

解析学 理解度の確認 (1)

すべての答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を明記. 裏面も使用可.

問題 1. 複素数 z に関する以下の問いに答えよ. ただし, $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す.

(1) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ を示せ. (2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ を示せ. (3) $\operatorname{Re} z \leq |z|$ を示せ.

(4) 任意の複素数 z_1, z_2 について, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ が成り立つことを示せ.

(5) 任意の複素数 z_1, z_2 について, 不等式 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ が成り立つことを示せ.
ただし, 必要なら(1)~(4)を使ってよい.

問題 2.

(1) 偏角の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ として, 複素数 $-\frac{\pi}{2}i$ を極形式で表せ.

(2) 複素数 $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}\right)^{25}$ を, $x+iy$ 形式で示せ. (実数の指数乗はそのまま残してよい)

(3) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ の 4 乗根を, 偏角の範囲 $0 \leq \theta < 2\pi$ で求め, 式で示せ. また, 複素平面上におよその位置を図示せよ.

(4) $\cos z = i$ を満たす複素数 z を求めよ.

問題 3.

(1) $\log i$ の値を $x+iy$ 形式で示せ.

(2) $\overline{(\log z)} = \log \bar{z}$ を導出せよ. なお, $z = re^{i\theta}$ のとき, $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ (n は整数)である.

(3) $z \neq 0$ として, 複素関数 $f(z) = |z|^2$ が微分可能か否か, 微分の定義式に基づいて論ぜよ.

(4) 関数 $\sin(iz)$ が正則かを調べ, 正則な場合は導関数 $f'(z) \left(= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

を z の関数 として式で示せ. ただし, $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ とする.