解析学　演習問題３　解答例

3.1　z 平面上の円 $|z-1|=1$ の，関数 $w=\dfrac{1}{z}$ による w 平面上の写像を示せ．(配点:15 点)

(解答例)

$$|z-1|=1 \Leftrightarrow |z-1|^2=1 \Leftrightarrow (z-1)\overline{(z-1)}=1 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)=1$$

ここに $w=\dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{w}$ を代入すると，$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{w}-1\right)\left(\dfrac{1}{\overline{w}}-1\right)=1$

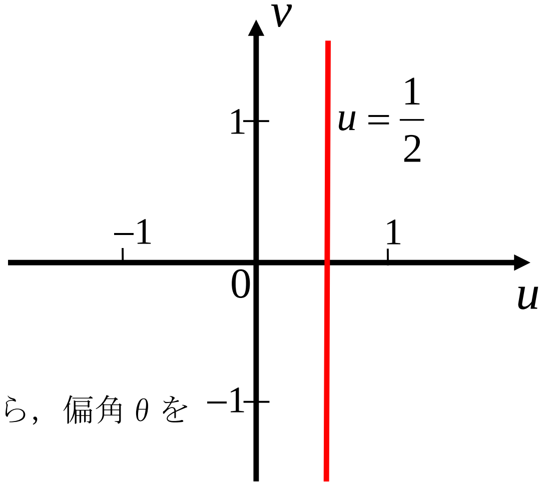
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-w}{w}\right)\left(\frac{1-\overline{w}}{\overline{w}}\right)=1 \Leftrightarrow (1-w)(1-\overline{w})=w\overline{w} \Leftrightarrow 1-w-\overline{w}+w\overline{w}=w\overline{w}$$

$$\Leftrightarrow w+\overline{w}=1$$

ここで，$w=u+iv$ とおいて w に代入すると，$\Leftrightarrow (u+iv)+(u-iv)=1 \Leftrightarrow 2u=1$

$$\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$$

以上から，$u=\dfrac{1}{2}$ 一定で v 軸に平行な直線になる(右図).



(別解) オイラーの公式を用いた媒介変数表示による方法

z 平面上の $|z-1|=1$ は中心 $z=1$，半径 1 の円周上にあるから，偏角 θ を用いて次のように表される．$z=1+e^{i\theta}$ (ただし $0\leqq\theta<2\pi$) オイラーの公式を用いて

$z=1+\cos\theta+i\sin\theta$ よって z の逆数を取って写像 w の表式を θ を用いて表すと

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}+i\frac{-\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\tan\frac{\theta}{2}$$

これより実部(u)は 1/2 (一定)となることがわかる．また，虚部(v)は $-\infty<v<\infty$ である．
この表記では，z の円周上と w における直線上の点と点の対応関係が直接把握しやすい．
仮に、実部、虚部の式が簡単な形に変形できない場合でも，u と v の関係を PC などで直接グラフにプロットして写像を可視化することが，理解の助けになる場合も多い．

3.2　一次変換 $w=\dfrac{iz+1}{z-2i}$ による円 $|z|=1$ の写像を求め図示せよ．(配点:15 点)

(解答例)

$w=\dfrac{iz+1}{z-2i}$ を z について解くと，$z=\dfrac{2iw+1}{w-i}$．これを|z|=1 に代入すると $\left|\dfrac{2iw+1}{w-i}\right|=1$

より $|2iw+1|=|w-i|$　両辺を 2 乗すると

$$|2iw+1|^2=|w-i|^2 \quad\Leftrightarrow\quad (2iw+1)(-2i\overline{w}+1)=(w-i)(\overline{w}+i)$$

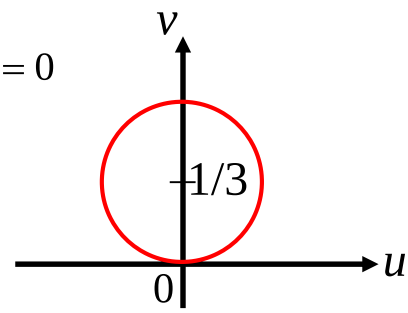
$$\Leftrightarrow\quad 4|w|^2+2iw-2i\overline{w}+1=|w|^2+iw-i\overline{w}+1$$

$$\Leftrightarrow\quad 3|w|^2+iw-i\overline{w}=0 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\,(☆)\ (注)$$

ここで $w=u+iv$ とおいて上の式に代入すると，

$$\Leftrightarrow\quad 3(u^2+v^2)+i(u+iv)-i(u-iv)=0 \Leftrightarrow\quad 3(u^2+v^2)-2v=0$$

$$\Leftrightarrow\quad u^2+v^2-\frac{2}{3}v=0 \quad\Leftrightarrow\quad u^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$



よって，中心 $i/3$, 半径 1/3 の円．$|w-i/3|=1/3$ と書いてもよい．

ただし計算には $|w|^2=w\cdot\overline{w}$，$\bar{i}=-i$ などを用いた．

(w についての式変形と簡単化などで ～4 点，u の式までで～6 点，合計 10 点)
(図の配点 5 点)

（注）実は (☆)式を両辺 3 で割って $\Leftrightarrow (w-i/3)(\overline{w}+i/3)=1/9 \Leftrightarrow |w-i/3|^2=(1/3)^2$

$\Leftrightarrow |w-i/3|=1/3$ としても同じ結論が得られる．また，**3.1** の別解のように $z=e^{i\theta}$ とおいても解けるであろう．

3.3　次の方程式を満たす複素数 z を求めよ．(配点:30 点)
(ド・モアブルの定理は使わずに，指数形式を使った計算で解いてみてください．)

(1)　$z^4+1=0$
(–1 の 4 乗根)

(2)　$z^2=i$
(虚数単位の平方根)

(3)　$z^2-4iz+1=0$
(2 次方程式の解と係数の関係が使える)

(解答例)

(1) $z^4+1=0 \Leftrightarrow z^4=-1 \Leftrightarrow z^4=e^{i(\pi+2n\pi)} \Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi+2n\pi}{4}} \Leftrightarrow z=e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})}$

両辺を 1/4 乗

指数表示

ただし，n=0,1,2,3.

よって解 z は次の４つ. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

(2) $z^2=i \Leftrightarrow z^2=e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} \Leftrightarrow z=e^{i(\frac{\pi}{4}+n\pi)}$ ただし，n=0,1.

よって解 z は次の２つ. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$

(3) 一般に，複素数の係数を持った複素変数の 2 次方程式に対して，実変数，実係数の 2 次方程式の場合と同様の解と係数の関係が成り立つ.（証明してみよ） したがって，$z^2-2iz+1=0$ に対して 2 次方程式の解と係数の関係を適用すると，

$$z=-(-i)\pm\sqrt{(-i)^2-1}=i\pm\sqrt{-1-1}=i\pm i\sqrt{2}=i(1\pm\sqrt{2})$$

(少しだけ解の形が複雑になる類題) 方程式 $z^2-2iz+i=0$ を解け. ($\sqrt{\ }$ の中に虚数単位 i が残る場合はその複素数の平方根（２つある）が±$\sqrt{\ }$ の項に相当すると考える．)

3.4

(1) $\sin z=2$ を満たす z を求めよ. (配点:15 点)

(解答例)

$\sin z$ の定義より，$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2$

$\Leftrightarrow \quad e^{2iz}-4ie^{iz}-1=0$ (ここまでで 4 点)

e^{iz} に関する 2 次方程式と見なして，解と係数の関係から

$e^{iz}=i(2\pm\sqrt{3})=e^{(\pi/2+2n\pi)i}e^{\log(2\pm\sqrt{3})}$ (このあたりで+5 点)

log の中が負にならないように注意！

$z=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi-i\log(2\pm\sqrt{3})$

$z=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi+i\log(2\pm\sqrt{3})$ (上の式と等価な式．どちらでもよい)

($2n\pi$ が考慮されていない場合は全体で 3 点減点)

（一般注）対数を取るときと n 乗根をとるときは $2n\pi$ を忘れない.

(2)　$\sinh z = i$ を解け． (配点:15 点)

(解答例)

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \quad \text{より} \quad e^{2z} - 2ie^z - 1 = (e^z - i)^2 = 0$$ (ここまでで 8 点)

e^z に関する 2 次方程式になるが，解と係数の関係を用いるまでもなく

$$e^z = i = e^{(\pi/2 + 2n\pi)i} \quad \text{となるから} \quad z = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$$ (最後までできて、満点 15 点)

(2$n\pi$ の考慮がなされていない場合は 3 点減点)

3.5　$\log(z + i)$ を $u+iv$ 形式で表せ．なお，$z=x+iy$ とせよ． (配点:10 点)

(解答例)

$\log z$ の定義より，

$$\log(z+i) = \log|z+i| + i(\mathrm{Arg}(z+i) + 2n\pi) = \ln\sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

$$+ i\left(\tan^{-1}\frac{y+1}{x} + 2n\pi\right) = \frac{1}{2}\ln\{x^2 + (y+1)^2\} + i\left(\tan^{-1}\frac{y+1}{x} + 2n\pi\right)$$ (ln√ の式までで 4 点,

Arg(z+i)で 4 点, 2$n\pi$ で 4 点, $\tan^{-1}$ の項 3 点)