

解析学 演習 7 解答例

7.1 次の関数の特異点とその種類を答えよ. (配点: 10 点×2)

テーラー展開の公式

$$(1) f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

特異点は $z=0$. 式(12.6)より $\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}$ で, ここに z^2 を乗じても

主要部が無限個あるので 真性特異点.

$$(2) f(z) = \frac{z^2}{(3z-2)^2}$$

特異点は $z = \frac{2}{3}$ で 2 位の極. 分母分子がべき乗の多項式の場合は, 分母の次数だけで

判断しても間違えることは無いと思うが, 念のため多項式の割り算を実行することにより, $z=2/3$ を中心とするローラン展開の形に変形すると,

$$f(z) = \frac{z^2}{(3z-2)^2} = \frac{1}{9} \frac{z^2}{(z-2/3)^2} = \frac{1}{9} + \frac{4/27}{z-2/3} + \frac{4/81}{(z-2/3)^2}$$

よって, 2 位の極であることが確認され, 留数は 4/27 であることが見て取れる.

7.2 次の関数の特異点における留数を全て求めよ.

$$(1) \frac{e^z}{(2-z)(1-z)^2} \quad (\text{配点: 12 点})$$

$z=2$ は 1 位の極, $z=1$ は 2 位の極.

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} \{(z-2)f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 2} \left\{ \frac{-e^z}{(1-z)^2} \right\} = -e^2,$$

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \{(z-1)^2 f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{-e^z}{z-2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{-e^z}{z-2} - \frac{-e^z}{(z-2)^2} \right\} = e + e = 2e$$

となる.

$$(2) \frac{e^{i\pi z}}{9z-z^3} \quad (\text{配点: 12 点})$$

$\frac{e^{i\pi z}}{9z-z^3} = \frac{-e^{i\pi z}}{z(z+3)(z-3)}$ より特異点は $z=0, z=3, z=-3$ ですべて 1 位の極.

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \{(zf(z))\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{-e^{i\pi z}}{z^2 - 9} \right\} = \frac{1}{9}$$

$$\operatorname{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} \{(z-3)f(z)\} = \lim_{z \rightarrow 3} \left\{ \frac{-e^{i\pi z}}{z(z+3)} \right\} = \frac{1}{18}$$

$$\operatorname{Res}(f, -3) = \lim_{z \rightarrow -3} \{(z+3)f(z)\} = \lim_{z \rightarrow -3} \left\{ \frac{-e^{i\pi z}}{z(z-3)} \right\} = \frac{1}{18}$$

(3) $\frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z^3}$ (配点 : 16 点)

$z=0$ で 2 位の極, 留数 $= -1/2$. 外見からは意外に思えるが, 後で見るように与式は 2 位の極なのだが, 留数を求める際には 3 位以上の極の場合の計算法を適用しても留数は正しく計算できる. よって, 3 位の極だと仮定して, 3 位の極の求め方で計算してみると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (z^3 f(z)) \right\} = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (\operatorname{Log}(z+1)) \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z+1} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

実際, $\operatorname{Log}(z+1)$ のマクローリン展開は, $\operatorname{Log}(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$ なので

$$\frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{3} - \frac{z}{4} + \dots \quad \text{となることから}$$

与式は 2 位の極, また, $1/z$ の係数として, 留数 $= -1/2$ とわかる.

上記の級数展開がわかっているならば, 2 位の極の留数の求め方を適用しても簡単に計算できる. 2 位の極に対する留数を求める手順を適用すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{\operatorname{Log}(z+1)}{z} \right) \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dz} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots \right) \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2z}{3} - \frac{3z^2}{4} + \dots \right\} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

級数展開の式を使わないと, z^2 を乗じて $\operatorname{Log}(z+1)/z$ を 1 階微分した式に $z \rightarrow 0$ とした際に発散するように見えるので困るかも知れない. 解析関数を含む関数の留数を求める際は, いずれにせよ, 級数展開を一度検討してみるとよい. (検算にはなる)

7.3 次の積分を求めよ. ((3)は採点から除外. 配点: 20 点×2)

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), 5 + 4\sin\theta = \frac{1}{i}\left(5i + 2z - \frac{2}{z}\right) \text{ より}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta} = \int_C \frac{1}{\frac{1}{i}\left(5i + 2z - \frac{2}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{5zi + 2z^2 - 2} = \int_C \frac{dz}{2(z + i/2)(z + 2i)}.$$

特異点は $-2i, \frac{-i}{2}$ で C 内にあるのは $z_1 = \frac{-i}{2}$ で 1 位の極.

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{2(z + 2i)} = \frac{1}{-i + 4i} = \frac{1}{3i}. \quad \text{積分値は } 2\pi i \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$ は上半面に 2 つ 1 位の極を持つ.

$$z_1 = e^{i\pi/4}, z_2 = e^{3i\pi/4}, \text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \text{ 式(13.6)を使うと, } h(z) = z^2.$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{4z^3} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z} = \frac{1}{4} e^{-i\pi/4}, \text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{4z} = \frac{1}{4} e^{-3i\pi/4}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \frac{e^{-i\pi/4} + e^{-3i\pi/4}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$(3) \quad P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - a} dx$$

複素関数 $\frac{e^{iz}}{z - a}$ の積分路 C による周回積分 $\int_C \frac{e^{iz}}{z - a} dz$ を考える. (ただし, a は実数とする.)

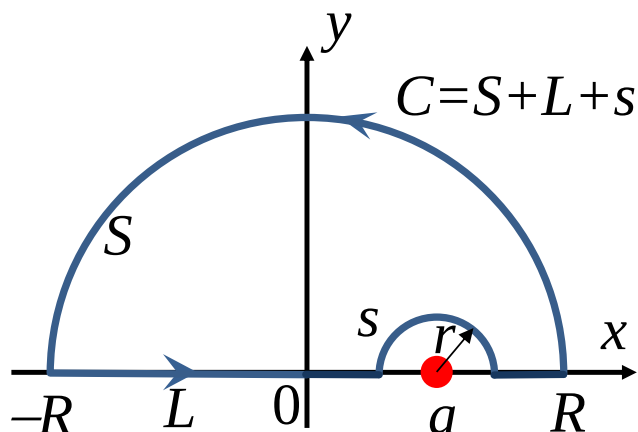
ここで, 積分路 C を上半面に取り, 次の 3 つの積分路に分解して考える. すなわち, 全体の周回積分路 C を, 原点を中心とする半径 R の大半円 S と, 実軸上の特異点 a を迂回した

積分 L と、 $z=a$ を中心とする半径 r の小半円 s 上の積分値の和と見なす。

本問で求めたい実軸上の積分値

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx \text{ は、 } R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0 \text{ とした時}$$

の L に相当する。すなわち、



$$\int_C = \int_{\text{大半円}S} + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx + \int_{\text{小半円}s} \dots (\star)$$

まず、大半円 S 上の積分値について考える。積分路上の点 $z = Re^{i\theta}$ とおくと、

$$dz = iRe^{i\theta} d\theta \text{ より、大半円上の線積分は、 } \int_{\text{大半円}S} \frac{e^{iz}}{z-a} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR \cos \theta} \cdot e^{-R \sin \theta}}{Re^{i\theta} - a} iRe^{i\theta} d\theta$$

と表される。上半面だから積分路は $\theta: 0 \rightarrow \pi$ で、このとき $-R \sin \theta < 0$ 。よって $R \rightarrow \infty$ で

$$e^{-R \sin \theta} \rightarrow 0. \text{ また } |e^{iR \cos \theta}| = 1 \text{ だから } R \rightarrow \infty \text{ で } \int_{\text{大半円}S} \frac{e^{iz}}{z-a} dz \rightarrow 0 \text{ となる。}$$

次に、小半円 s 上の積分を計算する。積分路 s 上の点を $z = a + re^{i\theta}$ とおくと、小半円の

$$\text{積分は } \int_\pi^0 \frac{e^{i(a+re^{i\theta})}}{re^{i\theta}} i re^{i\theta} d\theta \text{ よって、 } r \rightarrow 0 \text{ で積分値は } -\pi i e^{ia}. \text{ よって}$$

$$\int_{\text{小半円}s} \frac{e^{iz}}{z-a} dz = -\pi i e^{ia} \quad \text{また、上半面には特異点はないから、} \int_C = 0.$$

$$\text{以上を} (\star) \text{式に代入すると、} \quad 0 = 0 + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x-a} dx - \pi i e^{ia}$$

$$\Leftrightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \underline{\underline{\pi i e^{ia}}} \text{ (答)}$$