解析学演習　微分方程式(第 11 回)　解答例

2019/5/23

1.　(1)[1 点]　$w\left(\cos x, \sin x\right) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$ となるので，1 次独立である。

(2)[1 点]

$$w\left(\cos x, \sin x, \tan x\right) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \tan x \\ -\sin x & \cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ -\cos x & -\sin x & \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = 2\tan x - \tan x + \sin^2 x \tan x + \cos^2 x \tan x + \tan x + 2\tan^3 x$$

$= 3\tan x + 2\tan^3 x \neq 0$ となるので，1 次独立である。

(3) [1 点]　$y_3 = \sin\left(x + A\right) = \sin A \cos x + \cos A \sin x = \left(\sin A\right) y_1 + \left(\cos A\right) y_2$ となって、A は定数で従って $\sin A$ も $\cos A$ も定数であり、y_3 が y_1 と y_2 の線型結合で書かれてしまうので、1 次従属である。

2. (1) [1 点]　$q(0) = CE$

(2)[1 点]　図の条件では、i が正の時に q が増加するので $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ である。

(3) [1 点]　キルヒホッフの電圧法則から $\dfrac{1}{C} q\left(t\right) + iR = 0$ となる。これに(2)の解を用いれば、q のみたす微分方程式を $R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C} q\left(t\right) = 0$ と求めることができる。

(4) [1 点]　(3)の微分方程式は変数分離形になっており、容易に解くことができる。すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}q}{q\left(t\right)} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{RC}$ であるので、両辺を積分し $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}q}{q\left(t\right)} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{RC}$ となって、

$\ln\left|q\left(t\right)\right| = -\dfrac{t}{RC} + C_0$ から一般解 $q\left(t\right) = A_0 \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$ をうる。ここで、(1)の初期条件 $q(0) = CE$ を用いると、任意定数 $A_0 = CE$ となる。よって、コンデンサに蓄えられている電荷

q は $q\left(t\right)=CE\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)$ と求められた。

(5) [1 点]　(4)より $q\left(t\right)=CE\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)$、(2)より $i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ であるので、

$i\left(t\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q\left(t\right)=-\dfrac{CE}{RC}\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)=-\dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)$ と、回路を流れる電流を求めることができた。

(6) [1 点]　ジュール熱はコンデンサ両端の電圧 V と電流 i の積で与えられる。$V = iR$ であるので、求めうる単位時間あたりの発熱量は $iV = Ri^2 = \dfrac{E^2}{R}\exp\left(-\dfrac{2}{RC}t\right)$ となる。

(7) [1 点](6)の解を$(0, \infty)$で積分すると

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{E^2}{R}\exp\left(-\frac{2}{RC}t\right)\mathrm{d}t=\frac{E^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)\left[\exp\left(-\frac{2}{RC}t\right)\right]_0^\infty=\frac{1}{2}CE^2$ となる。$t=0$ におけるコンデンサ C の両端の電圧は E であるから、上記の発熱総量は、確かに $t = 0$ におけるコンデンサにおいて蓄えられていた静電エネルギー $\dfrac{1}{2}CE^2$ に一致している。