解析学　第7回

（前半の最終回）

ローラン展開と級数

- 特異点
- 留数の求め方

留数による実積分

- 留数定理
- 三角関数を含む実積分
- 有理関数の定積分

複素積分の応用

- 主値積分

「特異点」とは？

→微係数が定まらない点

「孤立特異点」とは？ →特異点の中でも,

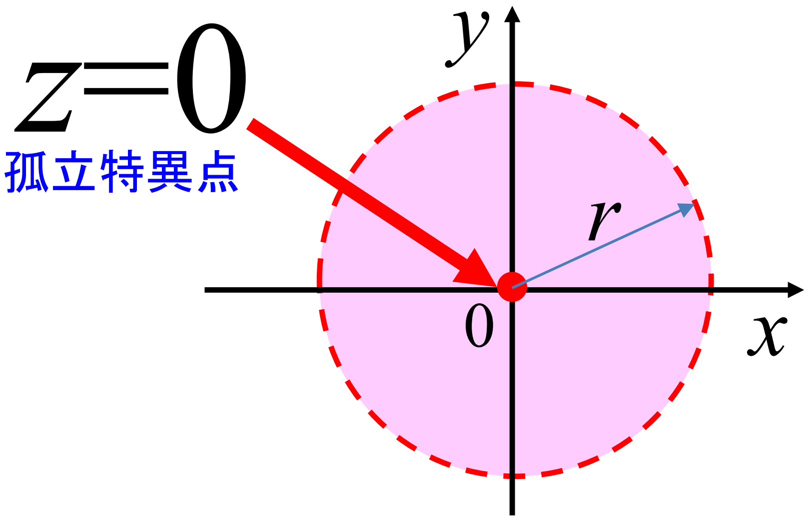
関数$f(z)$がz_0で正則ではないが,

z_0から少しでも離れれば正則,すなわち,

$0<|z-z_0|<r$では正則になるようなrが存在すれば z_0を孤立特異点という

孤立特異点の例

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



原点z=0のみ非正則（微分不可能）だが,
r>0なら正則

$f(z)$は,孤立特異点z_0を中心にローラン展開可能

$$f(z) = \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots}_{\text{正則部}} + \underbrace{\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots}_{\text{主要部}}$$

主要部の性質により孤立特異点を分類

除去可能な特異点：ローラン展開した結果,**主要部がない**場合

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \ , \quad b_n = 0$$

極：　主要部の項が**有限個**で,m項までの場合は**m位の極**という

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

真性特異点：　主要部の項が**無限個**の場合をいう

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

例題１３．３　次の関数の特異点を分類せよ.

$$(1)\quad \frac{\sin z}{z}$$

解)　$z=0$が特異点だが,式(12.6)

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \qquad (12.6)$$

を使って展開すると

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$$

となって主要部がなくなるため,除去可能な特異点(答)

例題１３．３　次の関数の特異点を分類せよ.

$$(2)\qquad \frac{z^2-5z+3}{z-2}$$

解)　$z=2$が特異点だが,(分子を分母で割り算すると)

$$\frac{z^2-5z+3}{z-2}=\frac{(z-2)(z-2)-(z-2)-3}{z-2}$$

$$=(z-2)^1-1\cdot(z-2)^0-\frac{3}{(z-2)^1}$$

と展開できるから, 1位の極　(答)

例題１３．３　次の関数の特異点を分類せよ.

$$(3) \quad e^{1/z}$$

解) $z=0$が特異点である. e^zのマクローリン展開の式にzの代わりに$1/z$を代入すれば

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + ..$$

と展開できるので, 真性特異点　(答)

追加例題　次の関数の特異点を分類せよ.

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^3}$$

解)　$z=0$が特異点だが, Log(1+z)を級数展開すると

$$\mathrm{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots$$

よって,

$$\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^{n-3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\frac{1}{3}-\frac{z}{4}+\cdots$$

と展開できるから, 2位の極　(答)

一見, 3位の極のように見えるが, このように分子の隠れたべき項で分母の$(z-z_0)$の次数が下がることがある. →級数展開が究極手段

「留数」とは？

関数$f(z)$はz_0を除いた領域D:$0<|z-z_0|<r$で正則とする.

z_0を中心とするローラン展開(13.2)式を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

z_0を囲む単一閉曲線Cに沿って項別に周回積分する.

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C a_n(z-z_0)^n dz+\sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{b_n}{(z-z_0)^n}dz$$

$$\int_C f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_C a_n(z-z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty}\int_C \frac{b_n}{(z-z_0)^n}dz$$

この積分の値は既に計算してある. 結果は,

$$\int_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases} \qquad (8.6)$$

よって$(z-z_0)^{-1}$の項以外は全部0になってしまい,

主要部の$n=1$の積分のみ値が残り,$b_1 \times 2\pi i$ になる.

よって $\int_C f(z)dz = 2\pi i b_1$

b_1を**留数**(residue)といい, Res(f, z_0)または Res(z_0)

と表す.

$$\boxed{b_1 = \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz} \qquad (13.3)$$

例題１３．４　$f(z) = ze^{1/z}$ のz=0における留数を求めよ.

解)　e^zをマクローリン展開した式のzの代わりに1/zを代入した式(例題13.3)にzを乗じると

$$f(z) = ze^{1/z} = z \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + ..\right)$$

$$= z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^{n-1}} + ..$$

と展開できる. 1/zの項の係数が留数(=b_1)だから,

b_1=Res(0)=1/2　(答)

留数の求め方

（1）１位の極の場合

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \{(z - z_0) f(z)\} \qquad (13.4)$$

（説明）

ローラン展開の正則部を$\phi(z)$で表すと

1位の極の場合 $f(z) = \phi(z) + \dfrac{b_1}{z - z_0}$ なので

$f(z)$に$(z-z_0)$を乗じて$z \to z_0$の極限をとれば
b_1が求められる.

留数の求め方

（2）m位の極の場合

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right\} \qquad (13.5)$$

（説明） $m=2$の例:

ローラン展開の正則部を$\phi(z)$で表すと

2位の極の場合 $f(z) = \phi(z) + \dfrac{b_1}{z - z_0} + \dfrac{b_2}{(z - z_0)^2}$ なので

両辺に$(z-z_0)^2$を乗じて1階微分する.

$$\frac{d}{dz}\left\{(z-z_0)^2 f(z)\right\}=\frac{d}{dz}\left\{\phi(z)(z-z_0)^2+b_1(z-z_0)+b_2\right\}$$

$$=\phi'(z)(z-z_0)^2+2\phi(z)(z-z_0)+b_1$$

ここで$z \to z_0$の極限をとれば

$$= b_1$$

m位の極についても同様に(13.5)で求まる.

$(z-z_0)^m$を掛けることで分母の$(z-z_0)$を撲滅し, 次に$m-1$回微分してzの累乗項を消していき, 留数b_1をあぶり出す, という手順. 微分するたびに出てくる係数の積を打ち消すために, $(m-1)!$で割り算するのを忘れない.

n位の極の留数の求め方に関する注意

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right\} \qquad (13.5)$$

n位の極の留数を求めるために，上の式に$m \geqq n$ となるmを適用して計算しても正しく留数を求めることができる.

注）m位の極の式に対して, (13.5)のm+1以上の手順を当てはめても留数は正しく計算できる.なので,m位の極用の式を適用した計算が複雑で，一方，m+1の計算が簡単にできるような場合は, m+1,あるいはm+2以上を適用してみるとよい．(単に誤って位数を低く見積もりすぎて発散する場合もあるので注意．逆に誤って位数を高く見積もり過ぎた場合は,留数の値を正しく計算できる.)

留数の求め方

z=z_0で分母の関数g＝0なので特異点だが，分母の関数gの微分g'が0でない場合には、この公式が使える

（3）$f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$ ，ただし, $g(z_0)$=0, $g'(z_0)\neq 0$　の場合

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)} \qquad (13.6)$$

（説明）

$g(z)$をz_0でテーラー展開して$g(z_0)$=0を代入すると,

$$g(z)=g'(z_0)(z-z_0)+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots$$

より
$$f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{h(z)}{g'(z_0)+\dfrac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\ldots}$$

ここで,1位の極を求めるために(1)の方法を適用する.

両辺に$(z-z_0)$を掛けて$z\to z_0$の極限をとれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,z_0)&=\lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)f(z)\}\\&=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{h(z)}{g'(z_0)+\dfrac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)+\ldots}\right\}\\&=\frac{h(z_0)}{g'(z_0)}\end{aligned}$$

以上より,(13.6)が示された.

例題１３．５　$f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+1)^2}$

の特異点における留数を求めよ.

解) 特異点は1位の極$z=1$と, 2位の極$z=-1$である.
それぞれ,

1位の極

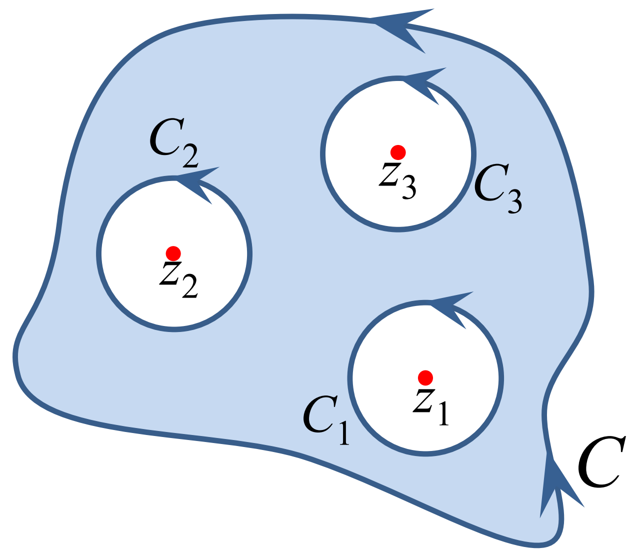
$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\left\{\frac{z+2}{(z+1)^2}\right\}=\frac{3}{4}\ \text{(答)}$$

2位の極

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\{(z+1)^2 f(z)\}=\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z+2}{z-1}\right\}$$

$$=\lim_{z\to -1}\left\{\frac{1}{(z-1)}-\frac{z+2}{(z-1)^2}\right\}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\ \text{(答)}$$

留数定理



単一閉曲線Cの内部に有限個の特異点$z_1, z_2,\ldots, z_m$がある場合を考える.

関数$f(z)$はC上で正則であり,Cの内部でも特異点を除いて正則とする．特異点を囲む小円$C_1,C_2,\ldots,C_m$をC内部に描くと,多重連結領域の分割式(9.6)により積分路は次のように分割できる.

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \cdots + \int_{C_m} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \cdots + \int_{C_m} f(z)dz$$

右辺のそれぞれの小円に留数の式(13.3)をあてはめると,

$$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} f(z)dz}$$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_k)} \qquad (14.1)$$

留数定理

複数の特異点がある場合の周回積分の値は,

2πi×(留数の和) で計算できる.

例題14．1

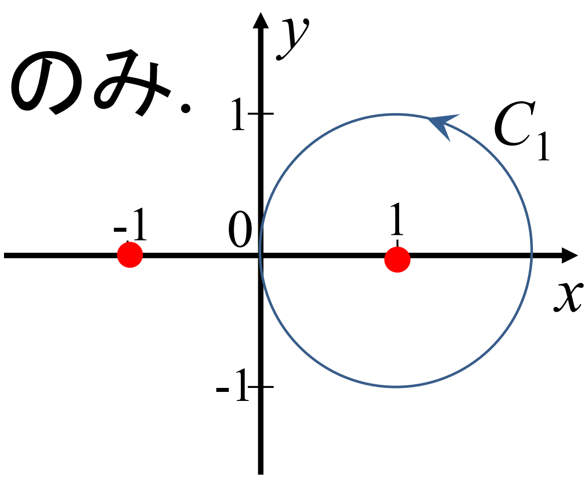
次の積分路に沿って

$$f(z)=\frac{z+2}{(z-1)(z+1)^2}$$

を反時計回りに積分せよ.

(1) C_1: $|z-1|=1$

解) C_1内の特異点は1位の極 $z=1$のみ.



留数は既に例題13.5で求めたとおり $\mathrm{Res}(f,1)=\dfrac{3}{4}$

なので, 積分値は

$$\int_{C_1} f(z)dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,1) = 2\pi i\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}i$$

(答)

留数定理とグルサの公式

- 周回積分を求める方法として，コーシーの積分公式とグルサの公式を適用する方法を前の章で学んだが，
- その方法は，留数定理を使って周回積分を求める方法と等価である．（留数を求める公式の中に，グルサの公式が含まれていることを確認せよ）．

留数定理

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{C\text{内の特異点の数}} \mathrm{Res}(f, z_k)$$

(z_k,がm位の極)

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_k}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_k)^m f(z)\right\}$$

グルサの公式

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

ヒント） グルサの公式で$f(z)/(z-z_0)^{n+1} \equiv F(z)$などとおいて、留数定理における$f(z)$を$F(z)$に置き換えてみよ

例題14．1

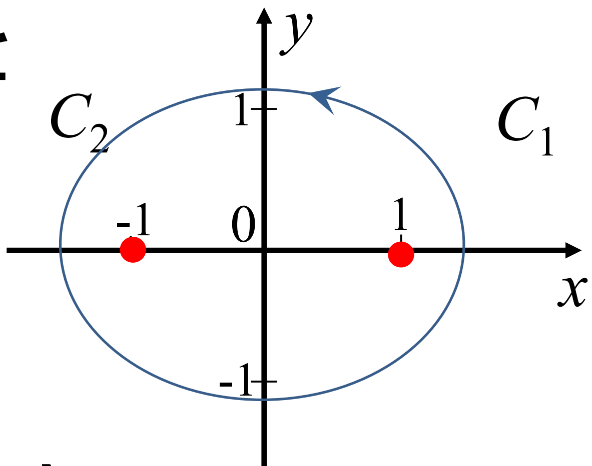
次の積分路に沿って

$$f(z)=\frac{z+2}{(z-1)(z+1)^2}$$

を反時計回りに積分せよ.

(2) C_2: $|z-1|+|z+1|=3$

解) C_2内の特異点は1位の極 $z=1$と2位の極 $z=-1$. 留数は既に例題13.5で求めたとおり



$$\mathrm{Res}(f,1)=\frac{3}{4} \quad \text{および} \quad \mathrm{Res}(f,-1)=-\frac{3}{4}$$

なので, 積分値は2つの留数の和をとって,

$$\int_{C_2} f(z)dx=2\pi i\left\{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right\}=\underline{0}$$ (答)

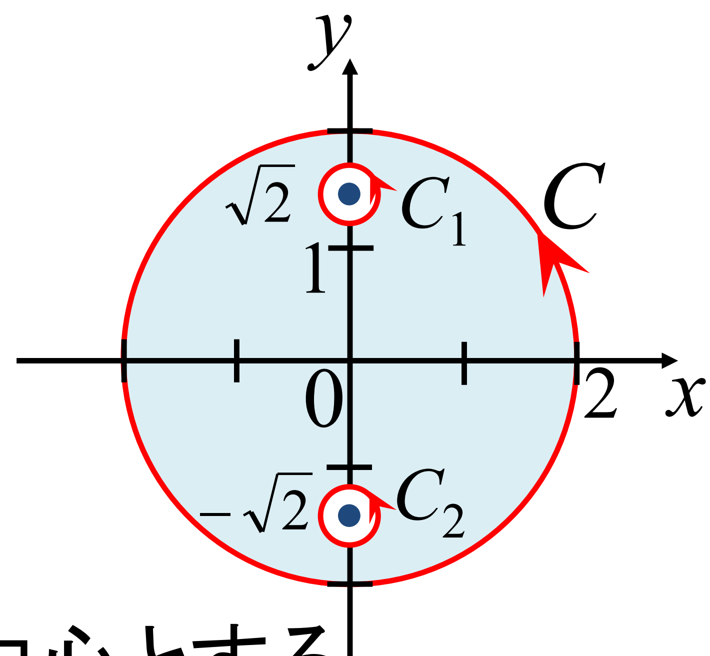
例題９．２(再) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+2}$

を積分路C: $|z|=2$ で積分せよ

コーシーの積分定理を用いた解

解１） 部分分数分解すると

$$f(z)=\frac{1}{z+\sqrt{2}i}+\frac{1}{z-\sqrt{2}i}$$



正則でない点は $z=\pm\sqrt{2}i$

で積分路内にある．そこで

式(9.6)よりCを$z=i\sqrt{2}$と$z=-i\sqrt{2}$ を中心とする

小円の積分路C_1,C_2に変更する．式(8.6)を使うと

$$\int_C (z-z_0)^m dz=\begin{cases} 2\pi i & (m=-1) \\ 0 & (m\neq -1)\end{cases}$$

積分値は

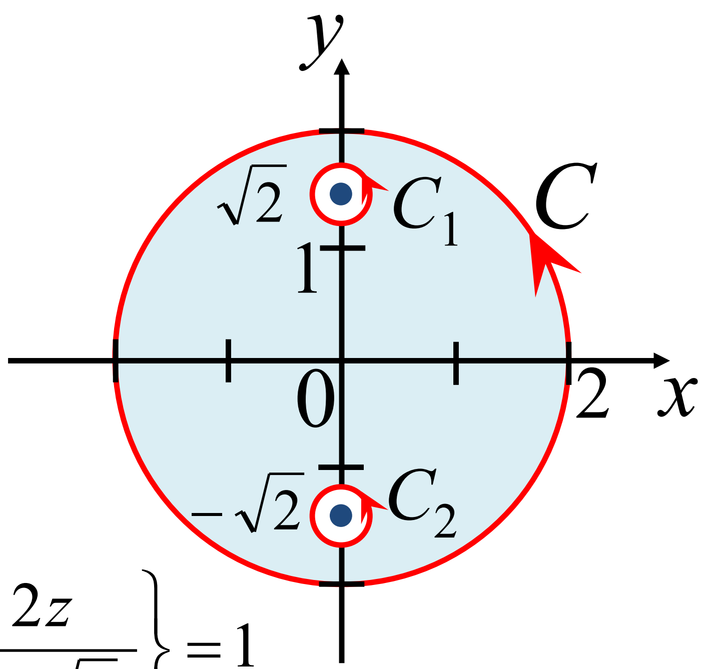
$2\pi i+2\pi i=4\pi i$ (答)

例題9．2(再) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+2}$

を積分路C: $|z|=2$ で積分せよ

解2） 留数定理を用いた解

$$f(z)=\frac{2z}{z^2+2}=\frac{2z}{(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{2}i)}$$



C内に2つの1位の極 $z=\pm\sqrt{2}i$ を持つ.留数を計算すると

$$\mathrm{Res}(f,\sqrt{2}i)=\lim_{z\to\sqrt{2}i}\left\{(z-\sqrt{2}i)f(z)\right\}=\lim_{z\to\sqrt{2}i}\left\{\frac{2z}{z+\sqrt{2}i}\right\}=1$$

$$\mathrm{Res}(f,-\sqrt{2}i)=\lim_{z\to-\sqrt{2}i}\left\{(z+\sqrt{2}i)f(z)\right\}=\lim_{z\to-\sqrt{2}i}\left\{\frac{2z}{z-\sqrt{2}i}\right\}=1$$

よって留数の定理より, $\int_C f(z)dz=2\pi i(1+1)=4\pi i$ (答)

三角関数を含む実定積分

実数の三角関数を,
複素数に変数変換すると,
留数定理を応用して,
実数の三角関数の定積分が
簡単に計算できる場合がある

その原理と方法について学ぼう

三角関数を含む実定積分

積分路Cを単位円 $|z|=1$ とする.

積分路Cの媒介変数表示として

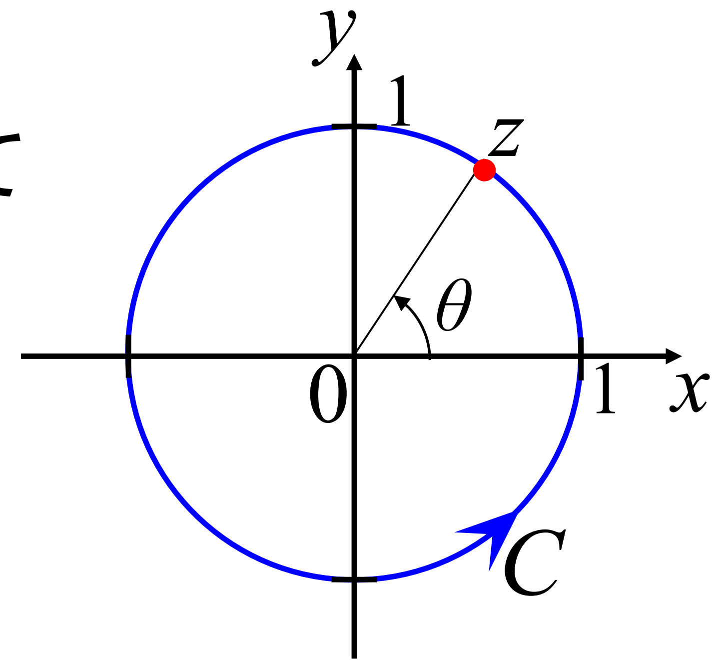
$$z = e^{i\theta}, \ (0 \le \theta \le 2\pi)$$

とおく.ここから

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = izd\theta$$ なので

$$d\theta = \frac{1}{iz} dz$$

(積分の変数変換で使う)



また,三角関数cosθ, sinθ の$\theta\rightarrow z$への変数変換は

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

以上で実数の三角関数で構成された有理関数を複素積分に置き換える準備が整った.

なお, 複素積分は留数定理を用いて実行する.

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_C f\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}\frac{1}{iz}dz} \quad (14.2)$$

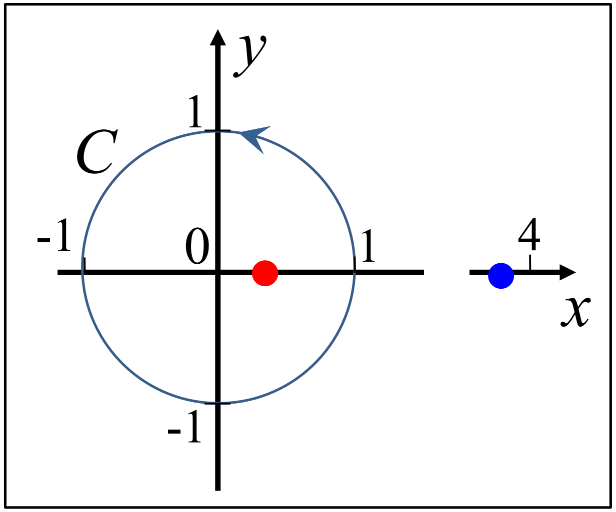
例題14．2

定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\cos\theta}d\theta$ を求めよ.

解）前ページで求めた$\theta\to z$の変数変換を用いて

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-\cos\theta}d\theta=\int_C\frac{1}{2-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz=\int_C\frac{1}{4z-z^2-1}\frac{1}{i}dz$$

$$=\int_C\frac{2i}{\{z-(2+\sqrt{3})\}\{z-(2-\sqrt{3})\}}dz$$



被積分関数の特異点は $z=2\pm\sqrt{3}$

そのうち,C内の特異点は $z=2-\sqrt{3}$

で1位の極である.

1位の極を求める式(13.4)を用いて留数を求めると

$$\mathrm{Res}(2-\sqrt{3}) = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})}\left[\{z-(2-\sqrt{3})\}f(z)\right] = \lim_{z\to(2-\sqrt{3})}\left\{\frac{2i}{z-(2+\sqrt{3})}\right\} = \frac{i}{-\sqrt{3}}$$

よって積分値は, $2\pi i \times$ (留数) $= 2\pi i \dfrac{i}{-\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (答)

有理関数の実定積分

積分区間が有限ではない $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 型の

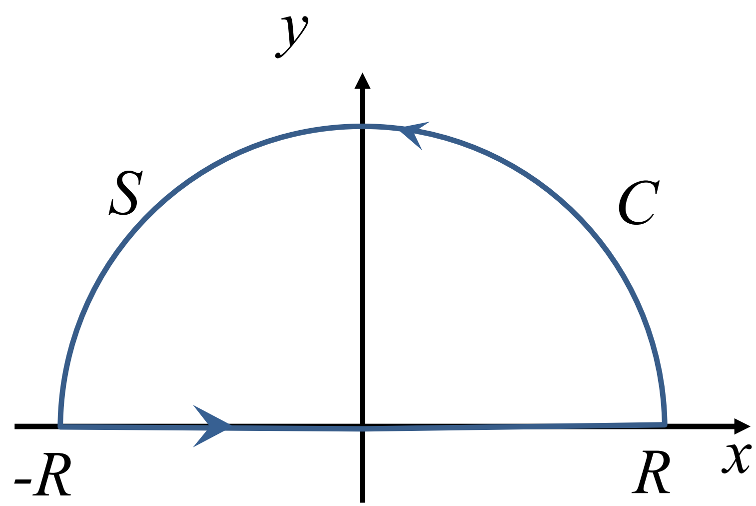
実積分を複素積分に置き換えて,

留数を使って解くことができる.

有理関数の実定積分

積分路の設定：

x軸上の直線$(-R \sim R)$と
上半面の半円Sから成る
積分Cを選ぶ.



有理関数$f(x)$はm個の極を上半面に持ち,実軸上には特異点を持たないものと仮定する.

Rを十分大きく選べばC内に全ての極が入るから
留数定理より

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_S f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_i) \tag{14.3}$$

右端の項は留数の和として計算できるので

仮に, $\int_S f(z)dz = 0$ であれば,

求める積分 $\int_{-R}^{R} f(x)dx$ が留数から求まる.

次に, $\int_S f(z)dz = 0$ となる条件を調べよう.

まず,半円の積分路Sを媒介変数表示する.

$z = Re^{i\theta}$, $(0 \le \theta \le \pi)$ とおくと, $|z|=R$ だから

半円Sの長さは πR である.

仮に,被積分関数である有理関数 $f(z)=\mathrm{P}(z)/\mathrm{Q}(z)$

の分母$\mathrm{Q}(z)$に含まれるzの次数が,分子$\mathrm{P}(z)$に

含まれるzの次数よりも2以上大きく,また,

kを十分大きく取れば, $|f(z)|<k/|z|^2$ とおける.

$f(z)$が積分路上で有限の値を持つ
といっている

MLを不等式(8.3)を使うと,

$$\left|\int_S f(z)dz\right| < ML < \frac{k}{|z|^2}\pi R = \frac{k\pi R}{R^2} = \frac{k\pi}{R}$$

$$\left|\int_S f(z)dz\right| < ML < \frac{k}{|z|^2}\pi R = \frac{k\pi R}{R^2} = \frac{k\pi}{R}$$

右端は, $R\to\infty$ で0に収束する.

このような場合には,有理関数の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}(f, z_i) \qquad (14.4)$$

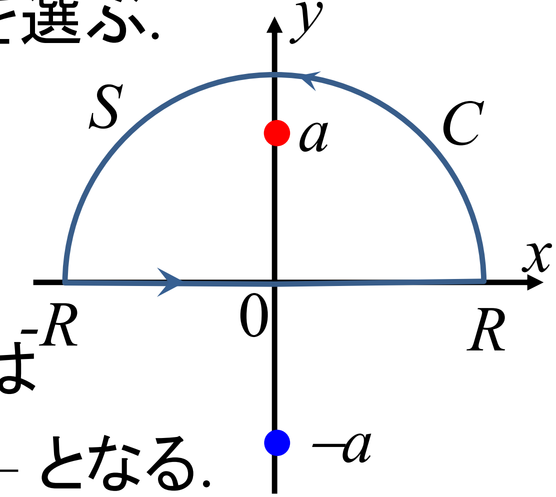
と表される.なお,$R\to\infty$で半円上の積分 $\int_S f(z)dz = 0$

が成り立っているか否かはその都度確認する必要がある.

例題14．3

実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx\ \ (a>0)$ を求めよ.

解) 複素平面上で十分大きい半径Rの半円Sと,
実軸上の直径で囲む上半面の積分路Cを選ぶ.



$$\int_C\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}dx+\int_S\frac{1}{z^2+a^2}dz$$

左辺の複素積分は1位の極 $z=ia,-ia$を持つが,
C内の特異点は ia のみ. よってiaに対する留数は

$$\mathrm{Re}\,s(f,ia)=\lim_{z\to ia}\{(z-ia)f(z)\}=\lim_{z\to ia}\left\{\frac{1}{z+ia}\right\}=\frac{1}{2ia}$$ となる.

また, $z=Re^{i\theta}$ とおくと, $dz=Rie^{i\theta}d\theta$ で $\displaystyle\int_S\frac{1}{z^2+a^2}dz=\int_0^{\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{R^2e^{i2\theta}+a^2}d\theta$

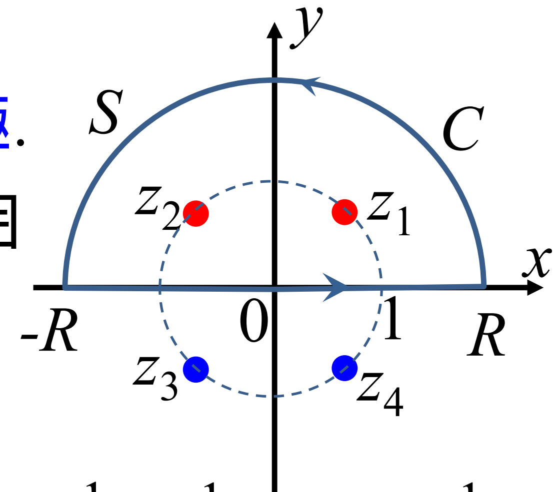
被積分関数の分母分子を$R(>0)$で割り, $|ie^{i\theta}|=|e^{i\theta}|=1$ でaが定数であることを考慮すると,$R\to\infty$で被積分関数→0なので積分値も0.

よって求める実積分の値は, $2\pi i\times$(留数) $\displaystyle=2\pi i\frac{1}{2ia}=\frac{\pi}{a}$ (答)

例題14．4

実積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}dx$ を求めよ.

解) 複素関数を $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ とおく. $f(z)$の特異点は$z^4=-1=e^{\pi i+2n\pi i}$
より$z=e^{(1+2n)\pi i/4}$, $n=0,1,2,3$の４個,すなわち
$z_1=e^{\pi i/4}$, $z_2=e^{3\pi i/4}$, $z_3=e^{5\pi i/4}$, $z_4=e^{7\pi i/4}$ が1位の極.



この内,z_1, z_2だけが上半面にあるので,これらを囲む半円Cを考える.なお,留数は(13.6)$h(z_0)/g'(z_0)$を使って求めてみよう. $\dfrac{1}{z^4+1}\equiv\dfrac{h(z)}{g(z)}$ より,$h(z)=1$, $g(z)=z^4+1$ とすると,

$g(z_1)=0$, $g(z_2)=0$ だから, $g'(z)=4z^3$ として$\mathrm{Res}(z_1)=\lim\limits_{z\to z_1}\dfrac{1}{4z_1^3}=\dfrac{1}{4}e^{-3\pi i/4}=-\dfrac{1}{4}e^{\pi i/4}$

$\mathrm{Res}(z_2)=\lim\limits_{z\to z_2}\dfrac{1}{4z_2^3}=\dfrac{1}{4}e^{-9\pi i/4}=\dfrac{1}{4}e^{-\pi i/4}$ 以上より, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=2\pi i\frac{1}{4}(-e^{\pi i/4}+e^{-\pi i/4})$

$=\dfrac{\pi i}{2}\dfrac{-2i}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ 例題14.3と同様の手順で半円S上の積分＝0が示され,

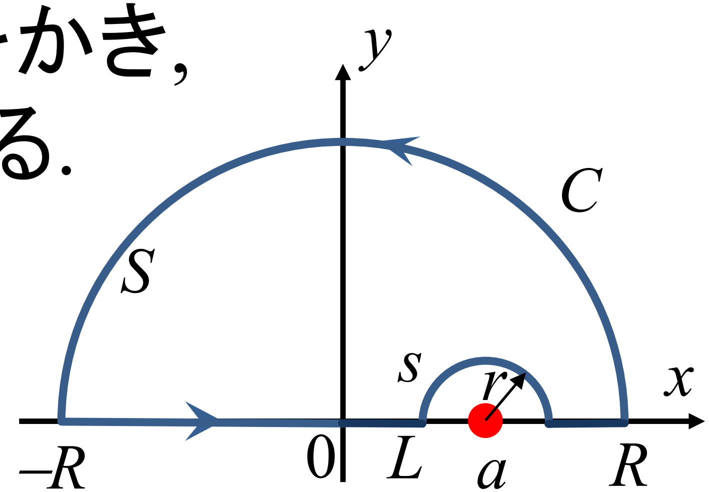
また, $\dfrac{1}{x^4+1}$ は偶関数なので,1/2にすれば $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (答)

主値積分

- ここまでの積分では,実軸上に特異点がないと仮定した
- 今回は実軸上に特異点が存在する積分を考える.たとえば, $f(x)=1/(x-a)$を考えよう.
- この場合, $x\to a$で$|f(x)|\to\infty$なので $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ は計算できないという約束なのだが, $f(x)$の関数形と, 極限の取り方によっては値が確定できる場合がある.
- また,このようなときに,関数$f(x)$を複素関数に拡張して,複素積分の積分路を工夫すると,簡単に計算できる場合がある.

主値積分

特異点aを囲む半径rの小半円をかき，
特異点aを避ける積分路Cをつくる.



すると実軸上の積分は

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{r\to 0}\left\{\int_{-R}^{a-r} f(x)dx + \int_{a+r}^{R} f(x)dx\right\}$$

$1/(x-a)$の不定積分は既にわかっているから

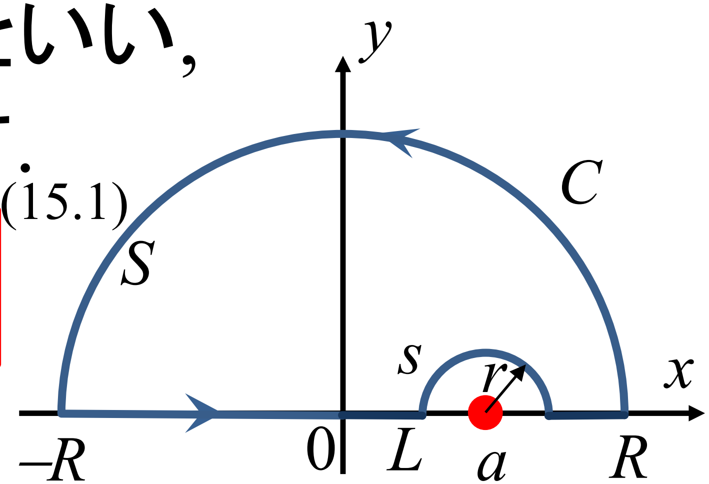
$\int f(x)dx = \int \frac{1}{x-a}dx = \log|x-a|$ を使って{}の積分を計算

$$\int_{-R}^{a-r} f(x)dx + \int_{a+r}^{R} f(x)dx = \left[\log|x-a|\right]_{-R}^{a-r} + \left[\log|x-a|\right]_{R}^{a+r}$$

$$= \log|a-r-a| - \log|-R-a| + \log|a+r-a| - \log|R-a| \;\boxed{= \log\frac{R-a}{R+a}}$$

主値積分

こうして求める積分を主値積分といい,
先頭にPをつけて次のように表す.



$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{r\to 0}\left\{\int_{-R}^{a-r} f(x)dx + \int_{a+r}^{R} f(x)dx\right\} \tag{15.1}$$

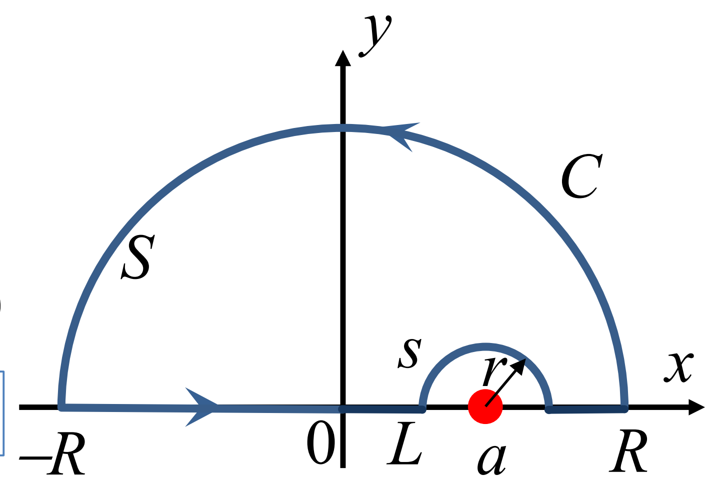
主値積分を留数を使って計算する.
$f(z)$をCに沿って積分する場合,C内でm個の留数が求まれば
留数定理より $\boxed{I = \int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f, z_k)}$ である.

一方,積分路Cを,実軸上の線分L, 小半円s, 大半円Sに
分割してそれぞれの積分の和を $I = I_\mathrm{L} + I_\mathrm{s} + I_\mathrm{S}$ と表すと,
I_L が求める主値積分である.

主値積分

小半円での積分を考えるため

$f(z)$を$(z-a)$でローラン展開すると



$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z) \quad , \quad b_1 = \mathrm{Res}(f(z), a)$$

$g(z)$は小半円s上で正則とする.

2位以上の極を持たないとすればこの議論の通り。

積分路の向きに注意すると $s : z = a + re^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le a)$

と書けるので, $I_{-s} = \int_0^{\pi} \frac{b_1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_s g(z) dz$

周回積分すれば＝0はわかっているが半周なので0は保証されない. 結果はg(z)がa近傍で正則であるか,またはmが奇数なら0,偶数なら-2*r^{m+1}/(m+1). m<-1が問題.r→0で発散の懸念.もしかしてm=−1,-3,-5,...でしか使えない？

右辺第1項$=b_1 i\pi$,第2項は,ML不等式と$r \to 0$で$M\pi r \to 0$より0となる. ∴$I_{-s} = b_1 i\pi$ となる.

実軸上に複数の特異点がある場合は

$$\boxed{I_{-s} = \pi i \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{Res}(f(z), a_\ell)}$$

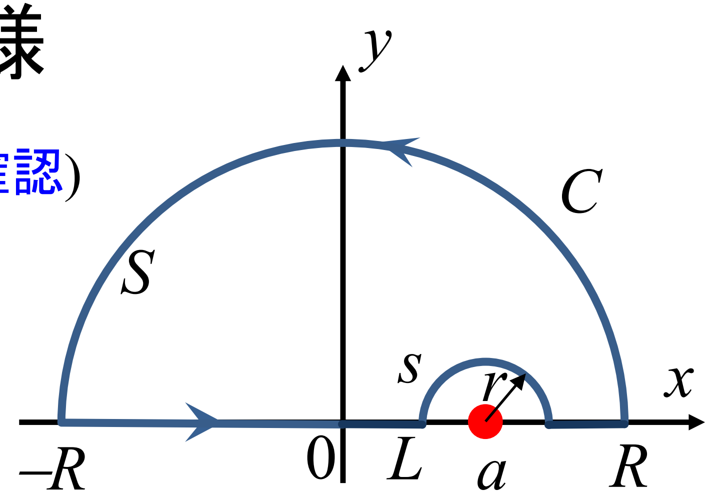
主値積分

大半円Sでの積分はこれまで同様

$R\to\infty$で$I_S\to 0$を期待している.(要確認)

よって, $I_L = I - I_s - I_S = I + I_{-s}$ だから,

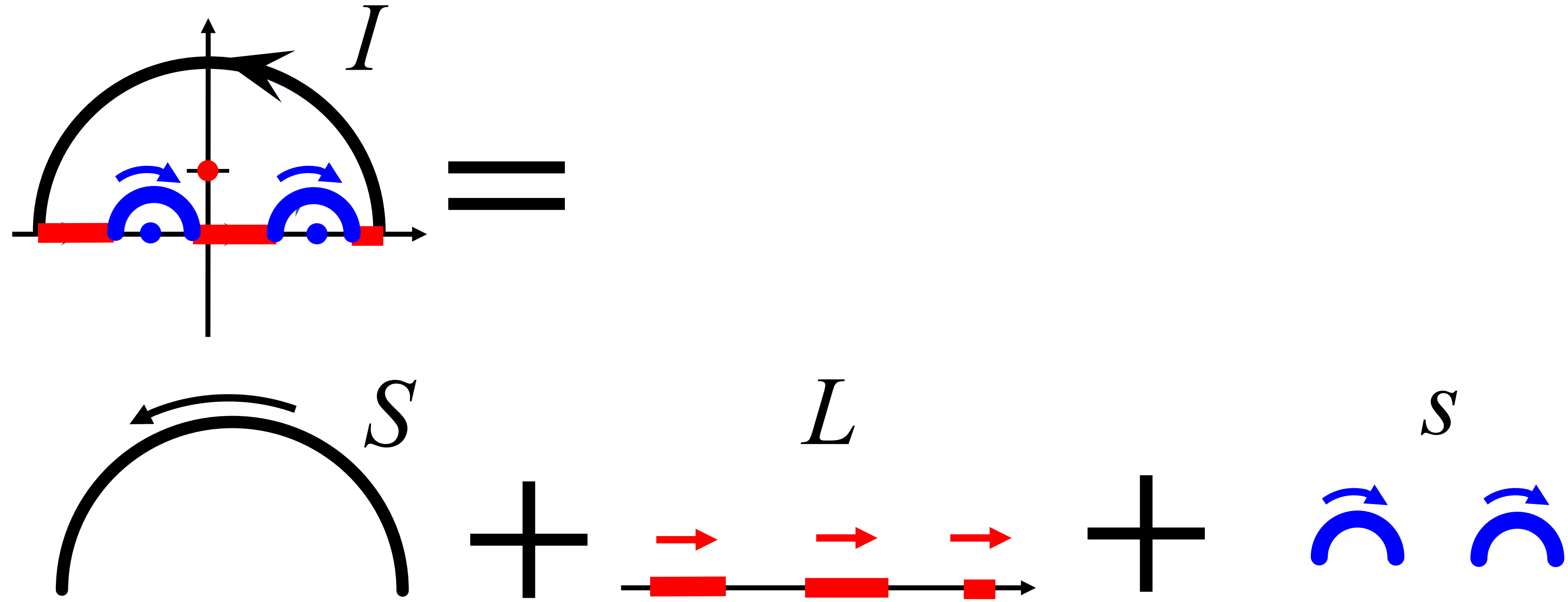
主値積分は次の式になる.



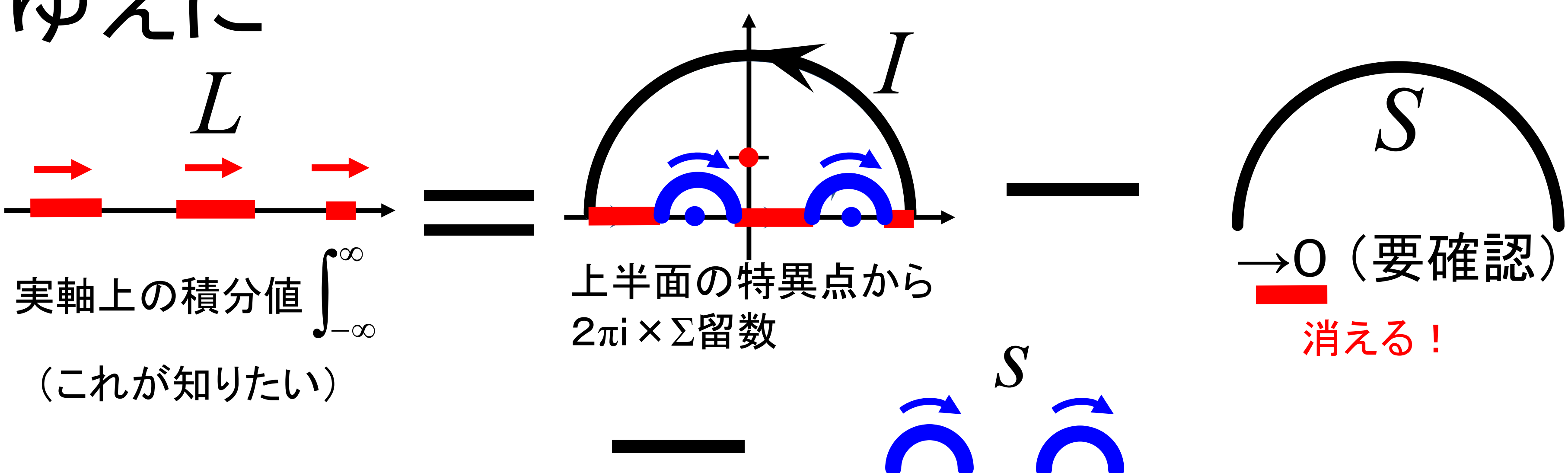
$$\boxed{P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f,z_k)+\pi i\sum_{\ell=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_\ell)} \quad (15.2)$$

複素平面の上半面にある特異点

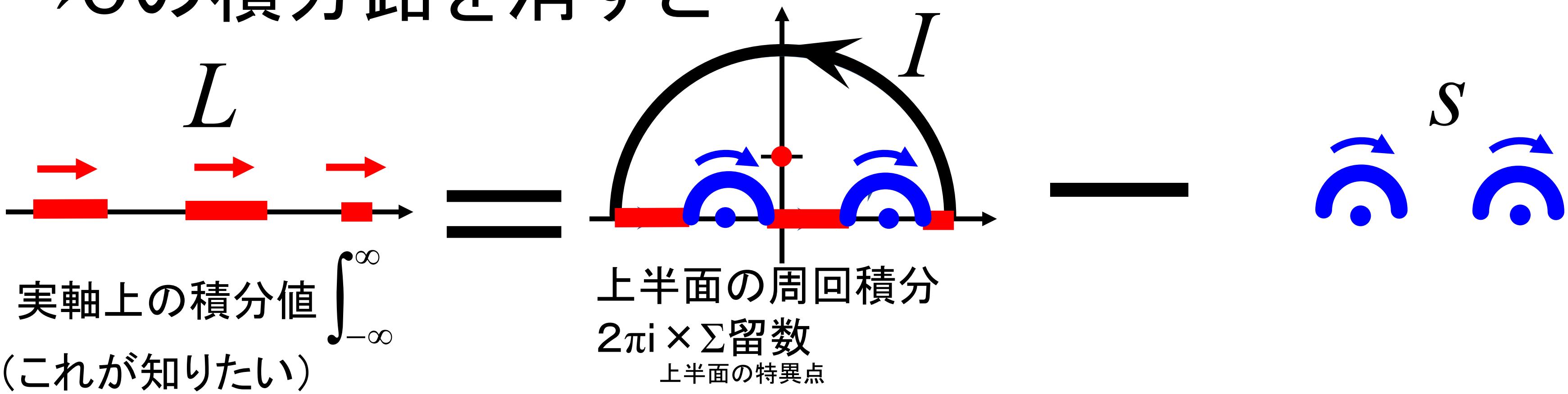
実軸上の特異点

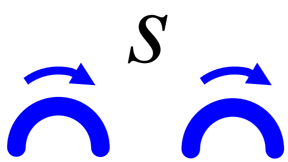

I
S
L
s

ゆえに

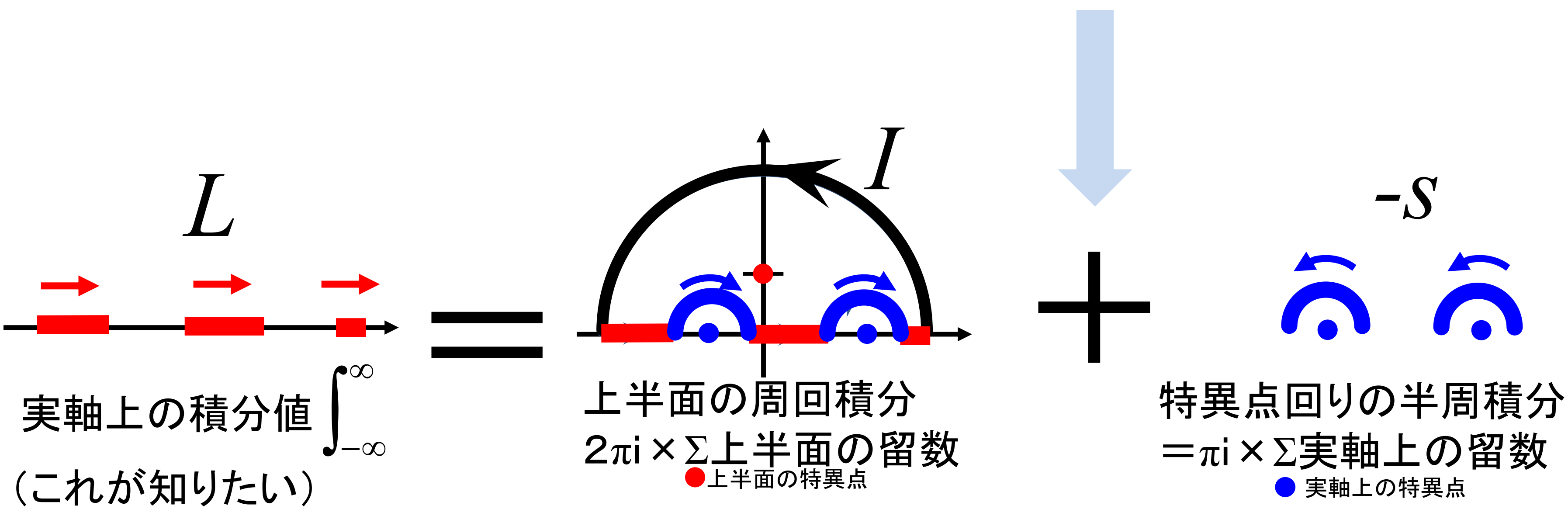

L
実軸上の積分値 $\int_{-\infty}^{\infty}$
（これが知りたい）
I
上半面の特異点から
2πi×Σ留数
S
→0（要確認）
消える！
s

→0の積分路を消すと





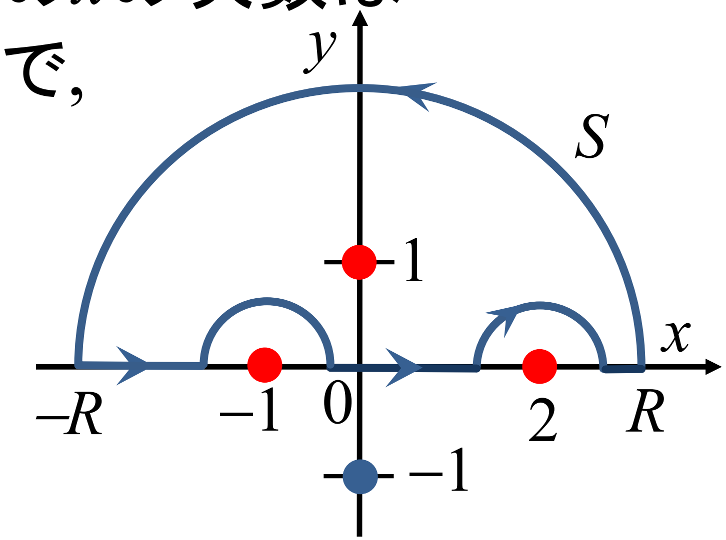
の周回方向を逆転すると符号が反転するから



例題15．1

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2-x-2)(x^2+1)}dx$$ を求めよ.

解）積分路を図のように取る．分母のxの次数は分子の次数より2以上大きいので，
$R\to\infty$で大半円の積分$I_S\to 0$.



$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z+1)(z-i)(z+i)}$$ なので，

上半面の特異点：$z=i$ (1位の極)

実軸上の特異点：$z=2,-1$ (1位の極)

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Res}(i)&=\lim_{z\to i}\left\{\frac{1}{(z-2)(z+1)(z+i)}\right\}=\frac{1+3i}{20}\\
\mathrm{Res}(2)&=\lim_{z\to 2}\left\{\frac{1}{(z+1)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{1}{15}\\
\mathrm{Res}(-1)&=\lim_{z\to -1}\left\{\frac{1}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\}=\frac{-1}{6}
\end{aligned}\right\}$$

前ページの式(15.2)より積分値＝

$$2\pi i\left(\frac{1+3i}{20}\right)+\pi i\left(\frac{1}{15}+\frac{-1}{6}\right)=-\frac{3}{10}\pi$$ (答)

まとめ:本日の確認事項

- 複素関数をローラン展開し，留数を求めることができる.
- 特異点の分類とその特徴を説明できる
- m位の極に対する留数を求めることができる
- 留数定理を使って複素積分ができる
- 実三角関数の積分を,留数を使って計算できる
- 有理関数の積分を留数を使って計算できる
- 主値積分の意味を説明し,実際に計算できる