

1. (a) コイルでの電位降下の大きさは、一般に  $L \frac{di}{dt}$  である。ここに、 $i$  はコイルを流れる電流であり、電流の向きに関して、反時計方向を正としておけば、コンデンサに蓄えられた電荷  $q$  の減少する方向が  $i$  の正の方向であるので、 $-i = \frac{dq}{dt}$  となる。一方で、コンデンサの両端に現れる電圧を  $V$  とすると  $q = CV$  である。

よって、これらから、 $V = q/C = L \frac{di}{dt}$  を得る。さらに、 $-i = \frac{dq}{dt}$  をこの式に代入すると  $-L \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C}$  を得る。これを整理して、 $q$  のみたす方程式を

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (7)$$

と得ることができた。

(b) 上の微分方程式 (7) の特性方程式は  $\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$  より、その根は  $\lambda = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}$  となる ( $j$  は虚数単位)。よって  $q$  の一般解は

$$q = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \quad (8)$$

となる。

(c) 初期条件  $q(0) = q_0$  より、(8) に代入すると  $C_1 = q_0$  が得られる。次に、 $i(0) = -\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\Big|_{t=0} + \frac{C_2}{\sqrt{LC}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\Big|_{t=0} = \frac{C_2}{\sqrt{LC}} = 0$  となるので、 $C_2 = 0$  を得る。

よって、初期条件をみたす特殊解は

$$q = q_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) \quad (9)$$

となる。

2. (a)  $\frac{dy}{dx} = 2y$  より、 $y \neq 0$  ならば  $\int \frac{dy}{y} = 2 \int dx$  となって、積分を遂行すると  $\ln|y| = 2x + C_1$  ( $C_1$  は任意定数) より、 $y = C \exp(2x)$  となる ( $C$  は任意定数)。これは  $y = 0$  も含んでいるので、 $y = 0$  の場合も含めて、一般解は  $y = C \exp(2x)$  と求められた。

(b)  $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$  と置いて、問題文の式に代入する。すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0 \quad (10)$$

となる。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)A_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0 \quad (11)$$

を得る。この (11) の  $x^n$  の項の係数を両辺比較すれば、 $A_n$  に対して  $(n+1)A_{n+1} - 2A_n = 0$  なる漸化式を得る。あるいは

$$nA_n - 2A_{n-1} = 0 \quad (n \geq 0) \quad (12)$$

と書くことができる。

(c) 式 (12) より、

$$A_n = \frac{2}{n} A_{n-1} = \frac{2^2}{n(n-1)} A_{n-2} = \cdots = \frac{2^n}{n!} A_0 \quad (13)$$

を漸化式の解、すなわち一般項として

$$A_n = \frac{2^n}{n!} A_0 \quad (n \geq 0) \quad (14)$$

がえられた。

(d) 上記の  $A_n$  を  $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$  に代入すると

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} A_0 x^n = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2x)^n = A_0 \exp(2x) \quad (15)$$

となり、 $A_0 = C$  とおくことにより、級数解が (a) で求めた微分方程式の一般解と一致することが確かめられた。

**3.** (A)  $A: \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B: (\lambda+4)^2, \quad C: -4, \quad D: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$   
 $F: \exp(-4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad G: t \exp(-4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \exp(-4t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(B) (a) 連立微分方程式の第 1 式を変形すると  $y = -5x - \frac{dx}{dt}$  となるので、これを第 2 式に代入する。これにより  $\frac{d}{dt} \left( -5x - \frac{dx}{dt} \right) = x + 3 \left( 5x + \frac{dx}{dt} \right)$  を得る。整理すると、 $x$  に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 0 \quad (16)$$

が得られた。

(b) 式 (16) の特性方程式は  $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$  で、この根は  $\lambda = -4$  (重解) である。  
よって  $x$  の一般解は

$$x = C_3 \exp(-4t) + C_4 t \exp(-4t) \quad (17)$$

となる ( $C_3, C_4$  は任意定数)。

(c) (a) で示したように

$$y = -5x - \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

であるので、上式に (17) を代入する。 $y = -5[C_3 \exp(-4t) + C_4 t \exp(-4t)] - [(-4)C_3 \exp(-4t) + C_4 \exp(-4t) - 4C_4 t \exp(-4t)]$  となる。整理すると

$$y = -(C_3 + C_4) \exp(-4t) - C_4 t \exp(-4t) \quad (19)$$

が  $y$  の一般解として得られた。

(d) (A) で得られた  $x, y$  の解をそれぞれ表示すると

$$\begin{aligned} x &= C_1 \exp(-4t) + C_2 t \exp(-4t), \\ y &= -(C_1 + C_2) \exp(-4t) - C_2 t \exp(-4t) \end{aligned}$$

となる。 $C_1 = C_3, C_2 = C_4$  とおけば、両者の解が同一であることは明らかである。