y = \exp(-x)$

これは 1 階線形非斉次微分方程式である。様々な解法が可能であるが、もっとも見通し

よく計算ミスが少なく済むのは、両辺に $\exp x$ を乗じ、左辺を 1 項で表せるように変形する方法である。

すなわち、両辺に $\exp x$ を乗じ $(\exp x)y' + (\exp x)y = 1$ とすれば、 $\frac{d}{dx}[(\exp x)y] = 1$ と変形できるので、両辺を x で積分できることとなり、 $(\exp x)y = x + C$ となって、一般解は $y = x \exp(-x) + C \exp(-x)$ となる (C は任意定数)。

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

これは同次形と考えても良いが、完全微分形と考えた方が計算が容易である。すなわち $(2x+y)dx + (x+2y)dy = 0$ と変形すれば、容易に変形が可能で $(2x+y)dx + (x+2y)dy = d(x^2 + xy + y^2) = 0$ となる。これから明らかに一般解は $x^2 + xy + y^2 = C$ となる (C は任意定数)。

$$(6) \quad (1+x)\frac{dy}{dx} + (1+y) = 0$$

これも上記 (5) と類似で、変数分離形と考えても良いが、ゼロ割の場合分けが面倒である。1 階線形非斉次と考えても良いが、やはり面倒である。一番容易なのは完全微分形と考えることであり、すなわち、以下のように変形が可能である。 $(1+y)dx + (1+x)dy = d(x + xy + y) = 0$ となる。これから明らかに一般解は $x + xy + y = C$ となる (C は任意定数)。

以上