解析学　理解度の確認（２）解答例

問題 1.

(1)　コーシーの積分定理を述べよ．(配点：5 点＋α(証明))

(解答例)

関数$f(z)$が正則な領域内に存在する単一閉曲線Cに対して，$\int_C f(z)dz=0$　が成り立つ．

(2)　複素平面上の点z_0を中心とする半径rの円を積分路$C: |z-z_0|=r\ (r>0)$とするとき，積分路Cを，媒介変数を用いて式で示せ．(配点：5 点)

(解答例)

$C:\ z(\theta)=z_0+re^{i\theta}\quad (0\le\theta\le 2\pi)$　ただし，媒介変数をθとした．

(3)　閉曲線Cとその内部を含む領域で関数$f(z)$が正則であるとき，(2)の積分路Cで$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$を計算し，最後に$r\to 0$とすることで，その値を$z_0, f(z)$等を用いて式で示せ．(配点：10 点)

(解答例)

$z(\theta)=z_0+re^{i\theta}\quad (0\le\theta\le 2\pi)$　より，$dz=ire^{i\theta}d\theta$

よって積分は$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$

ここで$r\to 0$の極限を取ると

$$\lim_{r\to 0}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\lim_{r\to 0}i\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta=i\int_0^{2\pi}f(z_0)d\theta=2\pi i f(z_0)$$

ここで$f(z_0)$は積分変数θによらない定数だから積分の外に出した．

よって　$2\pi i f(z_0)$　(答)

問題 2.

(1) (a)	1	(1) (b)	$1-\dfrac{i}{3}$	(2)	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$	(3) (a)	$\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{n-1}}{2^{n+1}}$	(3) (b)	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$	(4)	$\dfrac{1}{3}$

(1)　関数 $f(z)=\bar{z}$ を,点 0 から点 1+i まで下に示す積分路に沿って複素積分せよ.

(a)　積分路 C_a：点 0 と点 1+i を結ぶ線分　(配点：5 点)

(解答例)

媒介変数を t とおくと　$z(t)=(1+i)t\quad(0\le t\le 1)$　よって　$dz=(1+i)dt$.

また,　$f(z)=\bar{z}=(1-i)t$　なので,

$$\int_{C_a} f(z)dz=\int_0^1(1-i)t(1+i)dt=\int_0^1 2tdt=\left[t^2\right]_0^1=1$$

(b)　積分路 C_b：放物線 $y^2=x$ の点 0 から 1+i まで　(配点：5 点)

(解答例)

$y=t$ とおくと，$x=t^2$

これより $z(t)=x+iy=t^2+it\quad(0\le t\le 1)$　よって，$dz=(2t+i)dt$.

また，　$f(z)=\bar{z}=x-iy=t^2-it$　なので，

$$\int_{C_b} f(z)dz=\int_0^1(t^2-it)(2t+i)dt=\int_0^1\left(2t^3-it^2+t\right)dt=\left[2\frac{t^4}{4}-i\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{i}{3}$$

積分路によって積分値が異なるのは，$\bar{z}$ が正則ではないため.

(2)　$f(z)=\dfrac{1}{z}$ を，中心 z=1 でテーラー展開し，続いて収束半径を求めよ.　(配点：10 点)

(解答例)

テーラー展開の式を使っても求められるが，ここでは等比級数の式を使った方法を示す.

中心 z=1 であることから，(z−1)を公比とする等比級数を構成しようと考える.

$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}$　ここに等比級数の式 $\dfrac{1}{1+r}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n$ を適用すると

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

等比級数が収束するための条件は $r<1$　⇔　$|z-1|<1$　より収束半径は 1

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ を，z=1 を中心として，次の範囲でべき級数展開せよ．

(a) $|z-1|<2$ (配点：7 点) (b) $|z-1|>2$ (配点：7 点)

(解答例)

展開中心である z=1 は与式の特異点である．特異点を中心とするテーラー展開はできないので，どのような範囲であろうと，べき級数展開の結果はローラン展開になる．

(a) 範囲の式 $|z-1|<2$ の両辺を 1／2 倍すると，$|z-1|<2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-1}{2}\right|<1$

よって(z−1)/2 を「公比」とする等比数列の和(の極限=1/(1+r))を引き出す変形を行う．

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{(2+z-1)}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$$

z=1 を中心とした展開を考えているから，最後には(z−1)のべき乗項の和になるので，分母の(z−1)の項には手をつけない．もう一方の(z+1)の方を変形して「公比」を引き出す変形を行う．式変形を行った最後の項に等比級数の式を適用すると，

$$f(z)=\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-z)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

(b)

$|z-1|>2$ の両辺の逆数を取って 2 倍すると，$\Leftrightarrow \left|\dfrac{2}{z-1}\right|<1$

よって 2/(z−1)を「公比」とする等比数列の和(の極限=1/(1+r))を引き出そうと考える．

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}$$

z=1 を中心とした展開を考えているから，最後には(z−1)のべき乗項の和になるので，分母の(z−1)の項には手をつけない．もう一方の(z+1)の方を変形して「公比」を引き出そうと考える．その結果，上の式のような形にたどり着く．

最後の項に等比級数の式を適用すると

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

(4)　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}z^n$ の収束半径を求めよ．　(配点：10 点)

(解答例)

ダランベールの評価式を用いると

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(3\frac{n+1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3\frac{1+1/n}{1+2/n}\right)=3$$

より，収束半径 R は　1／3

問題 3.

(1)	$2\pi i$	(2)	$\dfrac{\pi e i}{3}$	(3)	$\dfrac{\pi}{3}$	(4)	$\dfrac{\pi}{2}$

(1) 積分路 C が，中心 z=1，半径 2 の円のとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{2z+1}{z^2+z-1}dz$ を計算せよ．

(配点：10 点)

(解答例)

被積分関数は $\displaystyle\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$

積分路 C の内側の特異点は z=1 のみである．

最右辺第 2 項に対してコーシーの積分公式 $\displaystyle f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ で $f(z)$=1 に相当するから $f(z_0)$=1 により，積分値は z_0 によらず $2\pi i$ になる，と考えても良いし,一位の極の留数による求め方をしても $\displaystyle \mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to1}\left\{(z-1)\frac{2z-1}{(z+2)(z-1)}\right\}=\lim_{z\to1}\frac{2z+1}{z+2}=1$ 　だから，

積分値＝$2\pi i$×留数＝$2\pi i$　としても同じ答えが得られる．

(2) 積分路 C が，中心 z=0，半径 2 の円のとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4}dz$ を計算せよ．

(配点：10 点)

(解答例１：留数を使う方法)

積分路 C 内の特異点は z=1 のみで，4 位の極であるから m=4 として留数を求める式を使うと，まず被積分関数に$(z-4)^4$ を乗じて 3 回微分すると e^z．$z\to1$ として 3!で割り算すると

Res(1)=e/6　　よって積分の値は留数に 2πi を乗じて　$\pi ei/3$ (答)

(解答例２：グルサの公式を使う方法)

グルサの公式　$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$　で n=3, $f(z)=e^z$ とおくと，

$$f^{(3)}(z)=\frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4}dz \quad\Leftrightarrow\quad \int_C \frac{f(z)}{(z-1)^4}dz=\frac{2\pi i}{6}f^{(3)}(1)$$

$f(z)=e^z$ の 3 回微分は $f^{(3)}(z)=e^z$ だから，$f^{(3)}(1)=e^1=e$　よって積分値は $\dfrac{\pi ei}{3}$ (答)

(解答例 1)と(解答例 2)は限りなく同じことをやっていることがわかる．

(解答例３：級数展開によって極の位数を確認し，あわせて，直接留数を求める方法)

被積分関数をローラン展開する．そのためにまず e^z を z=1 を中心にテーラー展開する．

e^u のマクローリン展開は $e^u=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$　ここに $u=z-1$ を代入すると $e^{z-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$

(両辺に e を掛けて) $\Leftrightarrow$ $$e^z=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}=e+e(z-1)+\frac{e(z-1)^2}{2!}+\frac{e(z-1)^3}{3!}+\frac{e(z-1)^4}{4!}+\ldots$$

よって，$$\frac{e^z}{(z-1)^4}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-4}}{n!}=\frac{e}{(z-1)^4}+\frac{e}{(z-1)^3}+\frac{e}{2!(z-1)^2}+\frac{e}{3!(z-1)}+\frac{e}{4!}+\ldots$$

ここから，被積分関数が 4 位の極であることが確認され，あわせて，$(z-1)^{-1}$ の係数である留数が $e/6$ であることがわかる．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ を計算せよ． (配点：10 点)

(解答例)

積分路を複素平面上の単位円 C: $|z|=1$ にとり媒介変数表示すると $z=e^{i\theta}$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

すると，$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ と表されるので，これを与式に代入．さらに

$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Leftrightarrow d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ を用いて積分変数を変換すると，求める積分＝

$$\int_C\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{5-4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz=\int_C\frac{z^2+1}{10z-4z^2-4}\frac{1}{iz}dz=\int_C\frac{z^2+1}{z(z-2)(z-1/2)}\frac{1}{(-4i)}dz$$

積分路 C(単位円)内の特異点は $z=0$ と 1/2 で 1 位の極．留数を求めると

$\mathrm{Res}(0)=\dfrac{1}{-4i}$，および， $\mathrm{Res}(1/2)=(-5/3)\times\dfrac{1}{-4i}=\dfrac{5}{12i}$

よって積分値＝$2\pi i\left(\dfrac{1}{-4i}+\dfrac{5}{12i}\right)=2\pi\times\dfrac{2}{12}=\underline{\dfrac{\pi}{3}}$ (答)

(4) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ を計算せよ． (配点：10 点)

(解答例 1)

被積分関数を $f(z)$ とおくと， $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ すなわち，

複素平面の<u>上半面</u>にある特異点は $z=i$ のみであり，これは 2 位の極である．

留数を求めると，$f(z)$ に $(z-i)^2$ を乗じて $\dfrac{1}{(z+i)^2}$． これを 1 回微分して $\dfrac{-2}{(z+i)^3}$，

$z\to i$ とすると，$\dfrac{-2}{(2i)^3}=\dfrac{1}{4i}$ ． よって半円状の周回積分の値は $2\pi i\times\dfrac{1}{4i}=\dfrac{\pi}{2}$ …(☆)

一方，半径 R の半円状の円弧 S に沿った線積分の値を調べると，$z=Re^{i\theta}$ とおいて，また，

$dz=iRe^{i\theta}d\theta$ より，$\int_S f(z)dz=\int_0^{2\pi}\frac{iRe^{i\theta}}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2}d\theta$ となる．$\left|ie^{i\theta}\right|=\left|e^{i\theta}\right|=1$ であり，分母の R の次数は分子の R の次数より 2 以上大きいので，$R\to\infty$ で被積分関数は 0 になり，その結果，(不定積分が定数になるので) 定積分の値→0 が保証される．この結果，求める実積分は先に留数から求めた通り(☆)となる．すなわち，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\underline{\frac{\pi}{2}}$ (答)

(解答例２)

本講義の主題とは直接関係ないが，(残念ながら？) 本問の積分は複素関数を使わずとも，実関数のまま，$x=\tan\theta$ の変数変換で解くことができてしまうので，参考までに別解として示しておく．式変形に使う三角関数の式を下記に挙げておく．(必要に応じて導出できるようにしておくこと．)

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$，$(\tan\theta)'=\frac{1}{\cos^2\theta}$

まず $x=\tan\theta$ と変数変換すると，$1+x^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

より，$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ を使って cos の次数を下げると

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left[t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}+\underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\boxed{=0}}$$

$$=\underline{\frac{\pi}{2}\quad\text{(答)}}$$