解析学　理解度の確認（２）

答案用紙に学籍番号，氏名，問題番号を明記．計算過程の記述を重視します．
大問１題につき１枚の解答用紙を使用のこと（裏表使用可）．

問題 1.

(1)　コーシーの積分定理を述べよ．（証明は必要ないが,証明にまで言及があれば加点対象とする．）

(2)　複素平面上の点 z_0 を中心とする半径 r の円を積分路 C: $|z-z_0|=r$ $(r>0)$ とするとき，積分路 C を，媒介変数を用いて式で示せ．

(3)　閉曲線 C とその内部を含む領域で関数 $f(z)$が正則であるとき，(2)の積分路 C で $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ を計算し，最後に $r\to 0$ とすることで，その値を z_0, $f(z)$等を用いて式で示せ．(定理･公式を使って求めるのではなく, (2)の積分路で線積分を実際に実行することにより求めてください．計算過程を重視します．)

問題 2.

(1)　関数 $f(z)=\bar{z}$ を,点 0 から点 $1+i$ まで下に示す積分路に沿って複素積分せよ．

(a)　積分路 C_a：点 0 と点 $1+i$ を結ぶ線分

(b)　積分路 C_b：放物線 $y^2=x$ の点 0 から $1+i$ まで(ヒント: $y=t$ とおく)

(2)　$f(z)=\dfrac{1}{z}$ を，中心 $z=1$ でテーラー展開し，続いて収束半径を求めよ．

(3)　$f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ を，$z=1$ を中心として，次の範囲でべき級数展開せよ．

(a)　$|z-1|<2$　　　(b)　$|z-1|>2$

(4)　べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}z^n$ の収束半径を求めよ．

→裏面に　問題 3

問題 3.　　　(どのように解いてもかまいませんが計算過程を示してください)

(1) 積分路 C が，中心 z=1，半径 2 の円のとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{2z+1}{z^2+z-2}dz$ を計算せよ.

(2) 積分路 C が，中心 z=0，半径 2 の円のとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4}dz$ を計算せよ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ を計算せよ.

(4) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ を計算せよ.

【参考】

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right\}$$

$f(z)=h(z)/g(z)$, $\{g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0\}$: $\mathrm{Res}(f,z_0)=h(z_0)/g'(z_0)$