解析学演習　微分方程式(第 15 回) 解答例

2019/6/10

1. (1) [2 点]　解 $u(x,t)$ を，x だけの関数 $f_x(x)$ と t だけの関数 $f_t(t)$ の積と仮定し，$u=f_x f_t$ として解く。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_t\dfrac{d^2 f_x}{dx^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}=f_x\dfrac{df_t}{dt}$ となるので，これらを偏微分方程式へ代入すると，

$$f_t\frac{d^2 f_x}{dx^2}=\frac{1}{A}f_x\frac{df_t}{dt}$$

になる。この式の両辺を $f_x f_t(=u)$ で割ると，

$$\frac{1}{f_x}\frac{d^2 f_x}{dx^2}=\frac{1}{A}\frac{1}{f_t}\frac{df_t}{dt}=-B^2$$

となる。ここで，B は定数である。この式から次の 2 つの常微分方程式が得られる。(1 点)

$$\frac{d^2 f_x}{dx^2}=-B^2 f_x$$

$$\frac{df_t}{dt}=-AB^2 f_t$$

これらの微分方程式の一般解は，それぞれ以下のようになる。

$$f_x=C_{x1}\cos Bx+C_{x2}\sin Bx$$

$$f_t=C_t\exp\left(-AB^2 t\right)$$

ここで，C_{x1}，C_{x2}，C_t は任意定数である(1 点)。定数 B は一般に 1 つに決まらない。定数 B が離散的に決まる場合には，一般解は，

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{x1m0}\cos B_m x+C_{x2m0}\sin B_m x\right)\exp\left(-AB_m{}^2 t\right)$$

となる。ここで，$C_{x1m0}=C_{x1m}C_{tm}$，$C_{x2m0}=C_{x2m}C_{tm}$ とおいた。

また，定数 B が離散的に決まらず連続値 b になる場合は以下のようになる。

$$u=\int_0^{\infty}\left\{c_{x10}(b)\cos bx+c_{x20}(b)\sin bx\right\}\exp\left(-Ab^2 t\right)db$$

ここで，c_{x10}，c_{x20} はそれぞれ b の関数となる。

(2) [1 点]　$x=0$ で $u=0$ となる境界条件を満足するには，任意の t について，以下の式が成り立つ必要がある。

$$u(0,t)=\sum_{m=1}^{\infty} C_{x1m0}\exp\left(-AB_m{}^2 t\right)$$

よって，$C_{x1m0}=0$となる。

次に，$x=L$で$u=0$となる境界条件を満足するには，

$$u(L,t)=\sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m0}\sin B_m L\exp\left(-AB_m{}^2 t\right)$$

より，$\sin B_m L=0$となる必要がある。すなわち，$B_m L=m\pi$より，$B_m=\dfrac{m\pi}{L}$が得られる。

(3) [1 点] $u(x,t)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m0}\sin\frac{m\pi}{L}x\exp\left\{-A\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right\}$

となる。$t=0$で$u=f(x)$を満足するには，

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m0}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

となる必要がある。両辺に$\sin\dfrac{n\pi}{L}x$をかけて，$0\le x\le L$で積分すると，

$$C_{x2n0}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx$$

となる。よって，境界条件を満足する解は，

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x dx\right)\sin\frac{m\pi}{L}x\exp\left\{-A\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 t\right\}$$

となる。

2. (1) [1 点] 判別式　$B^2-4AC=3^2-4\bullet1\bullet(-10)=49>0$ より、双曲型である。

(2) [2 点]

$u=\exp(ax+by)$ とおいて、各偏微分係数を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\exp(ax+by),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b\exp(ax+by),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ab\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2\exp(ax+by)$$

となる。これらを与えられた偏微分方程式(2-1)に代入すると

$(a^2+3ab-10b^2)\exp(ax+by)=0$, 従って$(a^2+3ab-10b^2)=(a-2b)(a+5b)=0$ を得る。

これから $a=2b,\ -5b$ の関係が満たされる時に、$u=\exp\ (ax+by)$ は問題文の式(2-1)

の特殊解をあたえることが理解される。$a=2b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(2x+y)]$ で与えられ, $a=-5b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(-5x+y)]$ で与えられる。ここに、b はゼロでない定数、例えば 1。したがって、u の 1 次独立な 2 つの特殊解として

$u=\exp(2x+y)$ と　$u=\exp(-5x+y)$ を見出した。

(3) [2 点] 各項を(ξ,η) に関する偏微分で書きあらためるべく、変数として(x,y) から(ξ,η)への変換を行い、計算を進める。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial \xi}-5\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-20\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+25\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-5\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

以上を(2-1)に代入すると

$-49\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ となる。すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$　　(2-2) を得る。

(4) [1 点]

(2-2)を ξ で積分すると $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=\Psi(\eta)$, ここに $\Psi(\eta)$は η の任意関数。さらにこれを η で積分すると $u=\int\Psi(\eta)\mathrm{d}\eta+\varphi(\xi)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$ となる。ここで任意関数の積分もまた任意関数であり $\int\Psi(\eta)\mathrm{d}\eta=\psi(\eta)$ とした。したがって φ,ψ をそれぞれ c_1, c_2 と書き直せば

$u=c_1(\xi)+c_2(\eta)=c_1(2x+y)+c_2(-5x+y)$ と(2-1)の一般解を得ることができた。ここに c_1, c_2 は任意関数である。