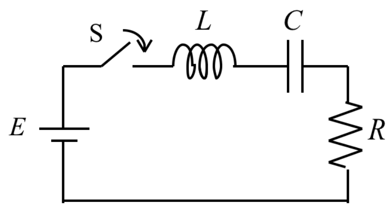
解析学演習　微分方程式(第 13 回)

2019/5/27

・答えだけでなく導出も書くこと。提出用紙には、学籍番号と氏名を記載すること。

1．右の $LCR$ 直列回路について考える。時刻 $t = 0$ でスイッチを投入する（コンデンサの初期電荷 $q(0) = 0$，回路の初期電流 $i(0) = 0$ とする）。




(1)　回路の $L$ と $C$ の値が与えられている条件のもとで、この回路を臨界制動となるようにしたい。$R$ の値をいくらとすれば良いか、$L$ と $C$ をもちいて表せ。

(2)　臨界制動時の電流 $i$ を時間 $t$ の関数として表し､概略をフリーハンドで図示せよ。ただし、$R$ を使わず、$L$ と $C$ で表すこと。また、極大・極小があれば、その時の $t$ と $i$ の値を示すこと。

2．以下の手順に従い、原点を確定特異点とする２階の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{4x^2}\left(1 - x^2\right) y = 0 \tag{2-1}$$

の一般解を級数表示で求めてみよう。

(1)　一般解として、

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{2-2}$$

の級数解を仮定し、式(2-1)に代入して、$x$ の最小べきの係数 $\lambda$ を定め、かつ、級数解の各項のべきの差が２となることを示せ。

(2)　$n = 2m$ と書くこととして、$A_{2m}$ のみたす漸化式をかけ。またそれを解いて $A_{2m}$ を $A_0$ で表し、１つ目の基本解が

$$y = u_1 \equiv A_0 x^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}\left[(2m)!!\right]^2} x^{2m} \tag{2-3}$$

とかけることを説明せよ。

(3)　2 つめの基本解、すなわち原点で非正則な解 $u_2$ として、$u_2(x) \equiv u_1(x)\ln x + w(x)$ を仮定して(2-1)に代入することにより、$w$ のみたす微分方程式が

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right) w(x) + x^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4l}{2^{2l}\left[(2l)!!\right]^2} x^{2l} = 0 \tag{2-4}$$

となることを示せ。

(4)　上記に対して $w(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{2n}$ として代入することにより、$B_0 = 0$ となることを説明せよ。また、$B_1$ を求めよ。

(5)　$B_n$ のみたす漸化式をかけ。ただし、$B_n$ を求める必要はない。