

[1] RC回路の解法

① 直流(DC)電源

図1に示すRC回路を考える。初期状態ではスイッチ S は開放されており、キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。直流電圧源の両端電圧を E とし、時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じたとき、時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求める。

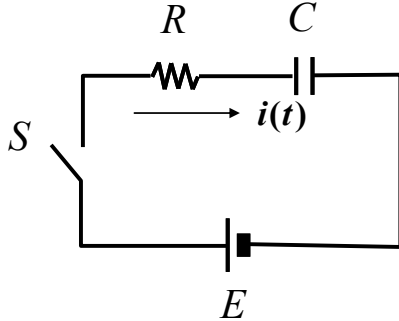


図1 RC回路(直流電圧源)

時刻 $t=0$ 以降における回路方程式は、電流 $i(t)$ を用いて： $Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E$ となる。ここで、両辺を t について微分すると、 $t=0$ 以降は E は一定であり $\frac{dE}{dt} = 0$ だから、

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR} i,$$

$$\frac{1}{i} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}, \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{1}{CR} \int dt,$$

$$\log|i| = -\frac{t}{CR} + k$$

ただし、 k は定数で、 $i = k'e^{-\frac{t}{CR}}$ ($k' = \pm e^k$)

$t=0$ でキャパシタ両端の電圧は 0 なので、 $i(0) = \frac{E}{R}$ 。よって $k' = \frac{E}{R}$ より、 $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$ となる。電流波形を模式的に図示すると図2のようになる。

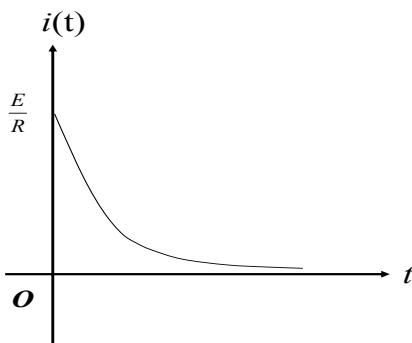


図2 図1の電流(直流電源)

② 交流(AC)電源

図3に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_0 \cos \omega_0 t$$

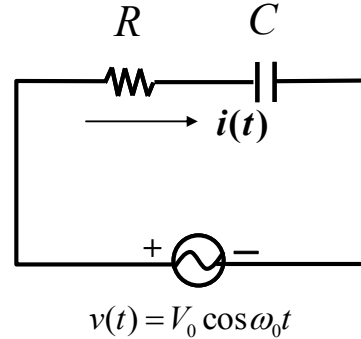


図3 RC回路(交流電圧源)

両辺を t について微分すると、

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -\omega_0 V_0 \sin \omega_0 t,$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{CR} = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t$$

テキスト

の式(5.1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$$p(t) = \frac{1}{CR}, \quad q(t) = -\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t \text{ なので、式(5.6)に代入して、}$$

$$i(t) = e^{-\int \frac{1}{CR} dt} \left[\int \left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin \omega_0 t \right) e^{\int \frac{1}{CR} dt} dt + c_0 \right]$$

$$= e^{-\frac{t}{CR}} \left[\left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \right) \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt + c_0 \right]$$

$$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt \text{ において部分積分すると、}$$

$$P = \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t - CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t dt$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t$$

$$- CR \omega_0 \left(CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega_0 t + CR \omega_0 \int e^{\frac{t}{CR}} \sin \omega_0 t dt \right)$$

$$= CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \left(-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t \right) - (\omega_0 CR)^2 P$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \left\{1 + (\omega_0 CR)^2\right\} P \\
& = CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \left(-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t\right), \\
P & = CR \cdot e^{\frac{t}{CR}} \frac{-\omega_0 CR \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t}{1 + (\omega_0 CR)^2} \\
& = -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \\
& \quad \times \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \sin \omega_0 t \right) \\
& = -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \\
& \quad \times (\cos \phi \cos \omega_0 t - \sin \phi \sin \omega_0 t) \\
& = -\frac{CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot e^{\frac{t}{CR}} \cos(\omega_0 t + \phi)
\end{aligned}$$

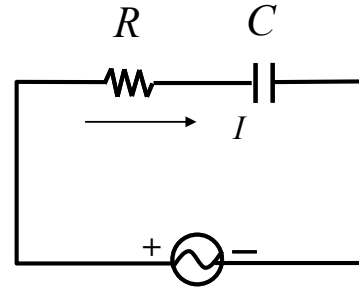
ここで $\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 CR}$, よって,

$$i(t) = c_0 e^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi).$$

$t = 0$ において電源の電圧は V_0 であり, キャパシタの蓄積電荷量が 0 なので $i(0) = \frac{V_0}{R}$ であるから, 上式に代入して,

$$\begin{aligned}
c_0 & = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos \phi \\
& = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cdot \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \\
& = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} \frac{(\omega_0 CR)^2}{1 + (\omega_0 CR)^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2} \\
\therefore i(t) & = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + (\omega_0 CR)^2} e^{-\frac{t}{CR}} \\
& \quad + \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)
\end{aligned}$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ とおいて解く(交流の定常解)。図4。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図4 RC回路(交流電圧源)

$$\begin{aligned}
I & = \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 CV_0 e^{j\omega_0 t}}{1 + j\omega_0 CR} \\
& = \frac{j\omega_0 C(1 - j\omega_0 CR)V_0 e^{j\omega_0 t}}{1 + (\omega_0 CR)^2} = \frac{\omega_0 C(\omega_0 CR + j)V_0 e^{j\omega_0 t}}{1 + (\omega_0 CR)^2} \\
& = \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} + j \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \right) e^{j\omega_0 t} \\
& = \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \times (\tan \phi = \frac{1}{\omega_0 CR}) \\
& = \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} e^{j(\omega_0 t + \phi)}
\end{aligned}$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{\omega_0 CV_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

この結果は②の定常解の項、すなわち非斉次の特殊解に対応する項と一致する。

[2] RL 回路の解法

① 直流(DC)電源: 図5の RC回路を考える。初期状態ではスイッチ S が開放されているとする。

直流電圧源の両端電圧を E とし, 時刻 $t = 0$ においてスイッチ S を閉じたとき, 時間 t に対して回路に流れる電流 $i(t)$ を求めてみよう。時刻 $t = 0$ 以降において, 電流 $i(t)$ を用いて電圧に対する式をた

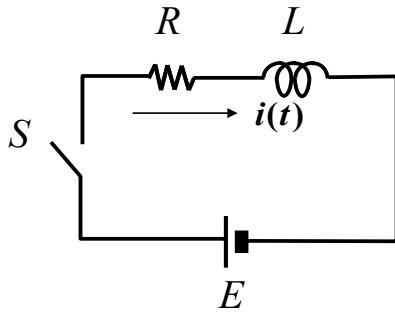


図5 RL 回路(直流電圧源)

てると以下の通りになる。

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = E, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

テキストの式(5.1)の変数 x を t に置き換えてあてはめると

$$p(t) = \frac{R}{L}, \quad q(t) = \frac{E}{L} \text{なので, 式(5.6)に代入して,}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right) \\ &= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt + c_0 \right) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c_0 \right) \\ &= \frac{E}{R} + c_0 e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

ここで $t=0$ においてインダクタ両端の電圧は E なので, $i(0)=0$ である。よって,

$$\frac{E}{R} + c_0 = 0, c_0 = -\frac{E}{R} \therefore i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

模式的に図示すれば、図6となる。

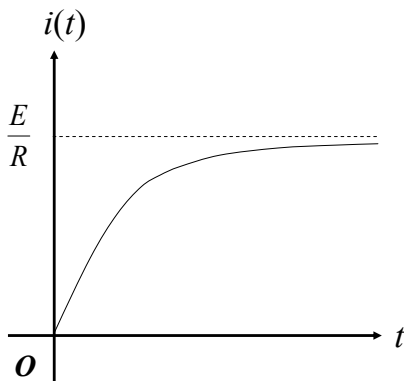


図6 図5の電流(直流電圧源)

② 交流(AC)電圧源

図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし $v(t) = V_0 \cos \omega_0 t$ ($t \geq 0$), 0 ($t < 0$) とおく。

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega_0 t, \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t$$

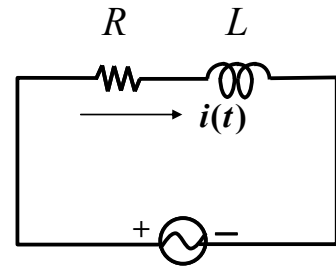


図7 RL 回路(交流電圧源)

テキストの式(5.1)の変数 x を t に置き換えて,

$$p(t) = \frac{R}{L}, \quad q(t) = \frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \text{なので, 式(5.6)に}$$

代入して,

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left[\int \left(\frac{V_0}{L} \cos \omega_0 t \right) e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + c_0 \right] \\ &= e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right) \end{aligned}$$

$$P = \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt \text{とにおいて部分積分すると,}$$

$$\begin{aligned} P &= \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t + \frac{L}{R} \omega_0 \int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t dt \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t \\ &\quad + \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0 L}{R} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt \right) \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right) - \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 P, \\ \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \right\} P &= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

$$\therefore P = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \frac{\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 L}{R} \sin \omega_0 t}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2}} \sin \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} (\cos \phi \cos \omega_0 t + \sin \phi \sin \omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi) \quad (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

$$\therefore i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega_0 t dt + c_0 \right)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \frac{L}{R} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

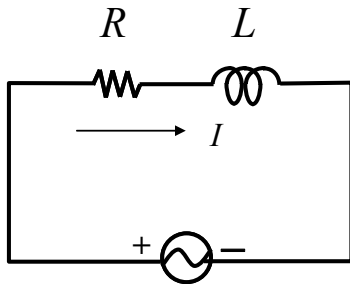
ここで $i(0) = 0$ なので、上式に代入して、

$$c_0 = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos \phi$$

$$= -\frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}$$

$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R} \left[-\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi) \right]$$

③ 交流回路を $v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$ とおいて解く(交流の定常解)。図8。



$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

図8 RL 回路(交流電圧源)

$$v(t) = V_0 e^{j\omega_0 t}$$

$$I = \frac{V_0 e^{j\omega_0 t}}{R + j\omega_0 L} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(j \frac{\omega_0 L}{R}\right)} e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1 - \left(j \frac{\omega_0 L}{R}\right)}{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} - j \frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \right) e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} e^{-j\phi} e^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} e^{j(\omega_0 t - \phi)} \quad (\tan \phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

[1]の RC 回路と比べると、位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。