回路解析～(LR,CR回路)

回路解析～(LR,CR回路)

目標

- RC，RL回路の過渡解析が解ける。
- RC，RL回路の過渡解析において，過渡解が斉次方程式の一般解に相当し，定常解が非斉次方程式の特殊解に相当することが理解できる。

1. 電流・抵抗・容量・誘導

- 電磁気学の基本量である電荷・電圧・電流など、また回路素子としての抵抗・容量・誘導などの機能については、知っているはずだが、まずは要点を復習しよう。

1.1 電流

Electric current

- 物体中を電荷が移動する時、電流が流れたという。 Electric charge
  - その物体を導体という。 Conductor
  - 電子回路では、電子が動くと考えてよい。
- 導体の断面を通って電荷Qが流れた時、電流Iは、電荷の時間的変化率であるから

$$\boxed{I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}$$

  - と与えられる。

1.2 抵抗

Resistance

- 導体の両端に一定の**電位差**Vを与えると、一定の**電流**Iが流れる。
- VとIの比を**抵抗**Rという。

$$\frac{V}{I} = R = \frac{1}{G}$$

  - $1/R$を電導度Gという。 Conductivity
  - V/Iが一定の時、この導体は「**オームの法則**」に従うという。

Ohm’s law

  - 消費電力Wは
    - $W = VI = RI^2$
  - と与えられる。

1.3 容量

Capacitance

Insulator

- 絶縁体を挟んで両面に導体がある時、等量の正負の電荷が対向し最終的には動かなくなる。
  - そこに電荷を蓄えることが可能。
  - その蓄積の大小を「容量C」という。
  - 回路素子としてはコンデンサと呼ばれる。 Capacitor
  - コンデンサの両端電極に電位差Vを与えた時の電荷をQとすると

Potential difference

$$\boxed{Q = CV}$$

1.4 誘導

Induction

- 導線をラセン状に巻いたものをコイルという。
  - これに電流を流すと磁気エネルギーが蓄えられる。
  - コイルを流れ得る電流 I が時間的に変化する時、この時間変化を起き難くする逆起電力Vが発生する。

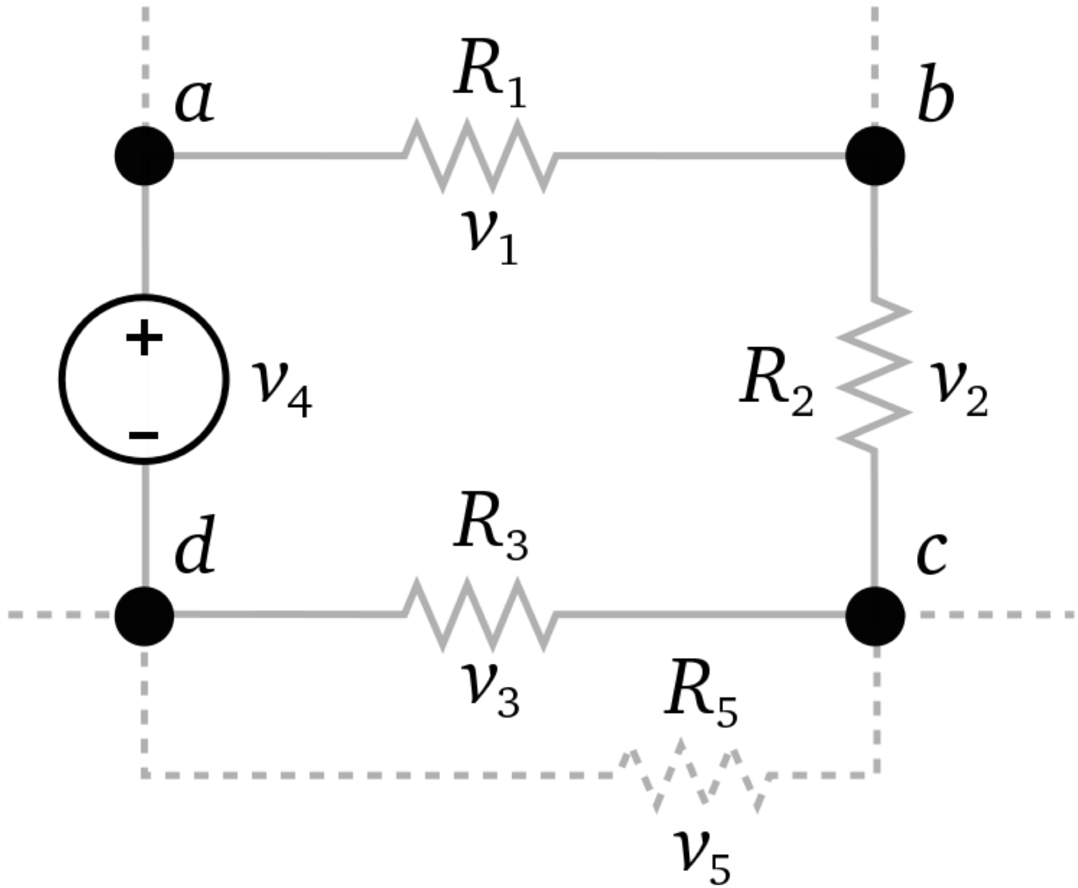
Counter-electromotive force

  - このような電流の時間微分に比例する抵抗性を「誘導 L」という。

$$\boxed{\left|V\right| = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

2.1 キルヒホッフの法則　1 電圧法則

- 電圧法則
  - 電源や抵抗などを含む任意の閉回路にそって一周すると、各素子の電圧降下の代数和はゼロである。

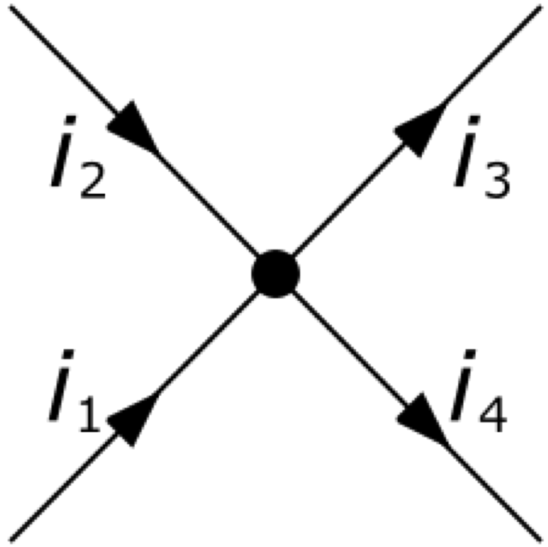


The sum of all the voltages around a loop is equal to zero.

$v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$

2.2 キルヒホッフの法則　2 電流法則

- 電流法則
  - 回路中の任意の連結点に流入出するすべての電流の代数和はゼロである。



$$i_1+i_2=i_3+i_4$$

3. RC回路

RC circuit

3.1 直流（DC）電源

DC power supply

- 図１に示すRC回路を考える。
- 初期状態ではスイッチ は開放されており，キャパシタには電荷が蓄積されていないとする。
- 直流電圧源の両端電圧をEとし，時刻 $t = 0$ においてスイッチSを閉じたとき，時間tに対して回路に流れる電流$i(t)$を求める。

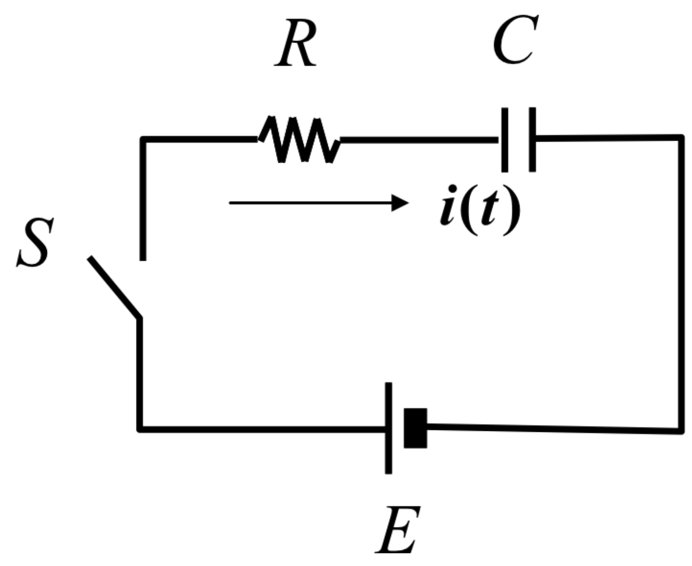


図１　RC 回路（直流電圧源）

(1) 直流電源の場合

- 時刻 $t=0$ 以降における回路方程式は，電流 $i(t)$ を用いて：

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t=E$$

- 両辺をtについて微分すると，$t=0$ 以降はEが一定であり $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$だから，

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=0,\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{CR}i,$$

$$\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{CR},\ \int\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{1}{CR}\int\mathrm{d}t$$

$$\log|i|=-\frac{t}{CR}+k$$ k: 任意定数，$i=k'\mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}}$ $(k'=\pm\mathrm{e}^{k})$

- $t = 0$でキャパシタ両端の電圧は0なので，$i(0) = E/R$ 。
- よって $k' = E/R$
- これより $$i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$
- となる。電流波形を模式的に図示すると図２のようになる。

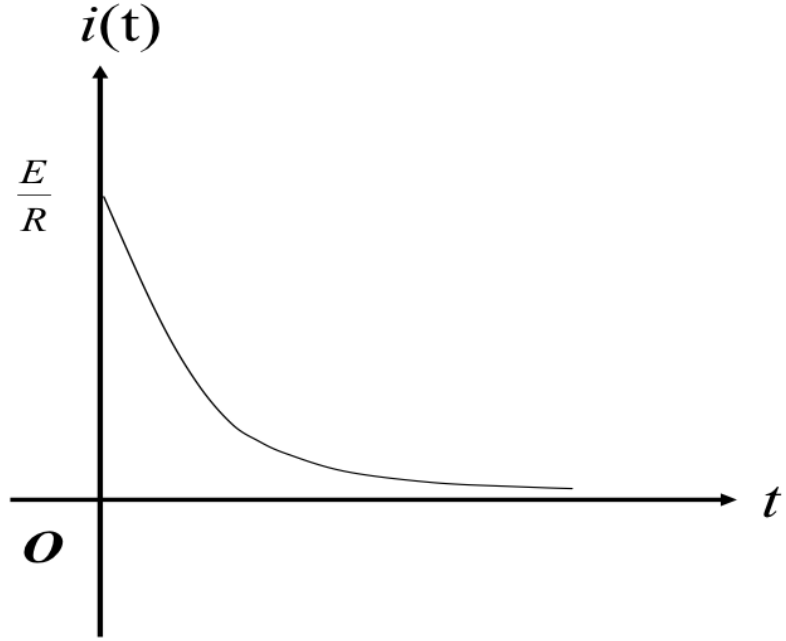


図２　図１の電流の時間依存性

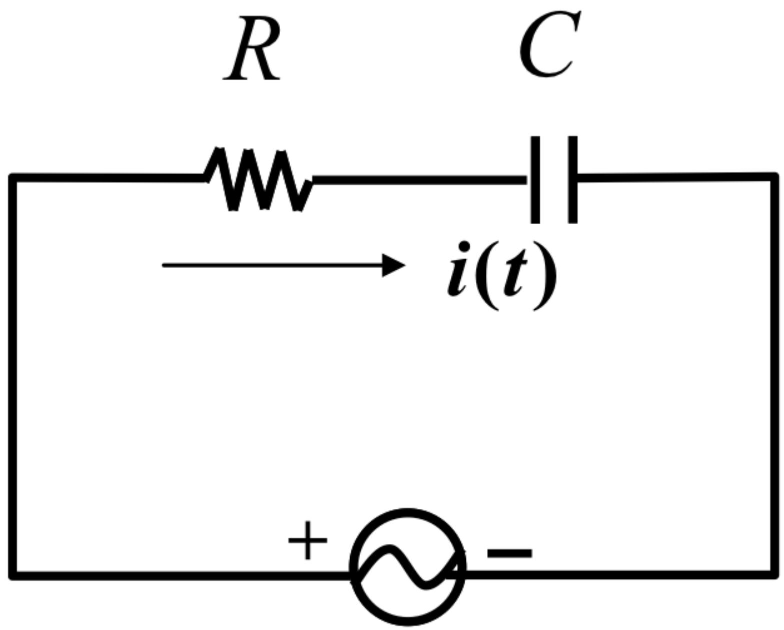
(2) 交流電源の場合

- 図3に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t = V_0 \cos\omega_0 t$$

  – ただし

$$v(t) = V_0 \cos\omega_0 t \qquad (t \geq 0), \qquad 0 \qquad (t < 0)$$



$v(t) = V_0 \cos\omega_0 t$

図3　*RC* 回路（交流電圧源）

- 両辺をtについて微分すると,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=-\omega_0 V_0 \sin\omega_0 t,$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{CR}=-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$$

- ここで、教科書の式(5.6)を参照すると

$$p(t)=\frac{1}{CR},\qquad q(t)=-\frac{\omega_0 V_0}{R}\sin\omega_0 t$$

  – と考えれば良いから

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{CR}\mathrm{d}t} \left\{ \int \left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \sin\omega_0 t \right) \mathrm{e}^{\int \frac{1}{CR}\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + c_0 \right\}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} \left\{ \left(-\frac{\omega_0 V_0}{R} \right) \int \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \sin\omega_0 t \,\mathrm{d}t + c_0 \right\}$$

- 計算を継続する $P = \int \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \sin\omega_0 t \,\mathrm{d}t$

$$= CR \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \sin\omega_0 t - CR\omega_0 \int \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \cos\omega_0 t \,\mathrm{d}t$$

$$= CR \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \sin\omega_0 t$$

$$-CR\omega_0 \left(CR \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \cos\omega_0 t + CR\omega_0 \int \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \sin\omega_0 t \,\mathrm{d}t \right)$$

$$= CR \cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}} \left(-\omega_0 CR \cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t \right) - (\omega_0 CR)^2 P$$

$$\left\{1+(\omega_0 CR)^2\right\}P$$

$$= CR\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\left(-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t\right)$$

$$\therefore P = CR\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\,\frac{-\omega_0 CR\cos\omega_0 t+\sin\omega_0 t}{1+(\omega_0 CR)^2}$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cos\omega_0 t-\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\left(\cos\phi\cos\omega_0 t-\sin\phi\sin\omega_0 t\right)$$

$$= -\frac{CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

- ただし $\tan\phi = \dfrac{1}{\omega_0 CR}$ とした。

$$\therefore i(t) = c_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

- $t = 0$において電源の電圧はV_0であり，キャパシタの蓄積電荷量が0なので $i(0) = V_0/R$ であるから,

$$c_0 = \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}} \cos\phi$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}} \cdot \frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}}$$

$$= \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} \frac{(\omega_0 CR)^2}{1+(\omega_0 CR)^2} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1+(\omega_0 CR)^2}$$

$$\therefore\ i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1+(\omega_0 CR)^2} \mathrm{e}^{-\frac{t}{CR}} + \frac{\omega_0 C V_0}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

(3) 交流の定常解

- 交流回路を $v(t) = V_0 \exp(j\omega_0 t)$とおいて解く（交流の定常解）。

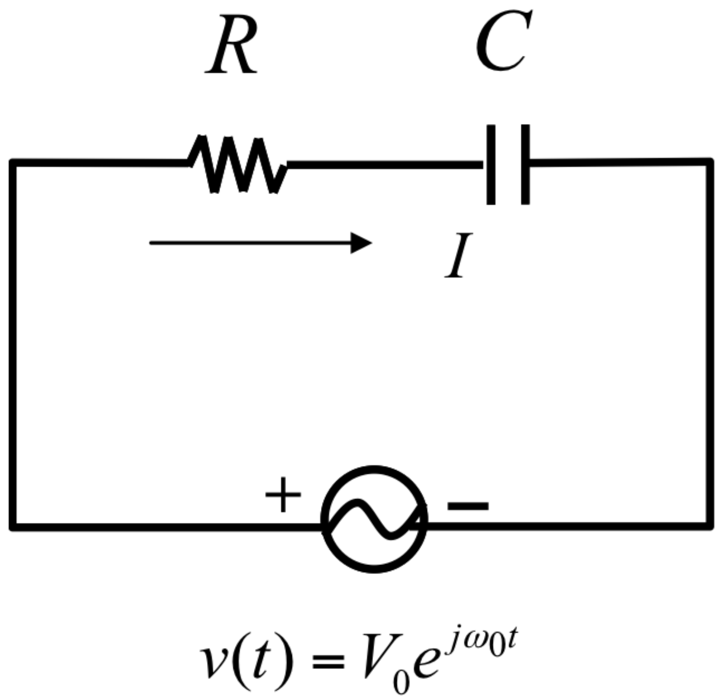


図4　RC 回路（交流電圧源）

$$I = \frac{V_o \mathrm{e}^{j\omega_0 t}}{R + \dfrac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{j\omega_0 C V_o \mathrm{e}^{j\omega_0 t}}{1 + j\omega_0 CR}$$

$$= \frac{j\omega_0 C(1 - j\omega_0 CR)V_o}{1 + (\omega_0 CR)^2} \mathrm{e}^{j\omega_0 t} = \frac{\omega_0 C(\omega_0 CR + j)V_o}{1 + (\omega_0 CR)^2} \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \left(\frac{\omega_0 CR}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} + j \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \right) \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \mathrm{e}^{j\phi} \mathrm{e}^{j\omega_0 t} \qquad \left(\tan\phi = \frac{1}{\omega_0 CR} \right)$$

$$= \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1 + (\omega_0 CR)^2}} \mathrm{e}^{j(\omega_0 t + \phi)}$$

- よって実部をとって $i(t)$ が求まる。

$$i(t) = \frac{\omega_0 C V_o}{\sqrt{1+(\omega_0 CR)^2}} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

  – この結果は交流(AC電源）の定常解の項と一致する。

4. RL回路

4.1 直流（DC）電源： 図５のRL回路を考える。

- 初期状態ではスイッチSが開放されているとする。

- 直流電圧源の両端電圧をEとし，時刻tにおいてスイッチSを閉じたとき，時間tに対して回路に流れる電流$i(t)$を求めてみよう。

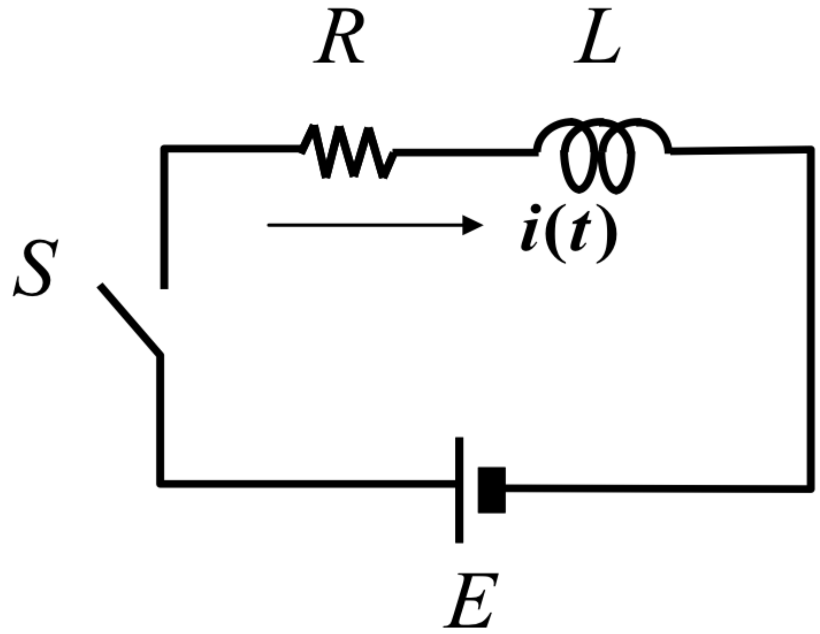


図５ RL回路（直流電圧源）

(1) 直流電源の場合

- 時刻t以降において，電流iを用いて電圧Eに対する式をたてると以下の通りになる。

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=E \quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L}$$

- そこで $p(t)=\dfrac{R}{L}, \quad q(t)=\dfrac{E}{L}$ として式(5.6) を適用すれば、

$$i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}dt}\left(\int\frac{E}{L}\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}dt}dt+c_0\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{L}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}dt+c_0\right)=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{E}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}+c_0\right)=\frac{E}{R}+c_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

- ここで$t = 0$においてインダクタ両端の電圧はEなので，$i(0) = 0$である。よって，

$$\frac{E}{R} + c_0 = 0,\ c_0 = -\frac{E}{R} \quad \therefore i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

- 模式的に図示すれば図6となる。

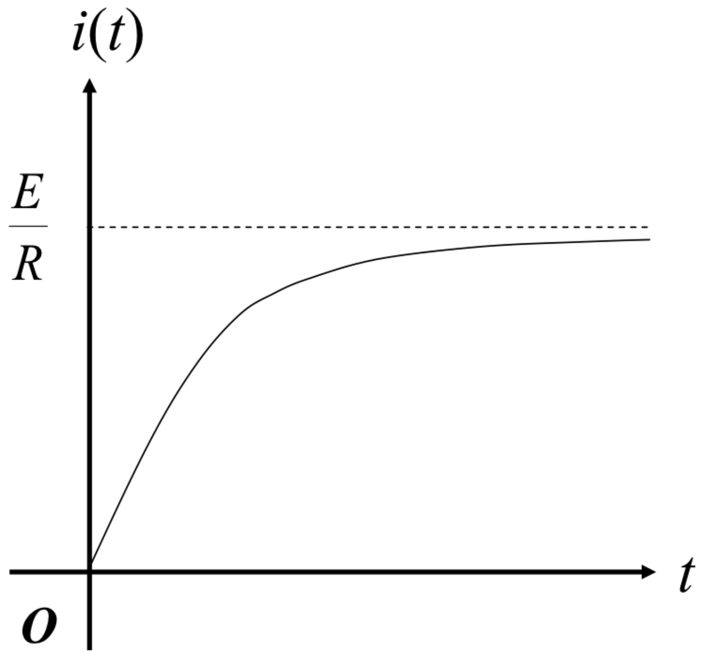


図6　図5の電流（直流電源）

(2) 交流電源の場合

- 図7に示す回路に対して電圧の式を立てると以下の通りとなる。ただし

$$v(t) = V_0 \cos\omega_0 t \qquad (t \geq 0), \qquad 0 \qquad (t < 0)$$

- とおく。

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_0 \cos\omega_0 t,$$

  – すなわち

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$$

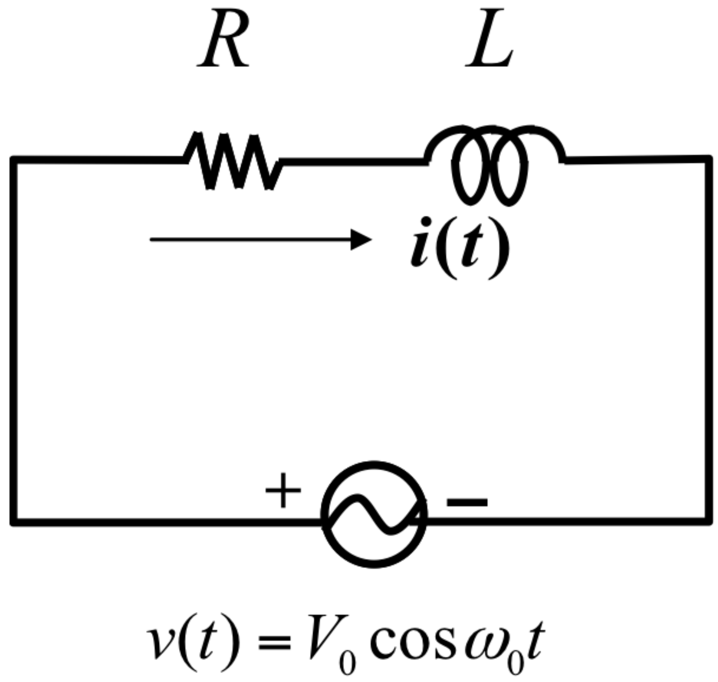


図7　RL 回路（交流電圧源）

- 式(5.6)を適用すると、 $p(t)=\frac{R}{L},\qquad q(t)=\frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t$
- であるから $i(t)=\mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\left\{\int\left(\frac{V_0}{L}\cos\omega_0 t\right)\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_0\right\}$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{V_0}{L}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t+C_0\right)$$

- ここで $P=\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t$ とおいて部分積分を適用すると

$$P=\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t+\frac{L}{R}\omega_0\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\left(\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega_0 t-\frac{\omega_0 L}{R}\int \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\cos\omega_0 t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right)-(\frac{\omega_0 L}{R})^2 P,$$ よって

$$\left\{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2\right\}P=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t\right)$$

$$\therefore P=\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\frac{\cos\omega_0 t+\frac{\omega_0 L}{R}\sin\omega_0 t}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\frac{L}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos\omega_0 t+\frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\sin\omega_0 t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos\phi \cos\omega_0 t + \sin\phi \sin\omega_0 t\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega_0 t - \phi) \qquad (\tan\phi = \frac{\omega_0 L}{R})$$

$$\therefore i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos\omega_0 t \, dt + c_0 \right)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{L} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \frac{L}{R} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$= c_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

- 初期条件として$i(0) = 0$なので

$$c_0 = -\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos\phi$$

$$= -\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}} = -\frac{V_0}{R}\frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}$$

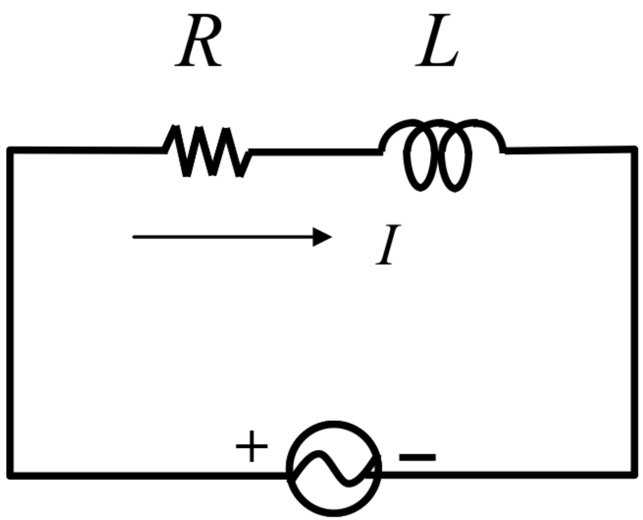
$$\therefore i(t) = \frac{V_0}{R}\left[-\frac{1}{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R})^2}}\cos(\omega_0 t - \phi)\right]$$

(3) RL回路の交流定常解

- $v(t) = V_0 \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ とおいて解く。図8参照

$$I = \frac{V_o e^{j\omega_0 t}}{R + j\omega_0 L} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{1 + \left(j \dfrac{\omega_0 L}{R} \right)} \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1 - \left(j \dfrac{\omega_0 L}{R} \right)}{1 + \left(\dfrac{\omega_0 L}{R} \right)^2} \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$



$$v(t) = V_0 e^{j\omega 0 t}$$

図8　RL 回路（交流電圧源）

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}-j\frac{\frac{\omega_0 L}{R}}{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}-}\right)\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\mathrm{e}^{-j\phi}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}}\mathrm{e}^{j(\omega_0 t-\phi)} \qquad (\tan\phi=\frac{\omega_0 L}{R})$$

- 上式の実部をとって解$i(t)$を得る。

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2}} \cos(\omega_0 t - \phi)$$

  – RC回路と比べると，位相の進み・遅れの関係が逆であることがわかる。

II. 線形微分方程式

6. 2階線形方程式の解の構造

目標

- 2階線形方程式の意味が理解できる
- 2階微分方程式の一般解には2つの任意定数が含まれることを理解している
- 2階線形方程式の解がただ1つだけ必ず存在するための条件が理解できる
- 2つの基本解の1次結合の意味および1次独立の条件が理解できる
- 重ね合わせの定理が理解できる

6.1　2階線形方程式とは

- 未知関数y, その1階導関数y', その2階導関数y''について1次方程式になっている微分方程式

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \qquad (6.1)$$

- を**2階線形方程式**という。$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$はある区間上で連続であり、この区間上での解を考える。

解の一意性

- 5.2節の1階線形方程式同様、その区間内の任意の点$x = X$でのy, y'の値を任意に指定すると、これらを満足する微分方程式(6.1)の解がただ1つだけ必ず存在する。

- これを解の**一意性**という。

- 証明略。

基礎的＝理学部数学科的な微分方程式論に興味のある方へ

- 任意の初期条件を満たす微分方程式の特殊解が、一意に定まるか否かは数学的には重大問題である。
  - 工学的・物理的には、因果的に有意であるか否か、は明らかなことが多い。
  - 工学では実験的な検証により、確認ができるので、余り問題となることはない。
- 本講義の範囲を超えるが、たとえば
  - http://www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module=General&action=DownLoad&file=201516438-466-0-1.pdf&type=cal&JWC=201516438
  - のpp. 17 – 24　などを参照されたい

理学部的な事項が好きならば…

- 進んだ課題として
  - 大域解と局所解
  - 局所解の存在定理
  - **Lipschitz 条件**
- などを学ぶと、解の存在と一意性を証明することが可能となることを、言及しておく。

本題に戻って…

- 式(6.1)において恒等的に$r(x) = 0$である方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6.2)$$

- を、**2階線形斉次方程式**(または2階線形同次方程式)といい、その解法は7 – 8章で扱う。

- また、式(6.1)において$r(x) \neq 0$であるものを**2階線形非斉次方程式**(または2階線形非同次方程式)といい、その解法は9章で扱う。

6.2 解の線形性

- 2つの関数y_1, y_2が2階**線形斉次**方程式(6.2)の解であれば、これらの**1次結合**$C_1y_1 + C_2y_2$も解であることを示す。ここでC_1, C_2は定数である。

Linear combination

  - y_1, y_2が2階線形斉次方程式(6.2)の解であるので

$$y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 = 0 \qquad (6.3)$$

$$y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = 0 \qquad (6.4)$$

が成り立つ。式(6.3)×C_1+式(6.4)×C_2を計算すると

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

となり、これは$C_1y_1 + C_2y_2$が解であることを示している。

6.3　解の1次独立と1次従属

- 2つの関数y_1, y_2が比例しない時、すなわち定数$C_1 = C_2 = 0$の時だけ恒等的に$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$が成り立つ時、y_1とy_2は**1次独立**であるという。

Linear independence

- 一方、y_1とy_2が比例する時、すなわち$C_1 = C_2 = 0$以外の定数C_1, C_2で恒等的に$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$が成り立つ時、y_1とy_2は**1次従属**であるという。

Linear dependence

ロンスキー行列式(ロンスキアン)

Wronskian

- xを変数とする2つの関数y_1, y_2について、

$$w\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

- を、y_1とy_2のロンスキアン(またはロンスキー行列式)という。
  - y_1, y_2が2階線形斉次方程式(6.2)の解である時、y_1, y_2が1次独立である必要十分条件はxによらず$w(y_1, y_2) \neq 0$であることを以下に示す。

Necessary and sufficient condition

ロンスキアンと1次独立

- まず$w(y_1, y_2) \neq 0$の時、y_1, y_2が1次独立であることを示す。

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \qquad (6.5)$$

の両辺をxで微分すると、

$$C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0 \qquad (6.6)$$

となる。式(6.5)と式(6.6)をC_1, C_2についての連立1次方程式とみなすと、

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。$w(y_1, y_2) \neq 0$より、

ロンスキアンと1次独立　十分性

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{w(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よって、式(6.5)を満たすC_1, C_2はともにゼロであるので、y_1, y_2は1次独立である。

ロンスキアンと1次独立　必要性

- 逆に、y_1, y_2が1次独立である時、$w(y_1, y_2) \neq 0$であることを、その**対偶**である「(恒等的に) $w(y_1, y_2) = 0$のとき、y_1, y_2が1次従属であることで示そう。

Contraposition

  - 命題「Aであるならば Bである」の対偶は「Bでないならば Aでない」である。元の命題とその対偶の真偽は必ず一致する。

- $w(y_1, y_2) = 0$より、ある点$x = X$で次の連立1次方程式は $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる解を持つ。

ロンスキアンと1次独立　必要性のつづき

- $C_1 y_1(X) + C_2 y_2(X) = 0$
- $C_1 y_1'(X) + C_2 y_2'(X) = 0$
- 上記のC_1, C_2を用いて、y_1とy_2の1次結合 $z(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ を考えると、6.2節で説明したように、zは斉次方程式(6.2)の解であり、$x = X$において

$$z(X) = C_1 y_1(X) + C_2 y_2(X) = 0,$$

$$z'(X) = C_1 y_1'(X) + C_2 y_2'(X) = 0$$

- を満足する。一方、任意のxに対してゼロとなる定数関数$n(x)$も2解線形斉次方程式(6.2)の解であり、$x = X$において$n(X) = 0$および$n'(X) = 0$となる。

ロンスキアンと1次独立　必要性のつづき

- これは$z(x)$と同じ初期条件を満足するので、解の一意性から$z(x) = n(x)$, すなわち

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

- となる。$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$であるので、$y_1$と$y_2$は1次従属である。

- 斉次方程式(6.2)の2つの解y_1とy_2が1次独立である時、y_1, y_2を斉次方程式(6.2)の**基本解**という。

例題6.1　2つの関数 $y_1 = x$ と $y_2 = x^2$ は1次独立であることを示す。

(解)　$w(x, x^2) = x \cdot (x^2)' - x^2 \cdot x' = x \cdot 2x - x \cdot 1$

$= 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0$

となるので、１次独立である。

例題6.2　2つの関数 $y_1 = x$ と $y_2 = 2x$ は1次従属であることを示す。

（解）　$w\,(x, 2x) = x\cdot(2x)' - 2x\cdot x' = x\cdot 2 - 2x\cdot 1$

$= 2x - 2x = 0$

となるので、１次従属である。

Wronskianの拡張

- ここまでの議論は、*n*階線形微分方程式にも拡張できる

$$w\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

  - これがゼロか否かで、1次独立か否かを判定できる
  - しかも、wはある点でゼロなら、定義域全体で恒等的にゼロとなる性質を持っている。
  - http://www.ocw.titech.ac.jp/index.php?module=General&action=DownLoad&file=201516438-466-0-1.pdf&type=cal&JWC=201516438 のpp. 27 – 29 を参照。

6.4 非斉次方程式の一般解

- 線形非斉次方程式の一般解は、対応する線形斉次方程式の一般解に、線形非斉次方程式の特殊解を加えたものであることを、2階線形方程式を例に示す。
- 2階線形非斉次方程式(6.1)の一般解をy, 特殊解をy_sとする。これらの解は式(6.1)を満足するので、

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x),$$

$$y_s'' + p(x)\,y_s' + q(x)\,y_s = r(x)$$

となる。これら2式の両辺の差をとると

6.4　　　つづき

$$(y - y_s)'' + p(x)\,(y - y_s)' + q(x)\,(y - y_s) = 0$$

となる。この式は2階線形斉次方程式(6.2)であるので、$y - y_s$はその解であり、2階線形斉次方程式の一般解$C_1y_1 + C_2y_2$と等しい。これをy_hとおくと、

$$y = y_h + y_s = C_1y_1 + C_2y_2 + y_s$$

となり、2階線形非斉次方程式の一般解は、対応する2階線形斉次方程式の一般解y_hと2階線形非斉次方程式の特殊解y_sの和になる。

6.4 さらにつづき

- 逆に、2階線形斉次方程式の一般解をy_h, 2階線形非斉次方程式の特殊解をy_sとすると、それらはそれぞれ以下の式を満足する。

$$y_h'' + p(x)\, y_h' + q(x)\, y_h = 0,$$

$$y_s'' + p(x)\, y_s' + q(x)\, y_s = r(x)$$

これら2式の両辺の和を取ると

$$(y_h + y_s)'' + p(x)\,(y_h + y_s)' + q(x)\,(y_h + y_s) = r(x)$$

すなわち、$y_h + y_s$は2階線形非斉次方程式の解であることがわかる。

- なお、1階線形非斉次方程式$y' + p(x)\, y = q(x)$についても同様に示すことができる。

6.5　解の重ね合わせの定理

- 2階線形非斉次方程式$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x)$の特殊解を$y_1$とし、$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_2(x)$の特殊解を$y_2$とする。
- このとき、$y'' + p(x)y' + q(x)y = r_1(x) + r_2(x)$の特殊解の1つが$y_1 + y_2$となっている。
- これを**解の重ね合わせの定理**という。
- y_1 と y_2はそれぞれ以下の式を満足する。

$$y_1'' + p(x)\, y_1' + q(x)\, y_1 = r_1(x),$$

$$y_2'' + p(x)\, y_2' + q(x)\, y_2 = r_2(x)$$

6.5 つづき

- これら2つの式の両辺の和を取ると

$$(y_1 + y_2)'' + p(x)\,(y_1 + y_2)' + q(x)\,(y_1 + y_2) = r_1(x) + r_2(x)$$

となる。すなわち、$y_1 + y_2$は

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y \;\; = r_1(x) + r_2(x)$$

の特殊解となっている。

- なお、1階線形非斉次方程式$y' + p(x)\,y = q(x)$についても同様に示すことができる。

7. 定係数2階線形斉次方程式

目標

- 定係数2階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 定係数2階線形斉次方程式の特性方程式が導ける
- 特性方程式が異なる2つの解を持つ場合について一般解を求められる
- 特性方程式が2重解を持つ場合について一般解を求められる

7.1　定係数2階線形斉次方程式とは

- 2階線形斉次方程式 $y'' + p(x)\, y' + q'(x)\, y = 0$ において、係数$p(x)$と$q(x)$がそれぞれ定数PとQになっている方程式

$$y'' + Py' + Qy = 0 \qquad (7.1)$$

を定係数2階線形斉次方程式という。

- また、式(7.1)と同じ係数を持つλに関する2次方程式

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0 \qquad (7.2)$$

を微分方程式(7.1)の特性方程式という。

7.2 特性方程式が異なる2つの解を持つ場合

- 特性方程式(7.2)が2つの解A_1とA_2を持つことから

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = (\lambda - A_1)(\lambda - A_2)$$

$$= \lambda^2 - (A_1 + A_2)\lambda + A_1 A_2 = 0$$

となる。係数を比較すると、2次方程式の解と係数の関係　$P = -(A_1 + A_2),\ Q = A_1 A_2$ が得られる。

よって、微分方程式(7.1)は

$$y'' - (A_1 + A_2)\, y' + A_1 A_2 y = 0$$

となる。この微分方程式は

$$(y' - A_2 y)' = A_1(y' - A_2 y) \qquad (7.4)$$

$$(y' - A_1 y)' = A_2(y' - A_1 y) \qquad (7.5)$$

の2通りに書き換えられる。

- 式(7.4)は、$y' - A_2 y = u$ とおくと、1階斉次方程式

$$u' = A_1 u \qquad (7.6)$$

となる。この式は $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = A_1 u$ であるので、その一般解は例題2.1で示したように

$u = C_{10} \exp(A_1 x)$ となる。$u = y' - A_2 y$ であるので

$$y' - A_2 y = C_{10} \exp(A_1 x) \qquad (7.7)$$

が得られる。式(7.5)も同様にして

$$y' - A_1 y = C_{20}\exp(A_2 x) \qquad (7.8)$$

が得られる。式(7.7)の両辺から式(7.8)の両辺を相減じてy'を消去し、$A_1 - A_2\ (\neq 0)$で割ると

$$y = \frac{C_{10}}{A_1 - A_2}\exp\left(A_1 x\right) - \frac{C_{20}}{A_1 - A_2}\exp\left(A_2 x\right)$$

$$= C_1 \exp\left(A_1 x\right) + C_2 \exp\left(A_2 x\right) \qquad (7.9)$$

となる。式(7.3)は2階微分方程式であるので、その一般解(7.9)は2つの任意定数C_1とC_2を含む。

- なお、特性方程式(7.2)の2つの解が**互いに共役な複素解** $A_1 = A + Bi$ と $A_2 = A - Bi$ の場合、一般解(7.9)は次のように**実数の解に変形が可能**である。

$$y = C_1 \exp\{(A + Bi)x\} + C_2 \exp\{(A - Bi)x\}$$

$$= \exp(Ax)\{C_1 \exp(Bix) + C_2 \exp(-Bix)\}$$

$$= \exp(Ax)\{C_{1B} \cos(Bx) + C_{2B} \sin(Bx)\} \quad (7.10)$$

テキスト補足～(7.10)に関して

- 11章までの範囲の常微分方程式では、定義域・値域とも、実数の関数を扱っている。
- もちろん、7章の議論で、複素数を用いても全く問題はない。
  - 問題が(7.1)の形なら、大域解として複素変数に拡張が可能(説明略)
- が、最終解答は、できるだけ実数の形で書くのが適切
  - 見通しが良いし、解りやすい。
  - Eulerの公式はもちろん使える。任意定数も複素数として、**最終結果を実数**とする。(7.10)参照

テキスト補足～(7.1)–(7.9)の議論について

- テキストの変形、くどいと感じるかもしれない。
  - 以下の方が理解しやすい。
- 線形斉次方程式(7.1)の解として$y = \exp(\lambda x)$を仮定して代入する。

$$\lambda^2 \exp(\lambda x) + \lambda P \exp(\lambda x) + Q \exp(\lambda x) = 0$$

となる。上式に$\exp(-\lambda x)$をかけると、直ちに特性方程式

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0 \qquad (7.2)$$

が得られる。

- すなわち、特性方程式(7.2)の解Aが求まれば、$\exp(Ax)$は与式(7.1)の**基本解の一つ**。
  - 2次方程式であるから、重解でなければ、異なる2つの解A_1, A_2 $(A_1 \neq A_2)$が(7.2)から得られる。
  - この場合、$\exp(A_1x)$と$\exp(A_2x)$は1次独立な基本解である。(例題9.2参照)
- 式(7.1)は、線形斉次なので、1次独立な基本解の線形結合が、直ちに一般解を与えることとある。すなわち、(7.1)の一般解は

$$y = C_1 \exp(A_1x) + C_2 \exp(A_2x) \qquad (7.9)$$

となる。

- 従って、特性方程式の根が重解でない限りは、容易に定係数線形斉次方程式の一般解を求めることができる。
  - この議論は、3階以上の高階の線形斉次微分方程式にも拡張できる。
  - 特性方程式の根を$A_1, A_2, \ldots, A_n$とすると、$\exp(A_1 x), \exp(A_2 x), \ldots, \exp(A_n x)$は1次独立な基本解を与える。
- 重解の場合については、7.3節で検討しよう。

例題7.1　$y'' + y' - 2y = 0$ を解く。

(解)　特性方程式は$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ となる。
その解は$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ より
$A_1 = -2, A_2 = 1$と、2つの異なる解となる。

よって一般解は

$$y = C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp x$$

となる。

例題7.2　$y'' + B^2 y = 0$　を解く。ただし、B は実定数である。(なお、B^2とおいているのは一般解の形の簡潔化のため)

(解) 特性方程式は$\lambda^2 + B^2 = 0$ となる。

その解は $\lambda = \pm Bi$ となり、互いに共役な2つの複素解である。

よって一般解は

$$y = C_1 \cos(Bx) + C_2 \sin(Bx)$$

となる。

例題7.3　$y'' + y' + y = 0$ を解く。

(解) 特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ となる。その解は

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

となり、互いに共役な2つの複素解である。
よって一般解は、式(7.10)に $A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を代入し

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)\left\{C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

となる。

7.3 特性方程式が**2重解**を持つ場合

- 特性方程式(7.2)が2重解Aを持つ場合には、式(7.2)は

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = (\lambda - A)^2 = \lambda^2 - 2A\lambda + A^2 = 0$$

- となる。係数を比較すると、2次方程式の解と係数の関係 $P = -2A,\ Q = A^2$が得られる。よって微分方程式(7.1)は

$$y'' - 2Ay' + A^2 y = 0 \qquad (7.11)$$

となる。この微分方程式は

$$(y' - Ay)' = A(y' - Ay)$$

に書き換えられる。

- この微分方程式の一般解は、式(7.6)と同じように解くと、$u = C_1 \exp(Ax)$となる。すなわち、

$$y' - Ay = C_1 \exp(Ax) \qquad (7.12)$$

となる。この式は1階線形非斉次方程式であるので、定数変化法により以下の様に解ける。
  - 対応する斉次方程式は$y' - Ay = 0$ すなわち$y' = Ay$であるので、まずは斉次の一般解が $y = C_{10} \exp(Ax)$と求まる。そこで、C_{10}をxの未知関数 c と置き換え、$y = c \exp(Ax)$とおく。

- これを非斉次方程式(7.12)に代入すると

$$\left\{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\exp\left(Ax\right)+cA\exp\left(Ax\right)\right\}-A\left\{c\exp\left(Ax\right)\right\}=C_1\exp\left(Ax\right)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\exp\left(Ax\right)=C_1\exp\left(Ax\right)$$ すなわち $$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=C_1$$

- これを積分すれば $c = C_1x + C_2$ を得る。
- これより一般解として

$$y = (C_1x + C_2)\exp(Ax) \qquad (7.13)$$

が得られた。

- 式(7.11)は2階微分方程式であるので、その一般解(7.13)は2つの任意定数C_1とC_2を含む。

例題7.4 $y'' - 2y' + y = 0$ を解く。

(解) 特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ となる。

その解は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ より、$A = 1$

の2重解になる。

よって一般解は、

$$y = \left(C_1 x + C_2\right) \exp x$$

となる。

テキスト補足～(7.11)–(7.13)の議論について

- 重解の場合の一般解として、定数変化法での導出が示されている。
  - ここまで見てきたように、Lagrangeによって見出された定数変化法は、微分方程式の様々な場面において非常な威力を発揮する。

補足つづき

- 重解Aの場合でも、第１の基本解が$\exp(Ax)$であることは理解できるであろう。
- 第２の基本解が、$x\exp(Ax)$となることにつき、第10回pptのp. 39の様に、２つの解A_1, A_2において$A_2 \to A_1$の極限としても理解することができる。
  - まず、式(7.3)を$A_1 \neq A_2$の条件で解くとき、$\exp(A_1 x)$と$\exp(A_2 x)$が1次独立な基本解となることは理解できるであろう。

補足つづき

- とすれば、その任意の線形結合も特殊解の一つである。すなわち、

$$\frac{1}{A_2 - A_1}\exp\left(A_2 x\right) - \frac{1}{A_2 - A_1}\exp\left(A_1 x\right) = \frac{\exp\left(A_2 x\right) - \exp\left(A_1 x\right)}{A_2 - A_1}$$

も、一つの特殊解。ここで$A_2 \to A_1$とすると、微分の定義により

$$\lim_{A_2 \to A_1} \frac{\exp\left(A_2 x\right) - \exp\left(A_1 x\right)}{A_2 - A_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left\{\exp\left(Ax\right)\right\}\Big|_{A=A_1} = x\exp\left(A_1 x\right)$$

- となり、$x\exp(Ax)$ $(A_1 = A_2 = A)$が特殊解であるとともに、$\exp(Ax)$ と一次独立ゆえ、基本解の一つであると理解できるだろう。

補足

- 以上の2階定係数線形斉次微分方程式の一般解に関する考察は、n階の場合にも拡張できる。
- すなわち、特性方程式はn次方程式となり、その解をAとして、それがk重解であるならば、

$$\exp(Ax),\ x\exp(Ax),\ x^2\exp(Ax),\ldots,\ x^{k-1}\exp(Ax)$$

- は1次独立な基本解（の一部）となっている。

Joseph-Louis Lagrange

- ちなみに、Lagrangeは18世紀後半から19世紀初めに活躍。（フランス革命をはさんで前後）
  - マリーアントワネットにも数学を御進講
  - 微積分学、変分原理、解析力学、天文学、度量衡の統一、etc.
  - Wikipediaなどに詳細な説明あり

https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange#/media/File:%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6.jpg

まとめ：本日の確認事項

- RC，RL回路の過渡解析が解ける。
- RC，RL回路の過渡解析において，過渡解が斉次方程式の一般解に相当し，定常解が非斉次方程式の特殊解に相当することが理解できる。
- 2階線形方程式の意味が理解できる
- 2階微分方程式の一般解には2つの任意定数が含まれることを理解している
- 2階線形方程式の解がただ1つだけ必ず存在するための条件が理解できる
- 2つの基本解の1次結合の意味および1次独立の条件が理解できる
- 重ね合わせの定理が理解できる

まとめ:本日の確認事項

- 定係数2階線形斉次方程式の意味が理解できる
- 定係数2階線形斉次方程式の特性方程式が導ける
- 特性方程式が異なる2つの解を持つ場合について一般解を求められる
- 特性方程式が2重解を持つ場合について一般解を求められる