解析学　第3回

複素関数の正則性

- 微分と正則性
- コーシー·リーマンの方程式
- 正則性の判定

複素関数の微分

- 微分公式
- 調和関数
- 複素ポテンシャル

複素関数の正則性

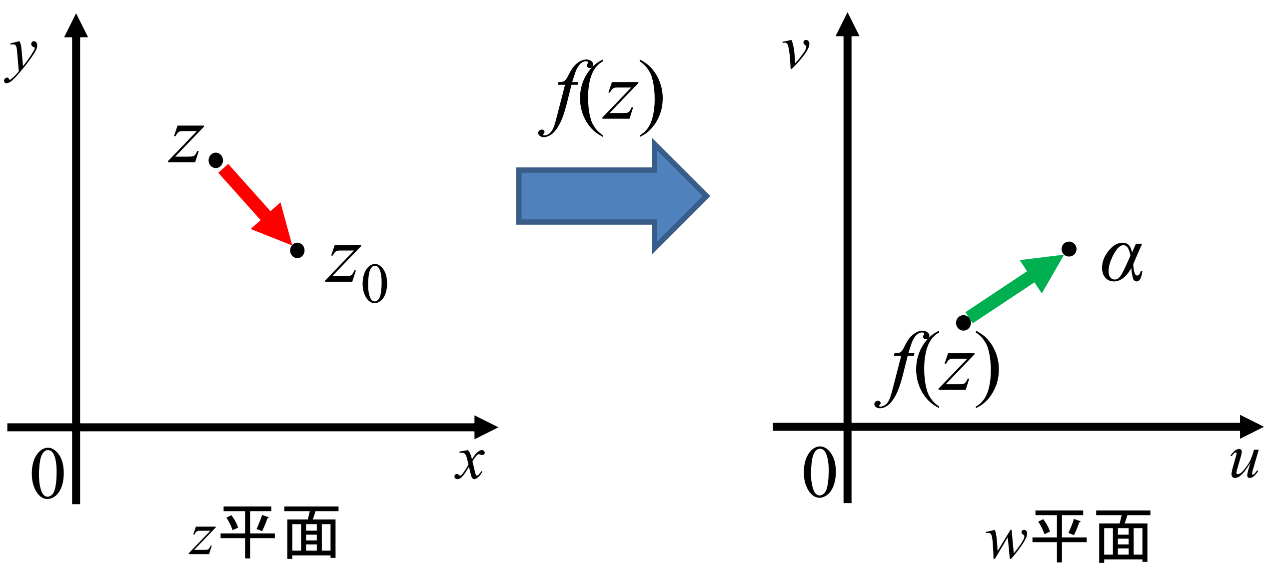
目標

1)微分可能とは？
2)正則とは？
3)正則であるための
　必要十分条件は？
4)導関数の表式は？

複素関数の極限値

点zが点z_0に近づくときに,
関数値 $f(z)$ もある値 α に近づくとき,
αをz_0での **極限値** という.

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha}$$



(極限) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ の厳密な定義

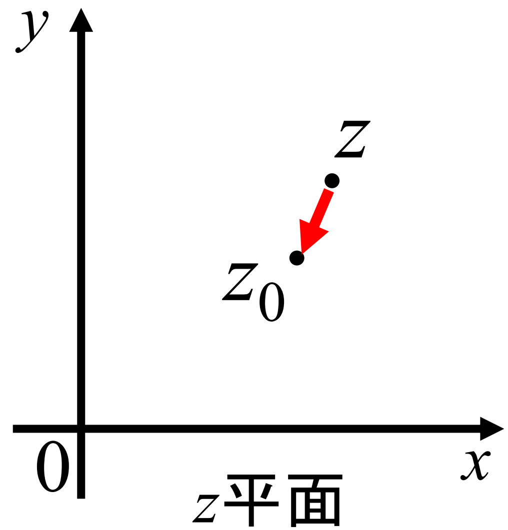
z_0を複素平面上の固定点と考え,
zを複素変数とする.

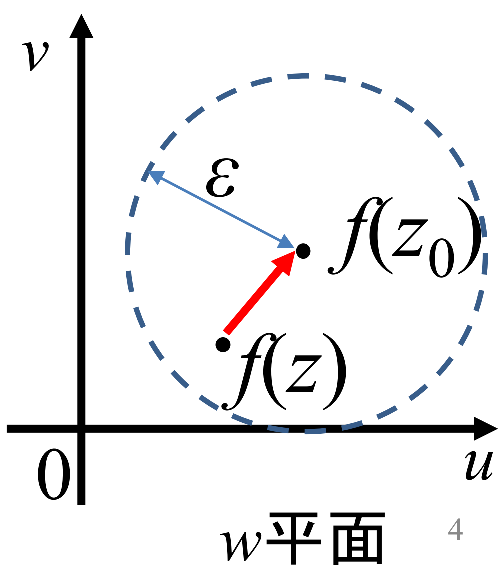
ε は正の実数を表すものとする.

このとき, ε としていかなる正の実数を選んでも,
(気持ちとしては,「どんなに小さな正数を選んだとしても」)

$$\left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$$

を満足するような複素数zを選ぶことができるとき, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ と表す.





極限に関する証明でこの論理と表現方法を使う.

「点z_0で連続」の定義

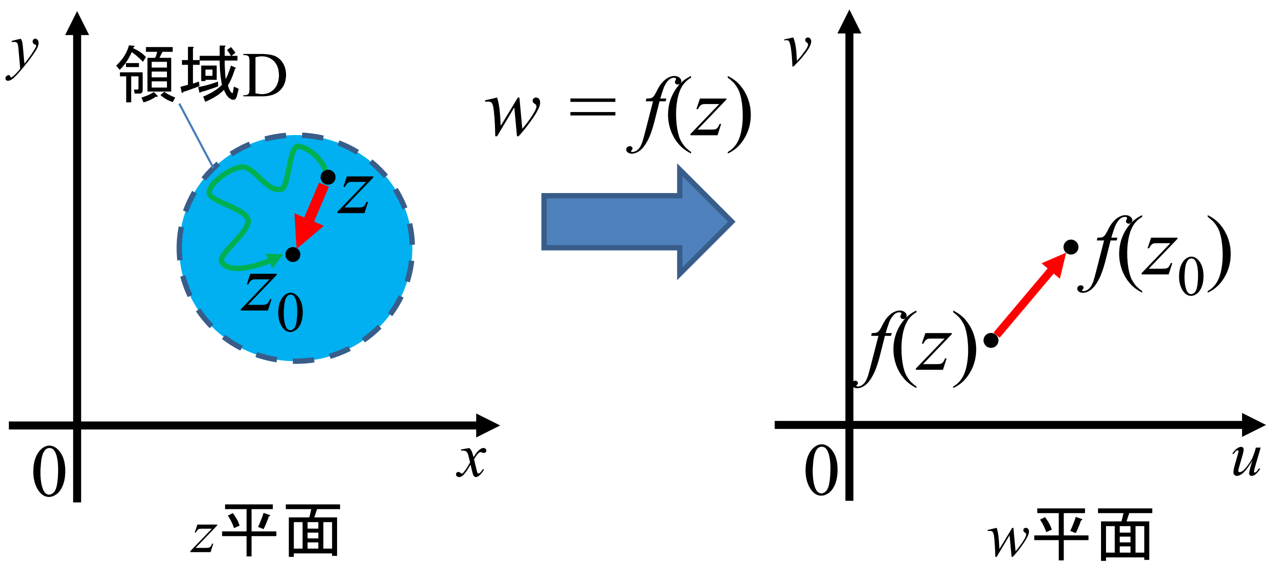
領域D内の点z_0に対して，

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

が成り立つとき，

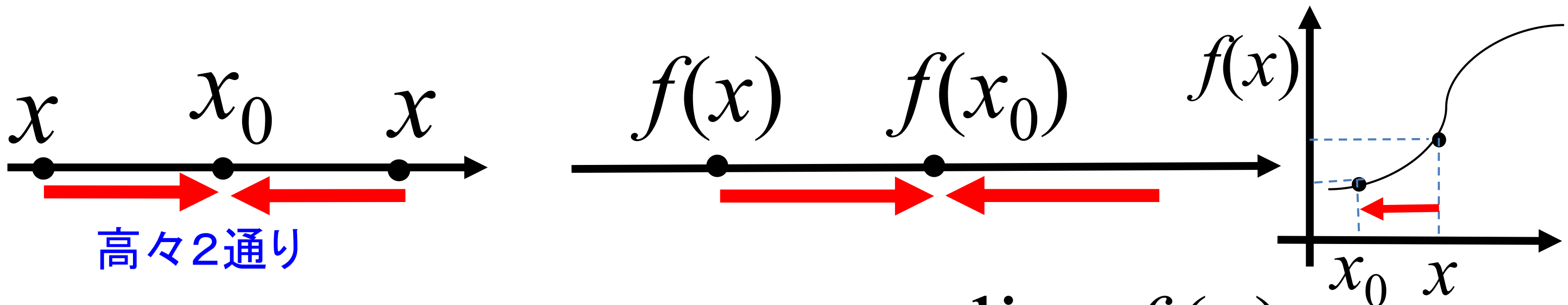
$f(z)$は，**点z_0で連続**である，という．

領域D内のいかなる点zから出発して,いかなる経路を通ってz_0に近づいたとしても成り立つ，という意味



$\lim_{z \to z_0} f(z)$ の意味

- 実数の一変数関数の場合は $\lim_{x \to x_0} f(x)$
  変数xについて一次元で考えればよかった.



- 複素数の一変数関数の場合 : $\lim_{z \to z_0} f(z)$
  $z=x+iy$なので, (x,y)二次元平面で考えなくてはいけない. 無限にたくさんの経路がある.

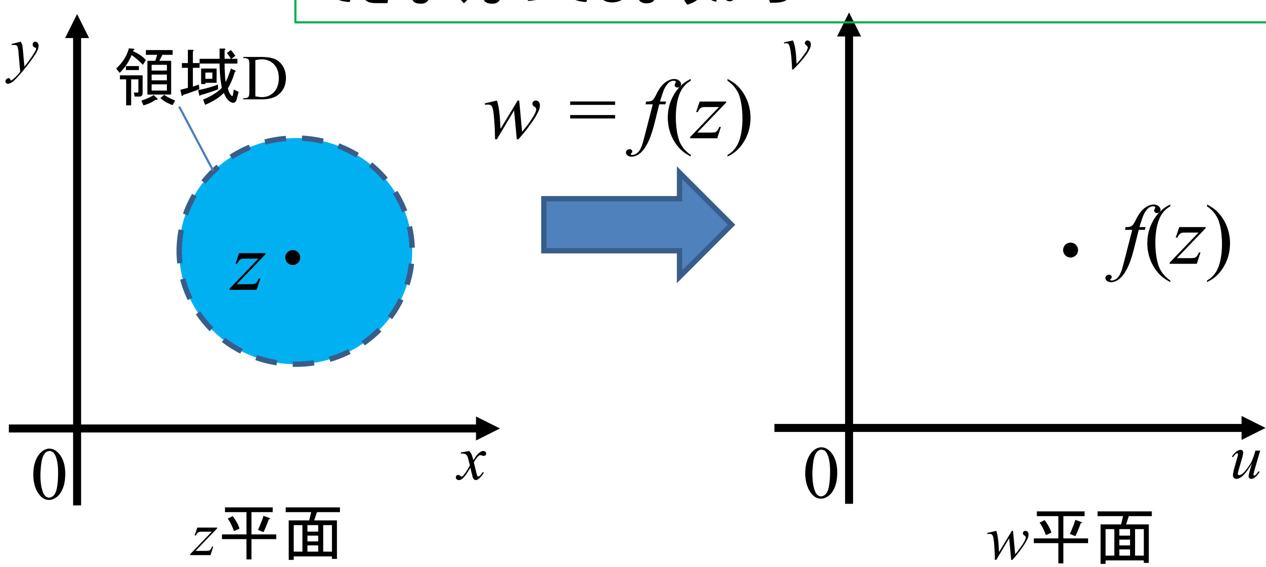
不連続関数では, 近づく経路によって値が異なる

「連続」の定義

領域D内のどの点においても $f(z)$ が連続であるとき

$f(z)$ は**連続**である，という.

(注)「領域」は外周を含まない．含んでしまうとその外側から近づいてきたときの値がどうなるか不定となり極限値が定義できなくなってしまうから.



点z_0における微係数の定義

$$\underbrace{f'(z_0)}_{\text{点}z_0\text{における微係数}} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (6.1)$$

右辺の極限が存在し，１つに定まるとき，

$f(z)$は$z=z_0$で**微分可能**という.

また，微係数が存在しない点を，**特異点**と呼ぶ.

微分可能⇔連続　の証明

$f(z)$ がz_0で微分可能であれば, $f'(z_0)$ が存在するから,

微係数の定義から,　$\lim_{z \to z_0} \{ f(z) - f(z_0) \} =$

$$= \lim_{z \to z_0} \left\{ (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right\} = 0 \cdot f'(z_0) = 0$$

よって, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$　が成り立つ.

「微係数が存在する」⇔「z_0近傍のいかなるzから出発して, いかなる経路をたどっても上の式が保証されている」

従って, $f(z)$は$z=z_0$で連続である,といえる.

導関数の定義

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

微係数の定義式(6.1)の右辺で，$z - z_0 \equiv \Delta z$ とおくと，

$z = z_0 + \Delta z$,また，$z \to z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta z \to 0$

なので，式(6.1)は次のように書き換えられる．

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

変数z_0をあらためて変数zに置き換えると，

は、あらゆる複素数を取り得ると考えて

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad (6.2)$$

ただし，$\Delta w \equiv f(z + \Delta z) - f(z)$

これを**導関数**という．$\dfrac{df(z)}{dz}, \dfrac{dw}{dz}$ などと表すこともある．

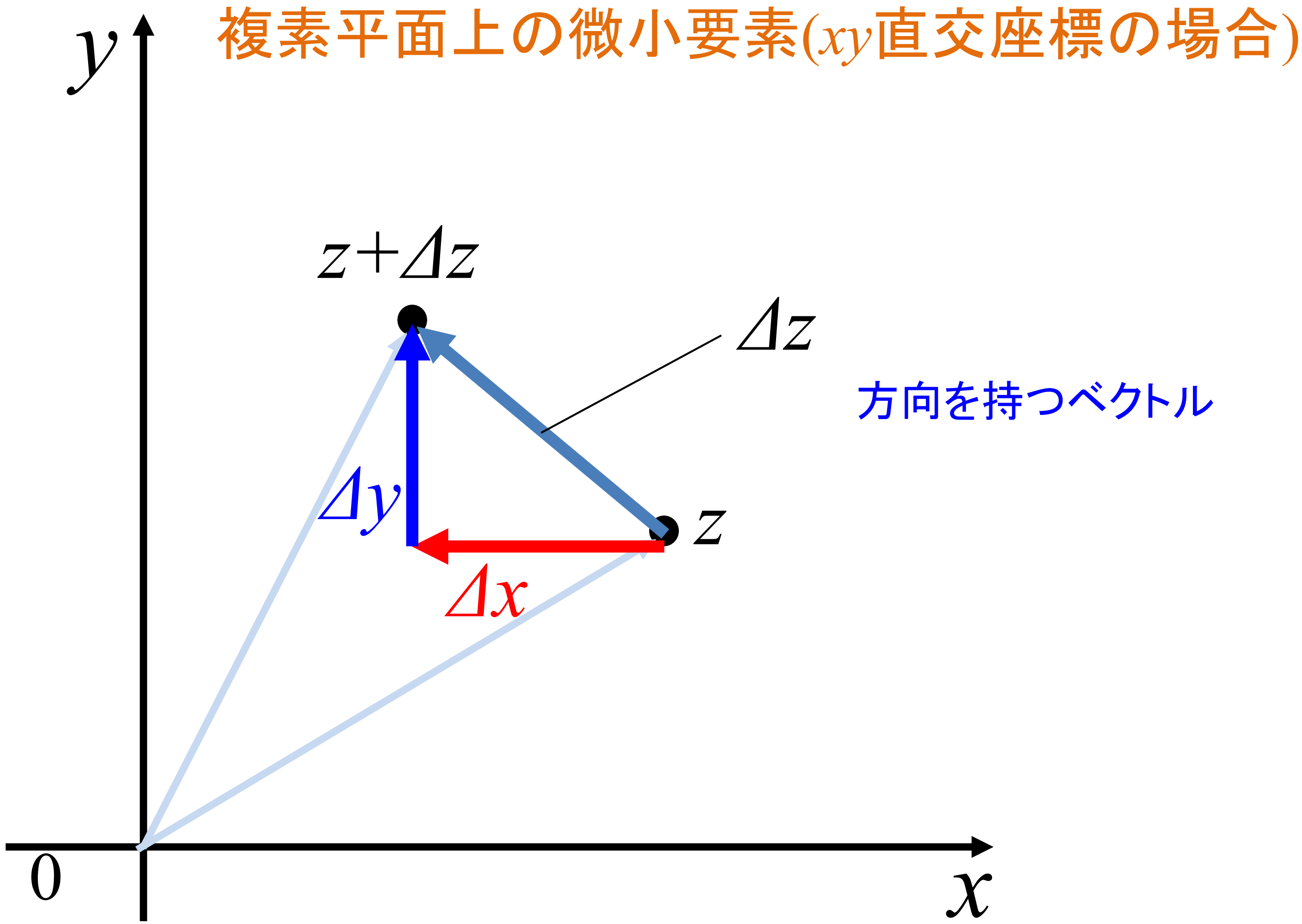
複素関数の「導関数」は「傾き」か？

導関数の定義

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}}$$

分母，分子，ともに実部と虚部を持つので，$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $f = u(x,y) + iv(x,y)$などとおいて上の式に代入してみるとわかるが，複雑な式となっていて，「微係数」といえども，もはや実関数のときのような，「傾き」などの直感的にわかりやすい意味を見出すことは難しい．直感に頼らず，数式を規則に従って慎重に計算していく必要がある．

$z=x+iy$ のとき $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$



例題６．１ $f(z)=z^2$ を,定義式(6.2) により微分して導関数を求めよ.

（本問の場合，微分可能であることは前提としてよい.
一般的な微分可能性の判定方法は後述する）

(解) 導関数の定義式(6.2)

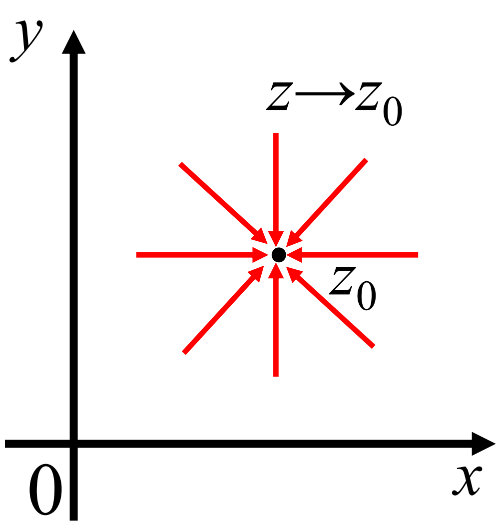
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

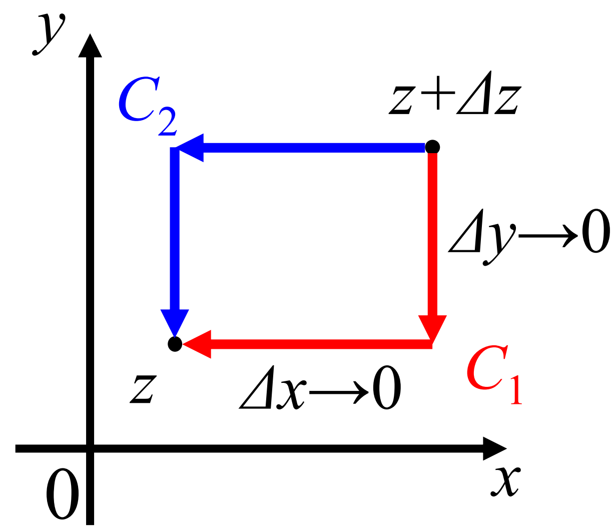
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z}$$

$$= 2z$$

（実数の場合と同様）

極限操作$z \to z_0$の経路





極限操作の方向

始点zの選び方とz_0への経路は
無限に存在する

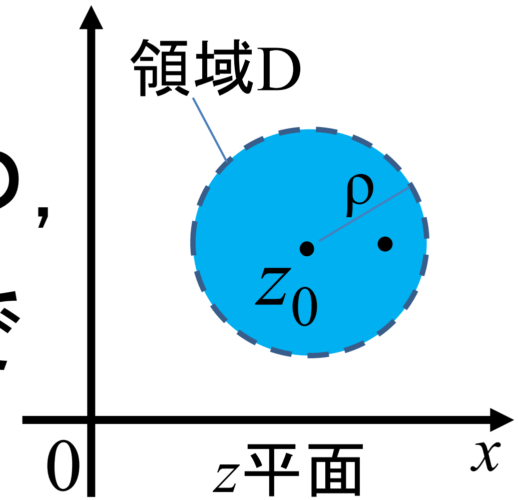
極限値を求める経路

たとえば,

経路C_1: まず$\Delta y \to 0$, 次に $\Delta x \to 0$
経路C_2: まず$\Delta x \to 0$, 次に $\Delta y \to 0$

微分可能なら経路に寄らず微係数は同一

「正則」とは



関数 $f(z)$がz_0で定義され，かつ，

z_0の近傍 $|z-z_0|<\rho$ 内の各点で

微分可能であるとき

といえるような正の実数ρが存在する

$\Rightarrow$「$f(z)$は，点z_0で正則である」という

ちなみにρは、$\rho>0$ならどんなに小さい値でもよく、存在が保証されていさえすればよい

また，$f(z)$が領域Dの各点で微分可能であれば，

$f(z)$は領域Dで正則である，という

（「正則」を表す英単語：regular, analytic, holomorphic）

「ある点z_0で正則」ならば，点z_0近傍(領域)での微分可能性も同時に保証されている

コーシー・リーマンの方程式

関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の導関数を定義に基づいて計算してみよう.

$$\boxed{f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}}$$

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\{u(x+\Delta x,\boxed{y+\Delta y})+iv(x+\Delta x,\boxed{y+\Delta y})\}-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta z}$$

２つの経路C_1およびC_2について，それぞれ値を計算してみる.

経路C_1では，まず$\varDelta y\to 0$, 次に $\varDelta x\to 0$ よって，

まず$\varDelta y\to 0$ を実行すると，

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\{u(x+\Delta x,\boxed{y})+iv(x+\Delta x,\boxed{y})\}-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta z}$$

またこの場合，$\varDelta z\to 0 \Leftrightarrow \varDelta x\to 0$ となることに注意して$\varDelta x\to 0$ を実行すると

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}\boxed{=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}}$$

コーシー・リーマンの方程式

次に，経路C_2では，まず$\Delta x \to 0$, 次に $\Delta y \to 0$ の順に実行

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\{u(\boxed{x + \Delta x}, y + \Delta y) + iv(\boxed{x + \Delta x}, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\Delta z}$$

まず$\Delta x \to 0$ を実行すると,

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\{u(\boxed{x}, y + \Delta y) + iv(\boxed{x}, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{\boxed{\Delta z}}$$

また，$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ なので，$\Delta x \to 0$ により $\Delta z = i\Delta y$ となることに注意して

$\Delta y \to 0$ を実行すると

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\boxed{i\Delta y}} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\boxed{i\Delta y}} \right\} \boxed{= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}}$$

コーシー・リーマンの方程式

複素関数$f(x)$が正則であれば微分可能であり，
先に求めた2つの導関数は同一でなければならない．
よって，次の式が得られる．

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}} \qquad (6.4)$$

導関数の表式

実部と虚部を比較

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} &\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}} \\ &\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}} \end{aligned}\right\} \text{コーシー・リーマンの方程式} \qquad (6.3)$$

コーシー・リーマンの方程式

「関数$f(x)$が正則」 ⇔ コーシー・リーマンの方程式を満たす

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}} \\ \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}} \end{cases}$$

必要十分条件になっている

必要条件(→)であることは前ページまでに証明した.

これら4つの偏導関数→が「連続」であれば十分条件を証明できる

逆に, コーシー・リーマン方程式が成り立ってさえいれば,
いかなる複素関数でも,また,いかなる経路をたどろうとも,必ず
微分が存在すること(十分条件←)を証明する必要がある.
(コーシー・リーマンを仮定して, 正則であることを導く)

と,4つの偏導関数の連続性

この証明は本講義では省略する.

微分可能でない関数の例

$$f(z)=\bar{z}$$ （zの複素共役）

(説明)

$z=x+iy, \quad \Delta z=\Delta x+i\Delta y$ であるから，関数の定義式

$f(z)=\bar{z}=x-iy$ の導関数は，次のようになる

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x-i(y+\Delta y))-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

次に，各経路について極限値を計算しよう.

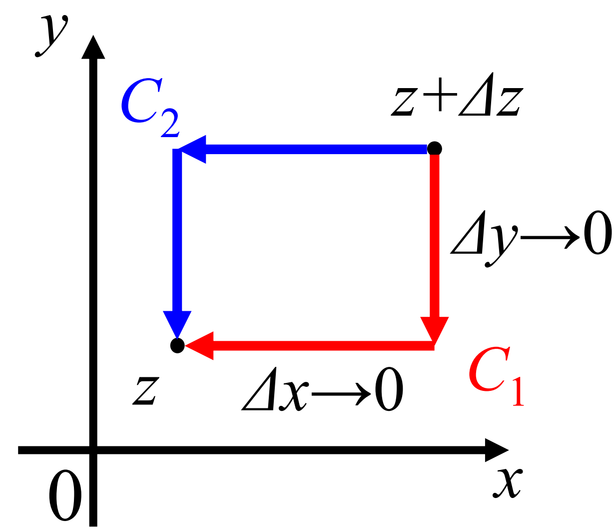
極限値を求める経路として

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

右図の経路C_1を選ぶと,

$\Delta y\to 0$ の後に $\Delta x\to 0$ とするので,

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$ である.



一方,経路C_2を選ぶと,

$\Delta x\to 0$ の後に $\Delta y\to 0$ とするので,

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$$ となる.

よって経路によって導関数が異なるので,微分可能ではない.

(複素共役を含む複素関数は,意外にも「危険」であることがわかった)

導関数$f'(z)$の表式

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ とするとき，　(6.4)

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}}$$

なんと，実部と虚部をそれぞれxで偏微分するだけで導関数が得られる，というのである！

実部と虚部をそれぞれyで偏微分するだけでもよいが，その場合は$(-i)$を乗ずる．

「導関数」の意味？再び

導関数の表式:

$$f'(z) = \underline{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

「微係数」といえども，もはや実関数のときのような，「傾き」などの直感的にわかりやすい意味を見出すことは難しいが，上の式(赤線部)からわかることは，導関数f'の実部は，元の関数fの実部uの実軸方向の「傾き」であり，導関数の虚部は，fの虚部vの実軸方向の「傾き」になっている，ということである．($f(z)$を実変数xで偏微分しただけ)

複素関数f'が全体として何を意味するかは依然としてわかりにくいが，実部と虚部を別々に取り出してみれば，元の関数の「傾き」をかろうじて見出すことができる．

コーシー·リーマン方程式の極形式表示

(方針) $f(z)$, z を r, θ 表示して,それぞれ r, θ で微分した表式を求める.

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

これらを用いて, u のrとθに関する微分を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} \quad (\bigstar)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

コーシー·リーマン方程式の極形式表示

(方針) $f(z)$, z を r, θ 表示して,それぞれ r, θ で微分した表式を求める.

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

また, v のrとθに関する微分は u と同様に,

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial y} \quad (☆)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}$$

コーシー·リーマン方程式の極形式表示

コーシー·リーマンの方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ と $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を代入すると

前ページ(☆)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin\theta\frac{\partial v}{\partial y}-\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

前々ページ(★)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=-\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}$$

以上から，極形式のコーシー·リーマン方程式の表式は，

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}} \qquad \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}} \qquad (6.5)$$

極形式による導関数の表式

$$\boxed{f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)}$$

(要証明　→問題6．7)

正則性の判定法

1） $f(z)=u+iv$がコーシー・リーマンの方程式を満たしていれば正則

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}}\quad\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

例） $f(z)=z^2$ の正則性を判定する

$z=x+iy,\quad f(z)=u+iv$ とおくと,

$z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$ なので,

(実部) (虚部)

$u=x^2-y^2,\ v=2xy$ とわかる. CRの右左辺を計算

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

よってコーシー・リーマンの方程式が成り立つので正則.

例題6．2

$f(z)=e^z$ が正則であるかを調べ，正則なら導関数を求めよ．

（解） $z=x+iy$とすると，オイラーの公式(4.5)より

$$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)\equiv u+iv$$

$$\begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases}$$

よって，コーシー･リーマン方程式の各辺の偏微分をそれぞれ計算すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$$

以上よりコーシー･リーマン方程式を満たすので正則とわかる．導関数は式(6.4)より

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}}=e^x\cos y+i(e^x\sin y)=e^z$$

例) $f(z)=1/z$ が正則であるかを調べる.

(解) $1/z$は原点で不定なので，原点以外の点における正則性をまず調べよう.
まず$f(z)$を実部と虚部に分解する.

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}\equiv u+iv$$

よって　$u=\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

コーシー･リーマン方程式の各辺の偏微分をそれぞれ計算すると,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x2x+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-y2y+(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

よってコーシー･リーマン方程式が成り立つので$z\neq 0$では正則.
しかし$z=0$では定義できないので微分可能ではない．結果，$z=0$以外は正則.

正則性の判定法

２） 与えられた関数を, z とその共役 $\bar{z}$ で書き直し, $W(z,\bar{z})$

とするとき, $\boxed{\dfrac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0}$ が成り立てば正則.

(証明)

$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy,\ \ W(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくと,

$$\frac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}$$

ここでu,vはx,yの関数だから

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}$$

・・・（注☆）

←このような式変形が成り立つように、複素関数の偏微分を定義したのである（後述）

ここで $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2},\ y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ より, $\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\dfrac{1}{2}i$ よって,

$$\frac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

２つのカッコ内＝０　は，それぞれコーシー･リーマンの方程式と等価となる.

以上から，$\boxed{\dfrac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0}$ $\Leftrightarrow$ コーシー･リーマンの方程式

よって，$\dfrac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0$ は 正則性の判定式となる.

【参考】複素関数の偏微分

- 前々ページの式（注☆）の導出において，複素関数の偏微分を定義せずに使ってしまったので，順番が前後するが，ここで定義しておく．
- 実際，複素関数としてのxの微分dx/dzは微分不可能であるにもかかわらず，偏微分$\partial x/ \partial z$は定義されることに注意しよう．

複素関数の偏微分の定義

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)}$$

このように定義しておけば、前々ページ、前ページの式変形が結果的に妥当となる．すなわちz,z^*を独立な2実数変数と見なして式変形しても正しいことが保証される仕掛けになっている。

例題６．３

$f(x,y)=x^2-y^2+i2xy$ の正則性を $W(z,\bar{z})$ 判定法で調べよ.

(解)　$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2},\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ を $f(x,y)$ に代入すると,

$$f(x,y)=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+i2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$=\frac{1}{4}\left(z^2+\bar{z}^2+z^2+\bar{z}^2\right)+\frac{1}{4}\left(2z^2-2\bar{z}^2\right)$$

$$=z^2$$

よって, $\bar{z}$ を含まないので, $\dfrac{\partial W(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}=0$ となり

正則である.

（関数式がzのみでその複素共役を含まない形で書ける場合には特に有用であろう）

複素関数の微分

要点

1)正則関数の微分公式は，
実関数の微分と形式的に同じ

2)調和関数とは

実関数$h(x,y)$がラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$ を満たす時，

h を調和関数という．

正則関数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$の実部u，虚部vは調和関数である．

微分公式

複素関数$f(z), g(z)$が微分可能であれば，実関数と同等の公式が成り立つ。

1） $\{cf(z)\}' = cf'(z)$　cは複素定数　(複素定数倍)

2） $\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z)$　(和と差)

3） $\{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$　(積)

4） $\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$　(商)

5） $\{f(g(z))\}' = f'(g(z))g'(z)$ または $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{du}{dz}$　(合成関数)

6） $\{f^{-1}(z)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ または $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{dz/dw}$　(逆関数)

7） $f(z), g(z)$がz_0で正則かつ$f(z_0)=g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$ならば $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

ド・ロピタルの公式

微分公式の証明

1）～4）は定義から自分で証明できるようにしておいてください．

5）$\{\boxed{f}(\boxed{g(z)})\}' = f'(g(z))g'(z)$ または $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{du}{dz}$ （合成関数）

証明）

$\boxed{u} = g(z)$, $\boxed{w} = f(u)$ とおくと，ΔuとΔwの表式は，

$\Delta u = g(z+\Delta z) - g(z)$，$\Delta w = f(u+\Delta u) - f(u)$ であり，また，

$g(z)$は連続であることから， $\Delta z \to 0$のとき，$\Delta u \to 0$となるので

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta w}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dz}$$

微分公式の証明

6） $\{f^{-1}(z)\}' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(z))}$ または $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{dz/dw}$ (逆関数の導関数)

証明）

$w = f^{-1}(z)$ とおくと, $\boxed{z} = \boxed{f(w)}$ なので, 両辺をzで微分すると

合成関数の微分

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dz}\boxed{z} = 1$$

また, (右辺)$= \dfrac{d}{dz}\boxed{f(w)} = \dfrac{d}{dw}\boxed{f(w)} \cdot \dfrac{dw}{dz}$

$$= \frac{d\boxed{z}}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

以上より, (左辺)＝(右辺)とすると

$$\boxed{1 = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}}$$

が証明される.

例題7．1　公式7）ド・ロピタルの公式

$f(z)$,$g(z)$がz_0で正則かつ $f(z_0)=g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$ ならば

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}}$$

を証明せよ.

証明）

$f(z_0)=g(z_0)=0$ であることから, $f(z)=(z-z_0)\phi(z),\ \ g(z)=(z-z_0)\psi(z)$

とおいても一般性を失わない. (あらゆる複素関数$f(z)$はzのべき級数で表すことができるから)

両辺を微分すると, $f'(z)=\phi(z)+(z-z_0)\phi'(z)$

$$g'(z)=\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)$$

$z=z_0$を代入すると,

$f'(z_0)=\phi(z_0)$

より,

$g'(z)\neq 0$であれば, f/gの極限について次式が成り立つ.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\cancel{(z-z_0)}\phi(z)}{\cancel{(z-z_0)}\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\phi(z)}{\psi(z)}=\frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

複素関数の微分公式

三角関数や指数関数などの複素関数は正則関数なので,導関数の式(6.4)等から次の微分公式が導かれる.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

８） $(z^n)'=nz^{n-1}$ $(n=1,2,3....)$

９） $(e^z)'=e^z$ （例題6．２で導出済み）

１０） $(\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z,\ (\tan z)'=\dfrac{1}{\cos^2 z}\quad (\cos z\neq 0)$

１１） $(\log z)'=\dfrac{1}{z}\quad (z\neq 0)$

１２） $(z^a)'=az^{a-1}$

微分公式の証明

８） $(z^n)' = nz^{n-1}$ $(n=1,2,3....)$

証明） 数学的帰納法による方法を以下に示す．

$n=1$の時，$f(z)=z$ を微分の定義式に代入すると，

$(z)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)-z}{\Delta z} = 1$ となり与式は成り立つ．

$n=k$の時，与式が成り立つと仮定すると，$n=k+1$について

$(z^{k+1})' = (z \cdot z^k)'$ ここに積の微分公式を適用すると

$= z' \cdot z^k + z \cdot (z^k)'$

$= 1 \cdot z^k + z \cdot kz^{k-1}$

$= (1+k)z^k$ よって$n=k+1$のときも成立する．

微分公式の証明

１０）　　$(\sin z)' = \cos z$　　を証明してみよう.

証明）

sinの**定義式** $\boxed{\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}$ を微分する.

係数を前に出すだけ

$$(\sin z)' = \frac{\dfrac{d}{dz}(e^{iz}) - \dfrac{d}{dz}(e^{-iz})}{2i} = \frac{\cancel{i}e^{iz} - (-\cancel{i})e^{-iz}}{2\cancel{i}} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

指数関数の微分の公式

$$= \cos z$$

cosの定義式

微分公式の証明

１１）　$(\log z)' = \dfrac{1}{z}$　を証明してみよう.

証明１）逆関数の微分の公式を使う方法

$w = \log z$　とおくと,　$z = e^w$

よって,

逆関数の微分の公式

$$(\log z)' = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

逆関数の公式を使わずに, logの定義と導関数の定義から
導出する方法も確認しておこう.

11） $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$ を証明してみよう. (別解)

証明2） logの定義と, 導関数の表式から導く方法

$z=re^{i\theta}$ とおくと, $\log z$の定義は,

$$\log z = \log r + i\theta$$

ただし, $\theta = \mathrm{Arg}\, z + 2n\pi$

(Argは主値, n=0,±1, ±2,...)

複素関数 $f(z)=u+iv$の導関数 $f'(z)$の表式は,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

直交座標表示 式(6.4)

$$\boxed{= e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)}$$

極座標表示 問題6.7

極座標表示を使う. $u=\log r$, $v=\theta$ なので, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r} = 0$ を代入すると,

$$(\log z)' = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

微分公式の証明

１２）　$(z^a)' = az^{a-1}$

証明）複素数のべき乗の定義　$z^a = e^{a\log z}$　より，

合成関数の微分

$$(z^a)' = (e^{a\log z})' = e^{a\log z}\cdot\frac{d}{dz}\left(a\log z\right) = e^{a\log z}\cdot\frac{a}{z}$$

$$= z^a\cdot\frac{a}{z} = az^{a-1}$$

例題7．2

$f(z)=\cos(iz)$ を微分せよ.

解） iz をひとかたまりの関数と見て，合成関数の微分の公式を適用すると，

cos z の微分

$$f'(z)=(\cos(iz))'\cdot(iz)' \quad =-\sin(iz)\cdot(i)$$

$$=-i\frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i}=-\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

sin z の定義

$$=\sinh z$$

(参照：公式を使うのではなく，関数の定義と導関数の一般式から
導出する方法 → 問題6.4(4))

調和関数

調和関数の定義

- x,yの関数$h(x,y)$がラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

を満足するとき, $h(x,y)$ を**調和関数**という.

複素関数の実部と虚部

複素関数 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ が

領域Dで正則かつ,連続な2階偏導関数を持てば,

コーシー・リーマンの方程式を使って,

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \boxed{\dfrac{\partial v}{\partial y}} \\ \boxed{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \boxed{-\dfrac{\partial v}{\partial x}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\boxed{-\frac{\partial v}{\partial x}}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

u,vは連続だから，偏微分の順番を入れ替えることができるので

辺々加えると, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

v についても全く同様に, $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

よって正則な複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ の

実部 $u(x,y)$ と, 虚部 $v(x,y)$ は, それぞれ調和関数である.

ただし, 2つの調和関数を実部と虚部に持つ関数が

正則であるとは限らない.

$$\boxed{\text{正則}} \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; \boxed{\text{実部と虚部が調和関数}}$$

たとえば, 正則関数 $f(z)=z^2$ の実部$u=x^2-y^2$, 虚部$v=2xy$ は

ともに調和関数だが, 実部と虚部を入れ替えた複素関数

$f(z)=2xy+i(x^2-y^2)$ は, コーシー・リーマン方程式を満たさないので正則ではない.

共役調和関数

関数 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ の実部と虚部が調和関数であり,

領域Dでコーシー･リーマン方程式を満たすときは,

虚部vを実部uの**共役調和関数**という.

コーシー･リーマン方程式(6.3)の $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を y で積分して

$$\boxed{v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + c(x)} \qquad (7.3)$$

ただし, $c(x)$はxの任意関数

で求めることができる. 次に(6.3)の $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ に

$u(x,y)$ と $v(x,y)$ を代入して,$c(x)$を決定すればよい.

- コーシー･リーマン方程式を満たす正則な複素関数の実部と虚部は独立ではなく，
- 実部の関数がわかると，そこから虚部の関数が計算できてしまう，というのである．
- むしろ「微分可能な」複素関数というのは，かなり厳しい縛りの掛かった特殊な関数と認識すべき．
- しかし，もちろん，微積分が使えるのは「微分可能な」複素関数のみである．

例題7．3

$u(x,y)=x^2-y^2$は調和関数であることを示し，
uを実部とする正則関数$f(z)$を求めよ．

解）uの１階，２階の偏導関数を求めると，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

ここから，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$が確認できるから u は調和関数である．

よって, 式(7.3)が使えるので, v の表式を求めると,

$$v=\int \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} dy+c(x)=\int \boxed{2x} dy+c(x)=2xy+c(x)$$

例題7．３

$u(x,y)=x^2-y^2$は調和関数であることを示し，
uを実部とする正則関数$f(z)$を求めよ．

このvの表式をxで偏微分すると $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\{2xy+c(x)\}=2y+c'(x)$

これと，先に求めた $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$ を，コーシー・リーマン方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ に，代入すると，

$-2y=-\{2y+c'(x)\}$ より， $c'(x)=0$ よって，$c(x)=k$ (定数)

以上から， $v=2xy+k$ と求まる．

よって，正則関数は，$f(z)=u+iv=x^2-y^2+i(2xy+k)$

$$=(x+iy)^2+ik$$

$$=z^2+k'$$ (k'は複素定数)

複素ポテンシャル

ラプラス方程式の工学応用の一例

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

- 定常熱伝導
- 静電界
- 非圧縮性流体
- 重力場

（ポテンシャル問題と呼ばれる）
（元々は，実数変数の微分方程式で記述されている）

２次元ラプラス方程式は
調和関数 $\Rightarrow$ ２次元ポテンシャル問題を正則な複素関数を求める問題に帰着させて解くことができる．

(注意) 本来は3次元空間の問題だが，複素関数と関係付けて解く場合は，２次元問題として適用することになる．（一次元方向は一定と考えて，本来３次元空間の問題を，２次元問題に帰着させる）

熱伝導方程式への応用例

- ２次元空間の温度を$T(x,y)$とすると
  熱伝導方程式は次のように表される.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (D\text{:拡散定数}>0)$$

定常状態では時間変化＝0なので，左辺は0となり
２次元ラプラス方程式となる.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

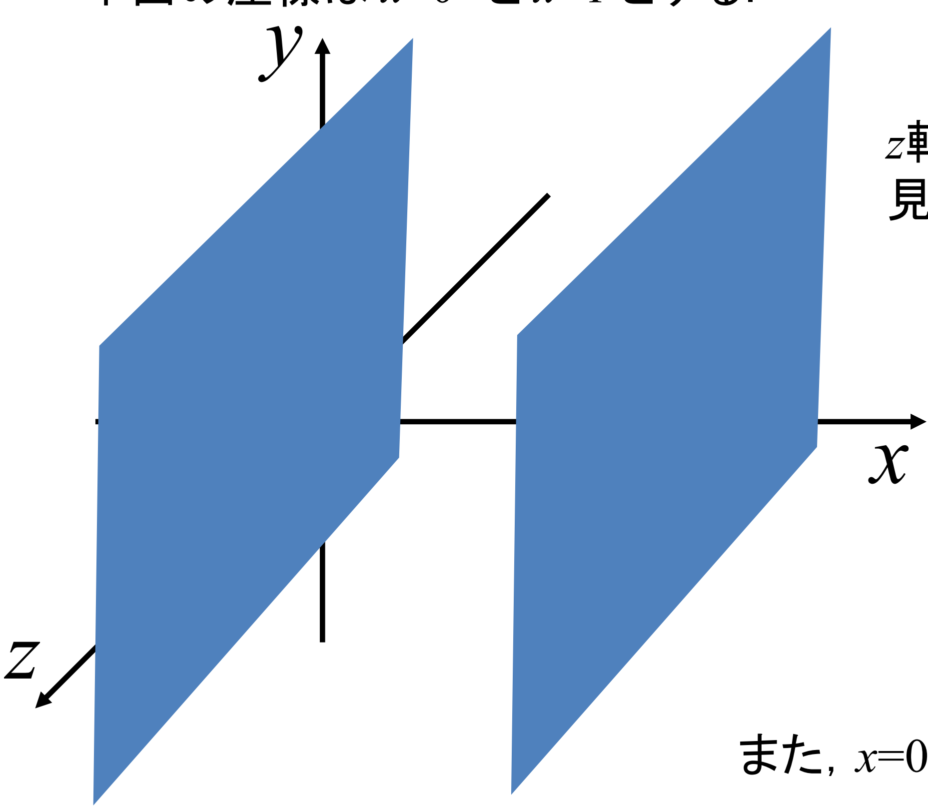
（T は熱ポテンシャルと呼ばれる）

(例1) 平行平板の場合

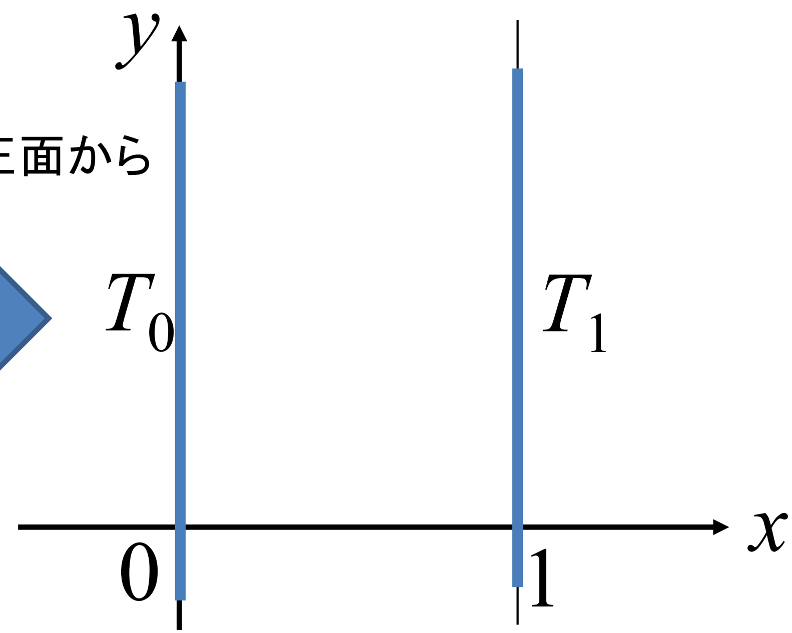
温度一定に保たれた無限長の平行平板が2枚対向している状況を仮定する.

温度T は x方向のみに変化し, y,z 方向には一定に保たれているものとする.

平面の座標は $x=0$ と $x=1$ とする.



z軸の正面から見た図



また, $x=0$ の平面の温度をT_0, $x=1$ の温度をT_1とする.

この時，温度Tはx方向のみに変化すると仮定したから $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

なので，結局，$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

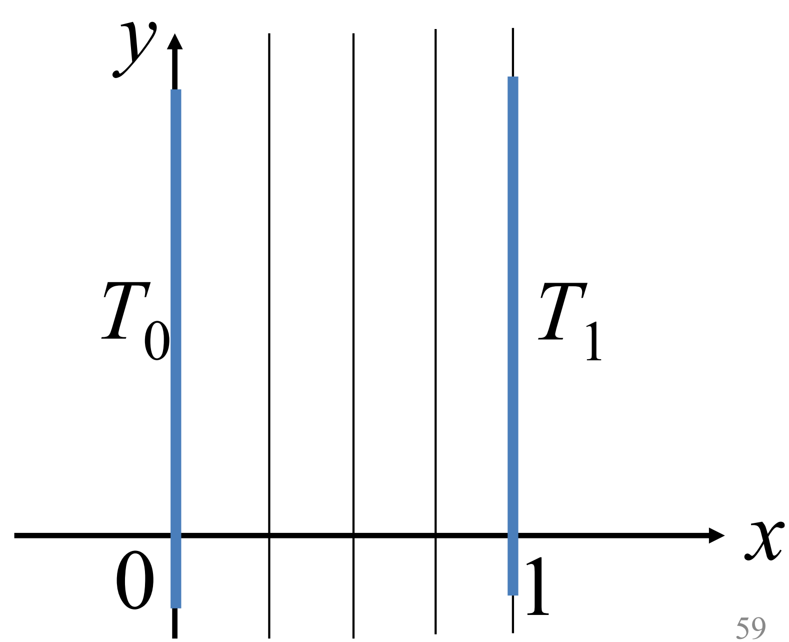
両辺をxで2回積分するとTの関数形は $T(x, y) = ax + b$ とわかる．(a,bは定数)

(7.4)

$x=x_0$の温度T_0, $x=x_1$の温度T_1を境界条件としてa,bを決定すると

$$T(x, y) = \frac{T_1 - T_0}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 T_0 - x_0 T_1}{x_1 - x_0}$$

温度一定の線を等温線といい，図示すると右図．
y軸に平行な等温線(z軸も考えると等温面)が
等間隔に並ぶ



求めた関数Tを，複素関数Fの実部uとみなして，
虚部vを共役調和関数として求めてみよう．

式(7.3)を使って，共役調和関数Ψを求めると，

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + c(x)$$

$$T = ax + b$$

xで微分してa, 次にyで積分してay

$$\Psi = \int \frac{\partial T}{\partial x} dy + c(x) = ay + c(x)$$

(実部)$u \to T$, (虚部) $v \to \Psi$

また，$\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$　と，コーシー･リーマンの関係式より

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

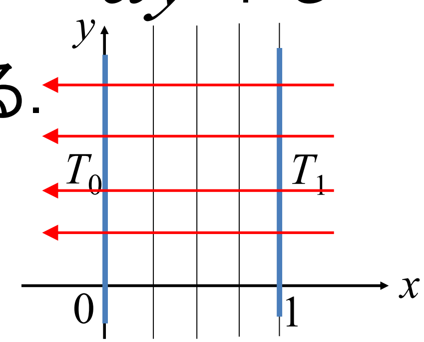
$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad c'(x)=0$

$\Leftrightarrow \quad c(x)$は定数

$$\therefore \Psi = ay + c$$

これは等温線と垂直に交わり，**熱流線**と呼ばれる．



以上より，複素ポテンシャルFは次式

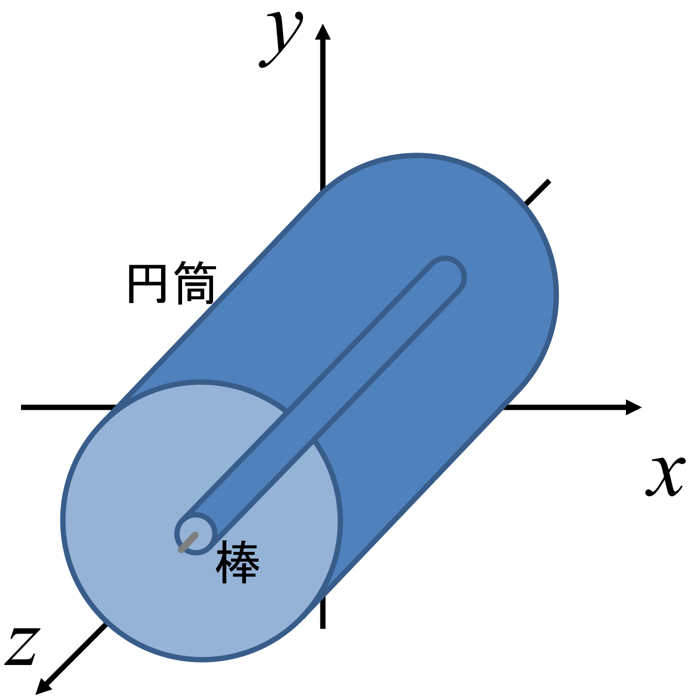
$$F(z) = T + i\Psi$$
$$= ax + b + i(ay + c) = az + k$$

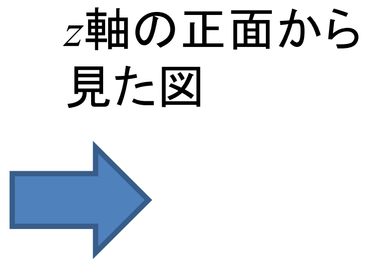
(ただし $k=b+ic$)

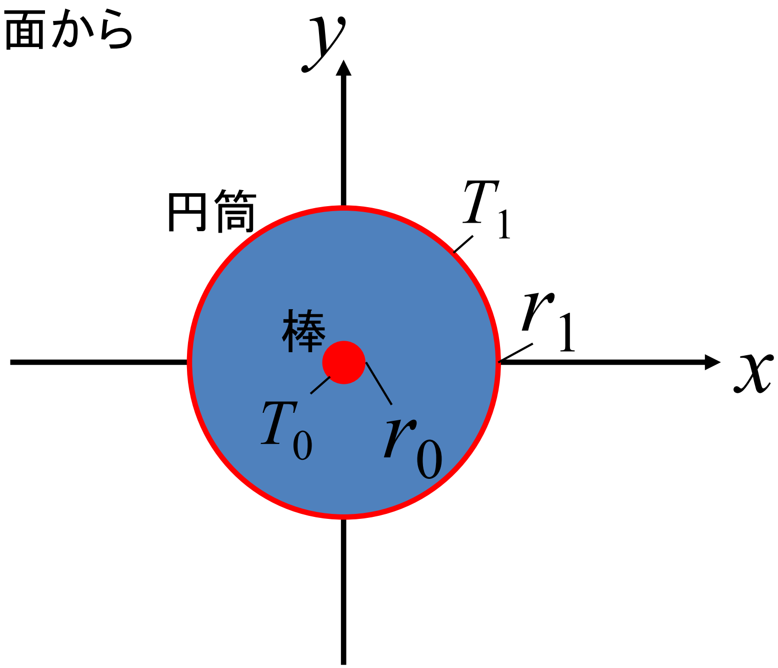
実部が等温線，虚部が熱流線に対応している．

(例2) 同軸円筒の場合

温度一定に保たれた無限長の同軸金属を考える．中心に直径 r_0 の金属線，外側に内径 r_1 の金属円筒がある．それぞれの温度は T_0, T_1に保たれている．すなわち，$r=r_0$ の平面の温度をT_0, $r=r_1$ の温度をT_1とする．同軸円筒および金属線の無限長方向にz軸を取るものとする(下図).







この時，温度$T(x,y)$は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 方向のみに依存するので，

極形式のラプラス方程式を使う． $\boxed{r^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial T}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=0}$

θ方向の変化は無いので，$\dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=0$ とする．ここで，$\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}\equiv T''$，$\dfrac{\partial T}{\partial r}\equiv T'$ とおくと，ラプラス方程式は

$\dfrac{T''}{T'}=-\dfrac{1}{r}$ となるため，合成関数と対数の微分公式を適用すると(積分すると)

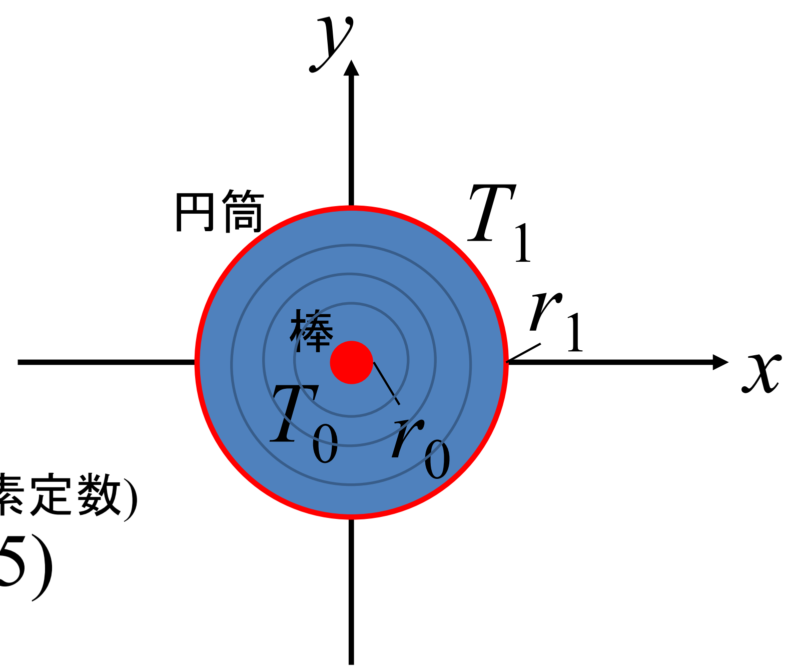
$$\log T'=-\log r+c=\log\frac{e^c}{r}$$

定数 e^cをあらためて a とおけば，$T'=\dfrac{a}{r}$

よって r で積分すれば，

$$\boxed{T(r,\theta)=a\log r+b}\qquad(7.5)$$

(a,bは複素定数)



等温線はθに依存しないので同心円状とわかる．a,bは境界条件から決定する．

式(7.3)の極形式表示を使って，共役調和関数Ψを求めると，

$$v=\int r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta+c(r)$$

極形式のコーシー･リーマンの関係式から導かれる

$$T(r,\theta)=a\log r+b$$

$$\Psi=\int r\frac{\partial T}{\partial r}d\theta+c(r)=a\theta+c(r)$$

$u\to T,\ v\to\Psi$

また，$\dfrac{\partial T}{\partial \theta}=0$ と，コーシー･リーマンの関係式より

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

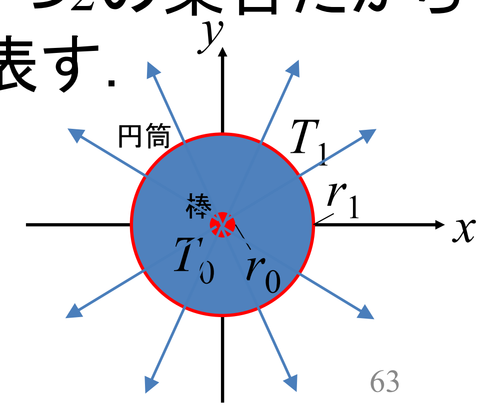
$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=-r\frac{\partial \Psi}{\partial r}=0$$

$\therefore\ c(r)$=定数=c

$$\therefore \Psi(r,\theta)=a\theta+c=a\theta'$$

($\theta'=\theta+c/a$だが，偏角の定数分の差は回転対称な図形には意味を持たないので,この場合はθ'をあらためて偏角の主値θとおき直しても差し支えない)

θ(偏角)を固定して考えると，Ψは任意の$r=|z|>0$を持つzの集合だから中心から放射状に広がる半直線となり，熱流線を表す．



以上より，複素ポテンシャルFは次式

$$F(z)=T+i\Psi$$
$$=a\log r+b+i(a\theta)$$

実部が等温線，虚部が熱流線に対応している．

複素ポテンシャルの一般形

$$F(z) = \Phi + i\Psi \tag{7.7}$$

	Φ	Ψ
熱伝導	等温線 (熱ポテンシャルの等高線に相当）	熱流線 (熱ポテンシャルの最大傾斜線に相当）
静電界	等電位線 (電位ポテンシャルの等高線に相当)	電気力線 (電位ポテンシャルの最大傾斜線に相当）
流体	等ポテンシャル線	流線
重力場	重力ポテンシャル線	力線

まとめ：本日の確認事項

- 複素関数の微係数を定義に基づいて計算できる
- 複素関数の導関数を求めることができる
- 複素関数の正則性とは何かを説明できる
- コーシー・リーマンの方程式が書ける
- 複素関数の正則性を複数の方法で判定できる
- 導関数の公式を使って微分公式を導くことができる
- ド・ロピタルの公式を使うことができる
- 調和関数の説明ができる
- 共役調和関数を導出することができる
- 調和関数が2次元ポテンシャルを表すことを説明できる
- 複素ポテンシャルの考え方と特徴を説明できる