令和元年度　解析学　赤塚担当分　試験問題　　　　　　　　　　2019/06/10

1. 図 **1** の $\boldsymbol{LC}$ 回路を解析する。$t = 0$ の時、コンデンサに蓄えられた電荷が q_0，コイルを流れる電流が 0 であった。すなわち初期電荷 $q(0) = q_0$，初期電流 $i(0) = 0$ とする。(10 点 ×3 = 30 点)

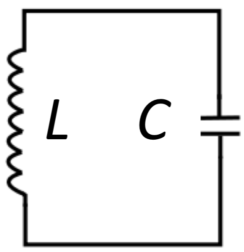

図 1　LC 共振回路

(a) コンデンサに蓄積される電荷 q に関する微分方程式を立てよ。

(b) q に対する微分方程式の一般解を求めよ。

(c) 初期条件から q の特殊解を求めよ。

2. 次の微分方程式を、異なる方法で解いて比較してみる。(10 点 ×4 = 40 点)

$$y' - 2y = 0 \tag{1}$$

(a) 式 (1) を、変数分離形と考えて、一般解を求めよ。

(b) 次に、y が x のベキ級数展開で与えられると仮定して、すなわち

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{2}$$

と書けると仮定して式 (1) に代入し、A_n がみたす漸化式を導け。

(c) A_n がみたす漸化式を解き、n および A_0 を用いて A_n を表せ。

(d) 上で求めた A_n を式 (2) に代入して得られる解が、(a) で求めた解と同一であることを示せ。

3. 以下の連立常微分方程式を解く事を考える。(合計 70 点)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -5x - y, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - 3y \tag{4}$$

(A) 式 (3)-(4) の一般解を得るべく、以下の空欄 $A - G$ を適切な数式・行列・ベクトル等で埋めよ。(5 点 ×7 = 35 点)

「式 (3)-(4) を 2 行 2 列の行列 (A) を用いてベクトル表示すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。行列 (A) の固有値 λ は固有方程式 $\det(A - \lambda I_2) = 0$ から求められる (ただし I_2 は 2×2 の単位行列)。これより、λ の従う 2 次方程式を (B) $= 0$ と得ることができる。これを解くと $\lambda =$ (C) と、重解が得られる。固有値 (C) に対応する狭義の固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1 =$ (D)(規格化不要) であり、1 次独立なものはこれのみである。そこで、広義の固有ベクトル $\boldsymbol{q}_2$ として $(A - \lambda I_2)\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_1$ となるベクトルを 1 つ求めると $\boldsymbol{q}_2 =$ (E)(規格化不要) である。よって、狭義の固有ベクトルのみで記述される式 (3)-(4) の第 1 の基本解 $\boldsymbol{x}_1$ として $\boldsymbol{x}_1 =$ (F), 広義固有ベクトルも含めて表される第 2 の基本解 $\boldsymbol{x}_2$ として $\boldsymbol{x}_2 =$ (G) となる。よって任意定数を C_1, C_2 として式 (3)-(4) の一般解を

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(\ F\ ) + C_2(\ G\ ) \tag{6}$$

と書くことができる。」

(B) 上記 (A) とは異なる方法で解くことを考える。(a-c: 10 点 $\times 3 = 30$ 点, d: 5 点)

a. (3)-(4) から y を消去し、x のみの 2 階の微分方程式を示せ。

b. x の一般解を求めよ。

c. y の一般解を求めよ。

d. (B) で求めた一般解が, (A) で求めた解と一致している事を確かめよ。

以上