フィードバック制御

2019年度　3Q

担当教員: 藤田政之　教授 (S5-303B)

第9回講義

10月31日（木）13:20～15:50，S224講義室

第 7 章 :フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性 (pp. 135-138)

キーワード： ロバスト安定性, 相補感度関数

7.3 制御性能のロバスト性 (pp. 139-142)

キーワード： ノミナル性能, 感度関数, ロバスト性能

学習目標： ロバスト安定性について, その性質と条件を説明できる. また, ノミナル性能について理解し, 制御性能のロバスト性について説明できる.

7.2 ロバスト安定性

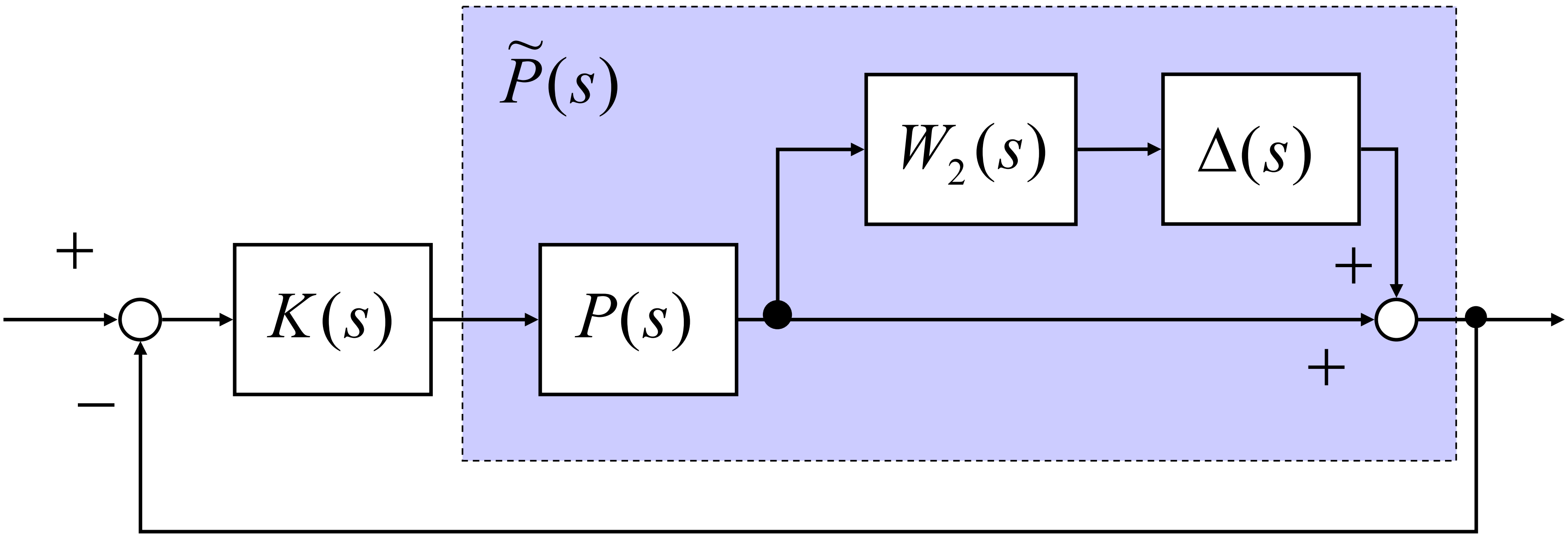
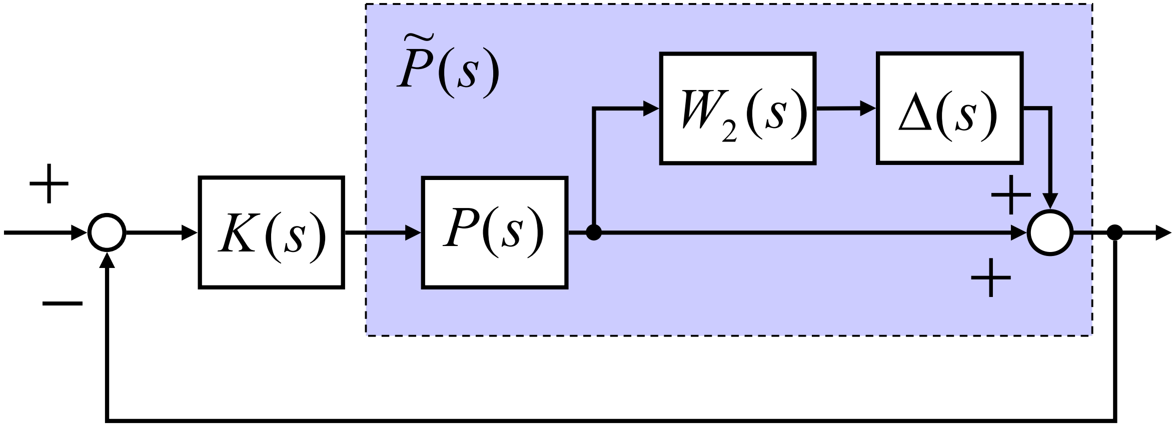


図 7.9 乗法的な不確かさを有するフィードバック系

モデルに不確かさがある場合でも,
内部安定性は保たれるのか？

ロバスト安定性とは

コントローラ $K(s)$ が集合 $\mathcal{P}$ に属する
すべての $\tilde{P}(s)$ に対して内部安定性を
保証すること



ノミナル安定性:ノミナルモデルに対する内部安定性

不確かなモデル

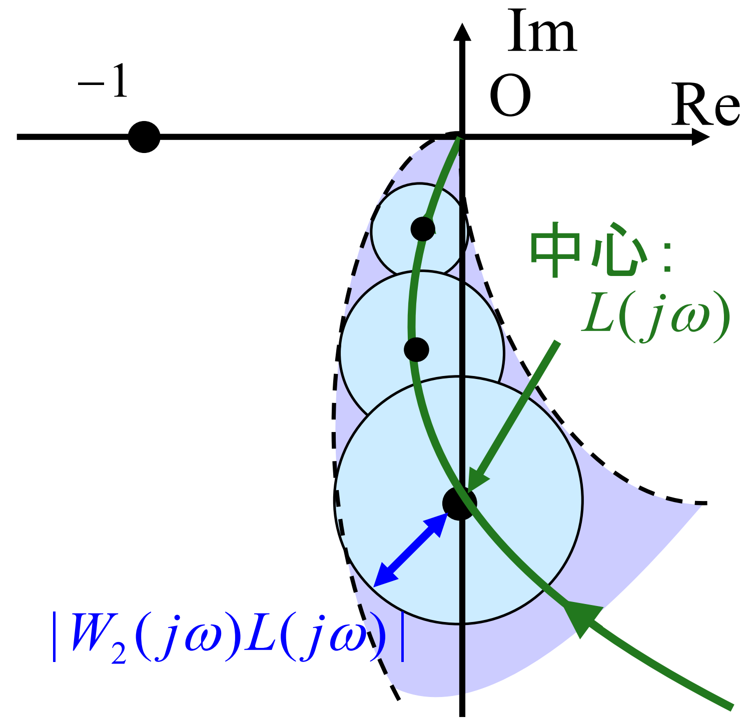
$$\tilde{P}(s) = (1+\Delta(s)W_2(s))P(s)$$

不確かな開ループ伝達関数

$$\tilde{L}(s) = \tilde{P}(s)K(s)$$

$$= (1+\Delta(s)W_2(s))\underbrace{P(s)K(s)}_{L(s)}$$

$$= \underbrace{L(s)+\Delta(s)W_2(s)L(s)}_{\text{開ループの帯}}$$



任意の $\tilde{L}$ について, そのベクトル軌跡

が点 $(-1,0)$ をまわらなければ安定

（∵ ナイキストの安定判別法）

$\tilde{L}$ のベクトル軌跡

$|\tilde{L}-L| = |\Delta W_2 L| \leq |W_2 L|$

半径 $|W_2L|$, 中心 L の円盤の内側

$|-1-L| = |1+L|$

-1 と L の距離

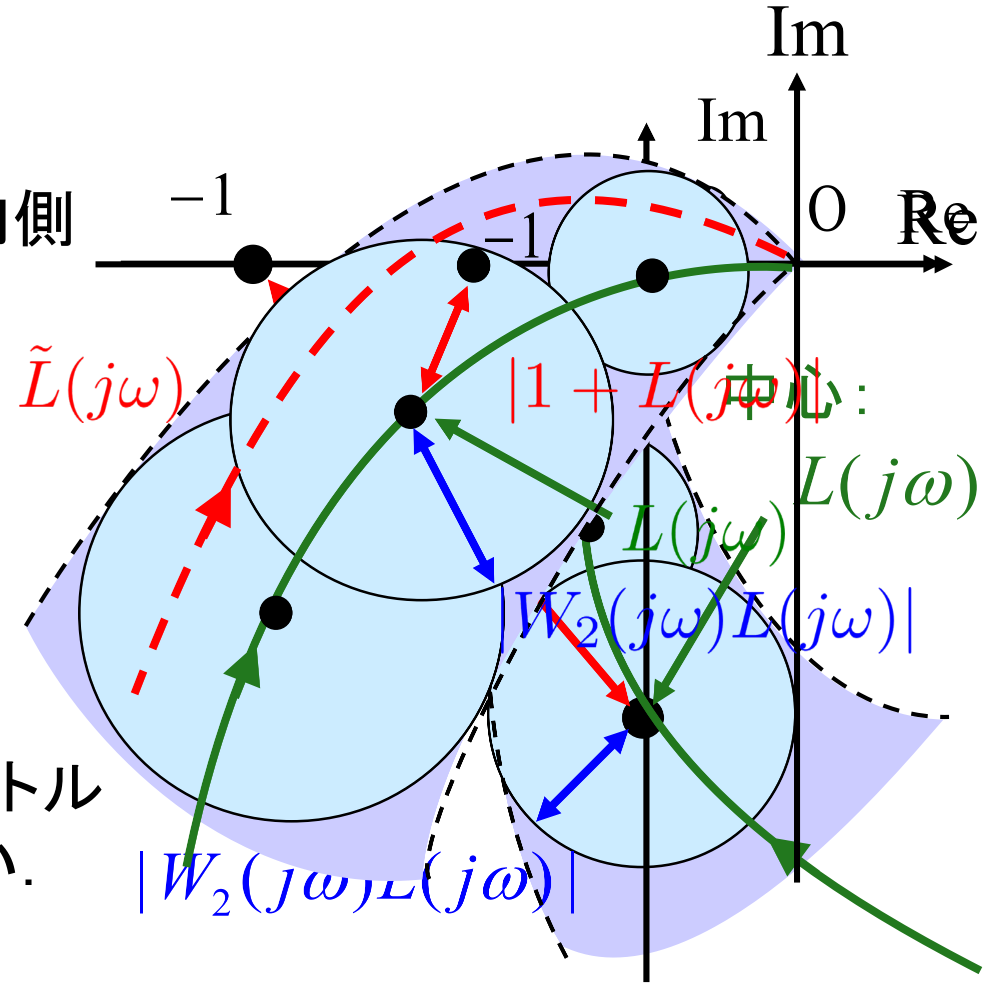
$|W_2L| < |1+L|$, $^\forall \omega$ ならば

任意の $\tilde{L}$ について，そのベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ をまわらない．

ロバスト安定

$$\therefore \left|\frac{W_2L}{1+L}\right| < 1, \quad ^\forall \omega$$

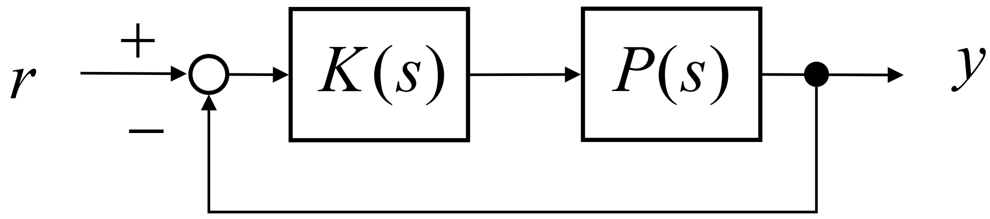
もし, $|W_2L| \geq |1+L|$ とすると



$|W_2L| \geq |1+L|$: **不安定の可能性**

図 7.10 ベクトル軌跡による
ロバスト安定性

相補感度関数



$$T(s) = \frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}$$

$$= \frac{L(s)}{1+L(s)}$$ ：$r \to y$ への伝達関数

感度関数 $S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$ より,

$$S(s)+T(s) = \frac{1}{1+PK} + \frac{PK}{1+PK} = 1$$

相補感度関数を用いると

$$\left| \frac{W_2 L}{1+L} \right| < 1, \ ^\forall\omega \ \Rightarrow \ |W_2 T| < 1, \ ^\forall\omega$$

よって, $|T| < \dfrac{1}{|W_2|}, \ ^\forall\omega$ ロバスト安定

W_2 が大きい周波数では

T は小さい方が良い

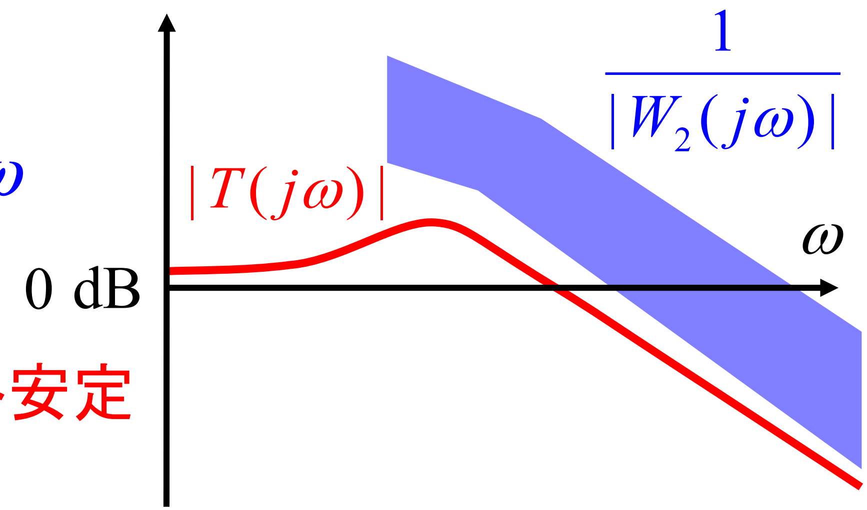


図 7.11 相補感度関数とロバスト安定性

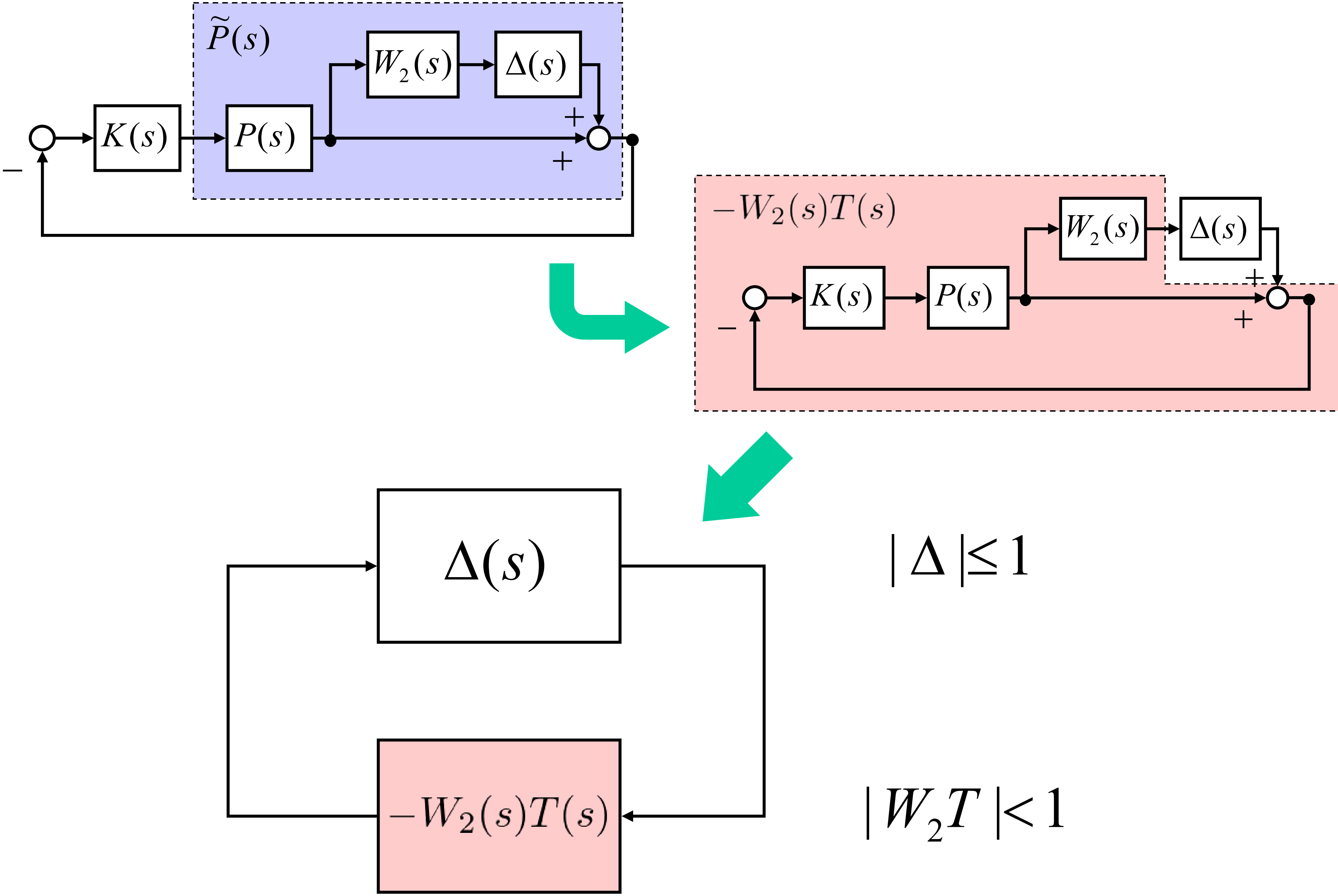
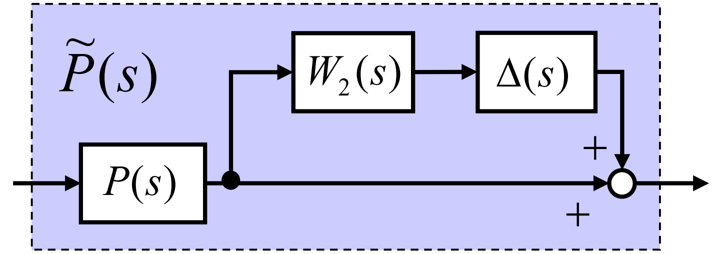


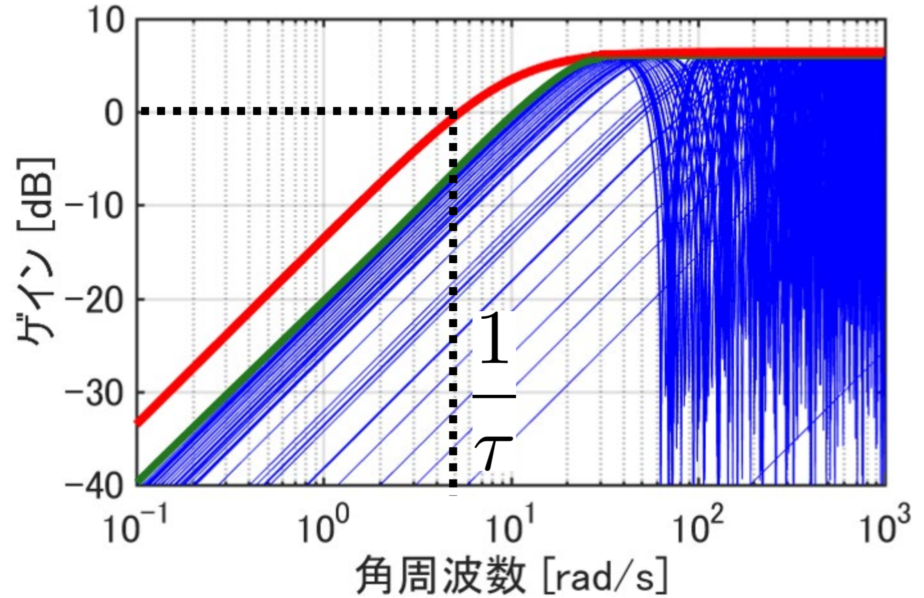
図 7.12 ロバスト安定性と小ゲイン定理

不確かなシステム

$$\tilde{P}(s) = \frac{1}{s}e^{-sL}, \quad 0 \le L \le 0.1$$

ノミナルモデル: $P(s) = \dfrac{1}{s}$





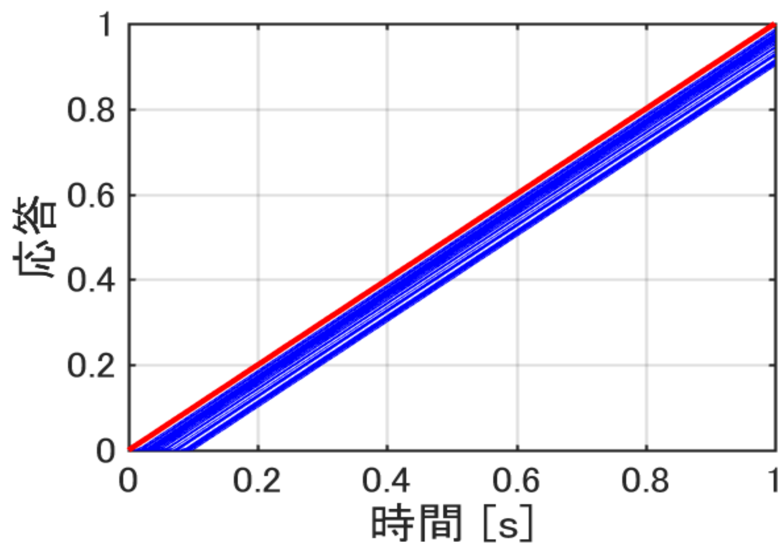
不確かさの周波数重み

$$W_2(s) = \frac{2.1s}{s+10}$$

$$\tau = 0.21 \quad \frac{1}{\tau} = 4.8\ \mathrm{rad/s} \quad r_\infty = 2.1$$

プラント集合

$$\mathcal{P} = \{(1+\Delta(s)W_2(s))P(s), \\ |\Delta(j\omega)| \le 1, {}^\forall\omega\}$$



ノミナルモデル $P(s)=\dfrac{1}{s}$

不確かさの周波数重み $W_2(s)=\dfrac{2.1s}{s+10}$

$$T(s)=\frac{K}{s+K}$$

ロバスト安定：$|T|<\dfrac{1}{|W_2|},\ {}^{\forall}\omega$

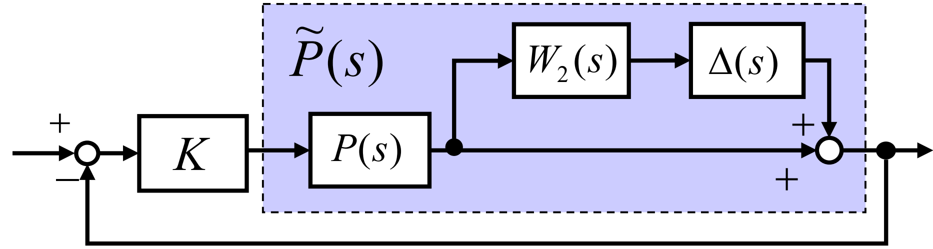
定数ゲイン

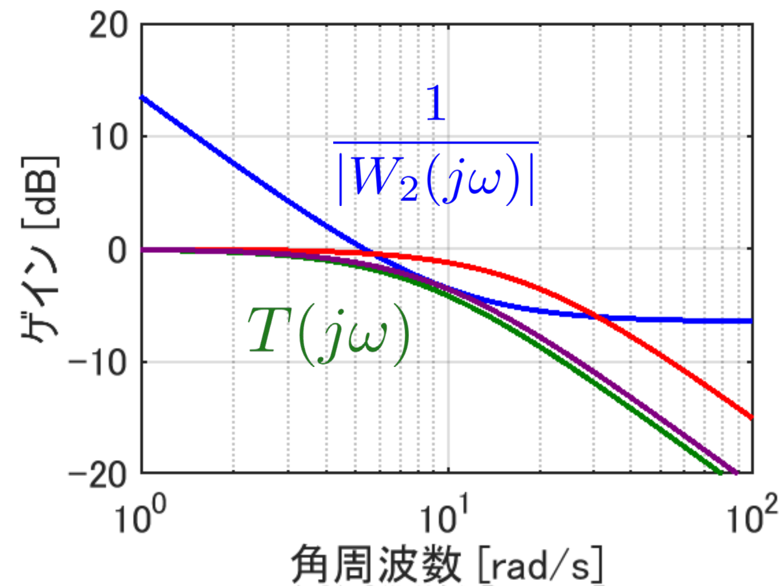
$K=8$ 

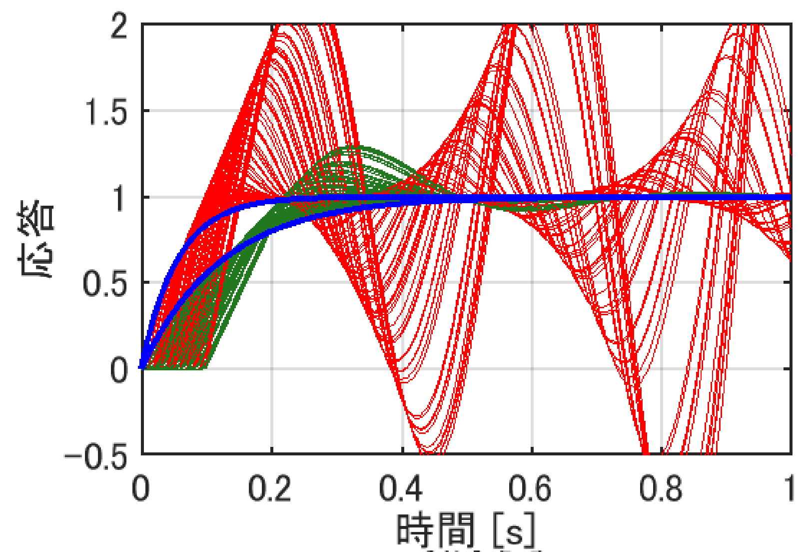
$K=18$ OK？ 

ロバスト安定性を満たすには

$$0<K<9$$







IEEE CSS Video Clip Contest

2014
2nd place

Click !

https://www.youtube.com/watch?v=TgQ6f0xFwbE

7.3 制御性能のロバスト性

ノミナル性能

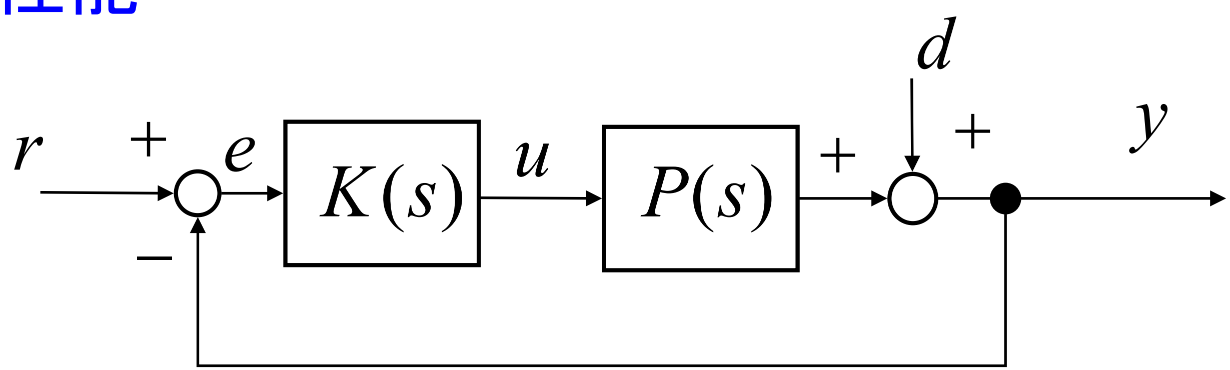


図 7.13 フィードバック制御系

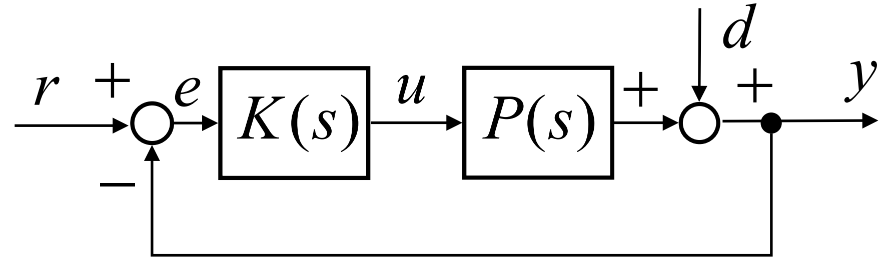
$$\Delta_T = \frac{1}{1+PK}\Delta_P$$ ： パラメータ変動に対する感度

$$y = \frac{1}{1+PK}d$$ ： 外乱に対する感度

$$e = \frac{1}{1+PK}r$$ ： （目標値応答）

フィードバック性能の指標

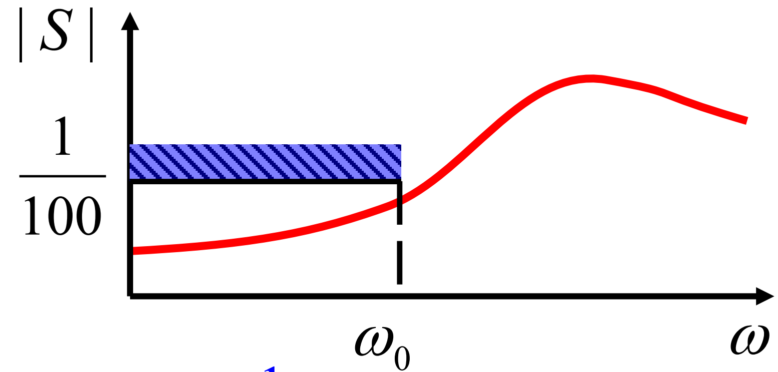
$$S = \frac{1}{1+PK}$$: 小さい方がよい



［ 例 ］ 外乱 d（ω_0以下）: $\frac{1}{100}$ 未満にしたい

$y = Sd$ より

$$|S| < \frac{1}{100} \qquad {}^\forall\omega \le \omega_0$$

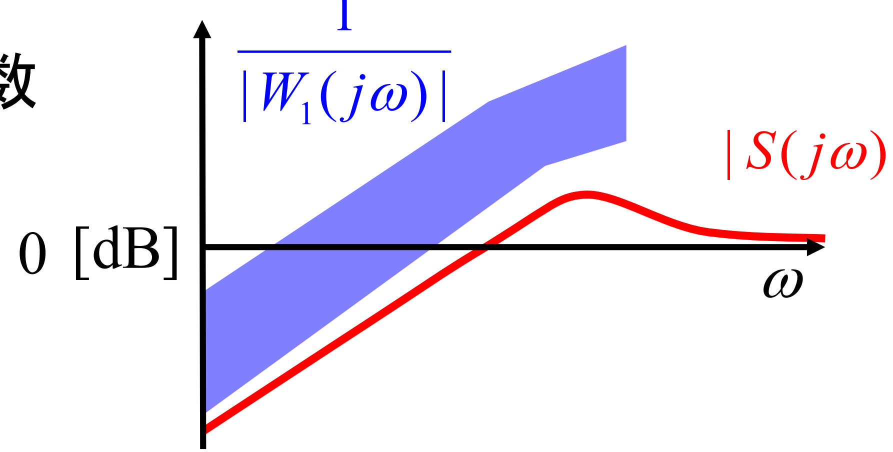


$$|W_1| \ge 100, \qquad {}^\forall\omega \le \omega_0$$

$W_1(s)$: 重み関数

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \ {}^\forall\omega$$

$$\Rightarrow \quad |W_1 S| < 1, \ {}^\forall\omega$$



ノミナル性能

図 7.14 感度関数とノミナル性能

$$|W_1 S| < 1, \quad {}^\forall \omega \quad \Rightarrow \quad |W_1| < |1+L|, \quad {}^\forall \omega$$

$$\left(S = \frac{1}{1+PK} = \frac{1}{1+L} \right)$$

L は $(-1,0)$ から $|W_1|$ だけ離れていなければならない

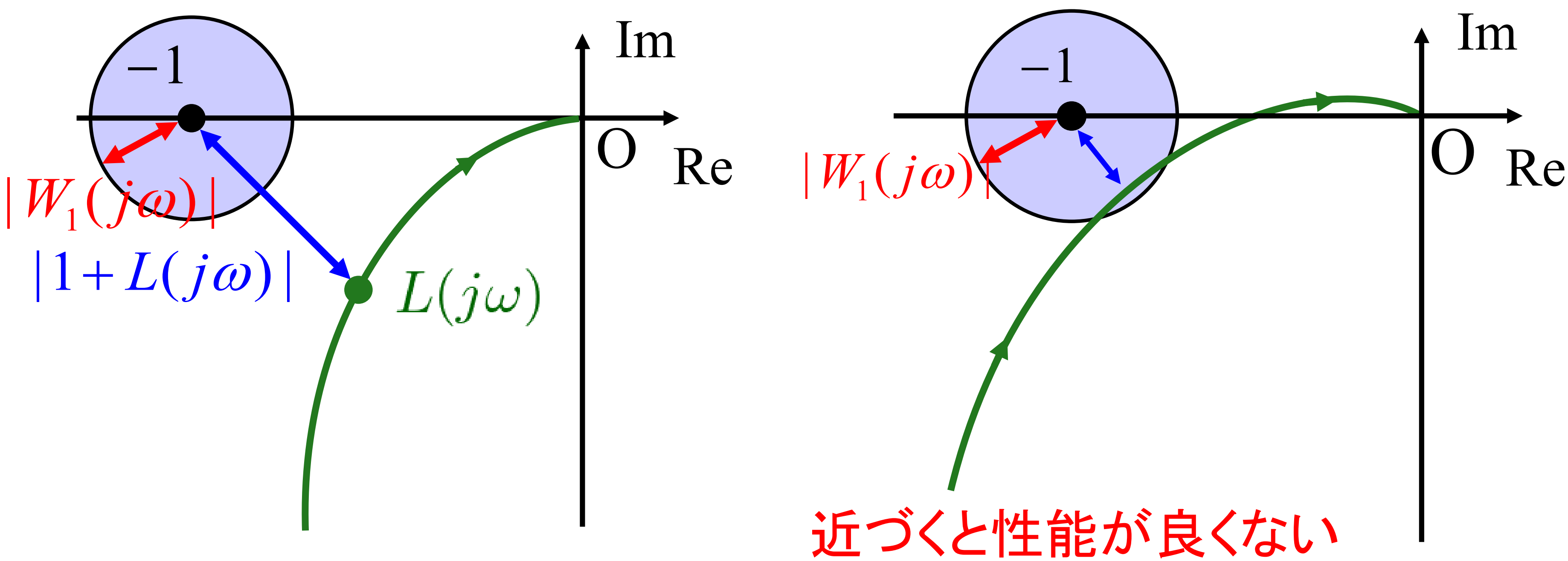


図 7.15 ベクトル軌跡によるノミナル性能

ウォーターベッド効果（P144）

すべての周波数帯域で感度関数 S を小さくできない

ボードの感度積分
（L が安定, 相対次数 2 以上）

$$\int_0^\infty \log|S(j\omega)|\,d\omega = 0$$

$$|S|<1 \qquad (\log|S|<0)$$

ならば, 別の周波数帯で

$$|S|>1 \qquad (\log|S|>0)$$

となる

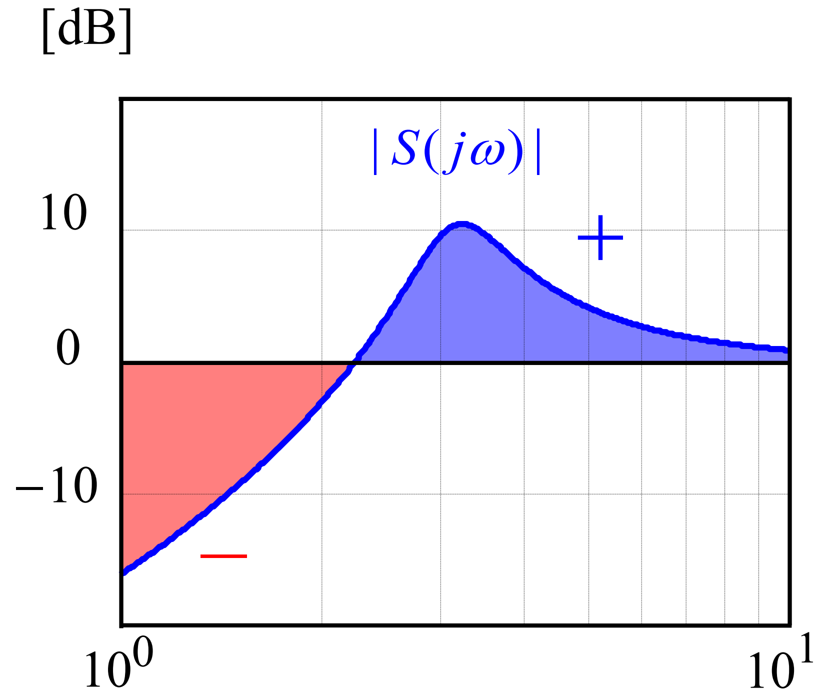


図 7.17 ウォーターベッド効果

性能の限界

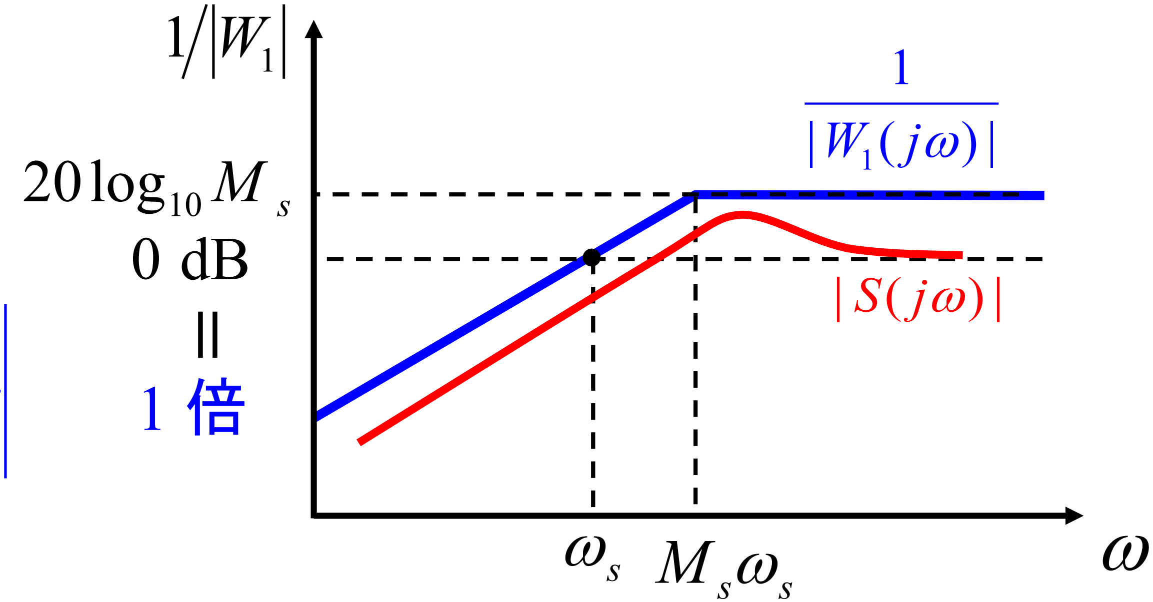
$$S+T=1 \qquad \left(S=\frac{1}{1+PK}, \quad T=\frac{PK}{1+PK} \right)$$

性能の周波数重み $W_1(s)$

$$|S| < \frac{1}{|W_1|}, \ ^\forall\omega$$

$$\Rightarrow |S(j\omega)| < \left|\frac{j\omega}{j\omega/M_s + \omega_s}\right|$$

$$W_1(s) = \frac{s/M_s + \omega_s}{s}$$



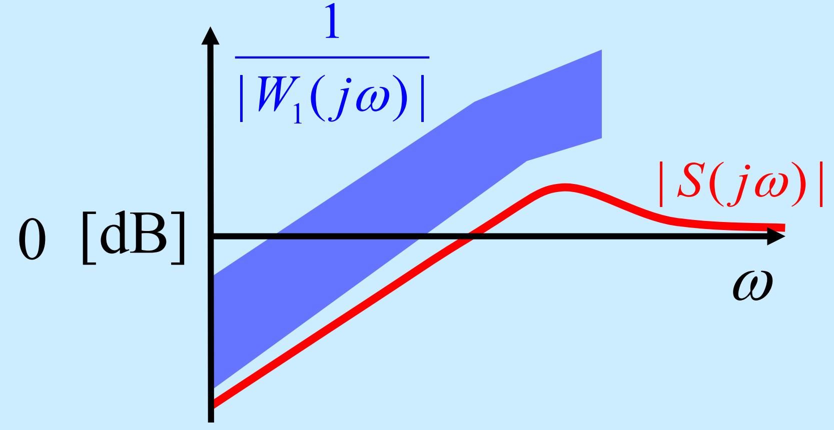
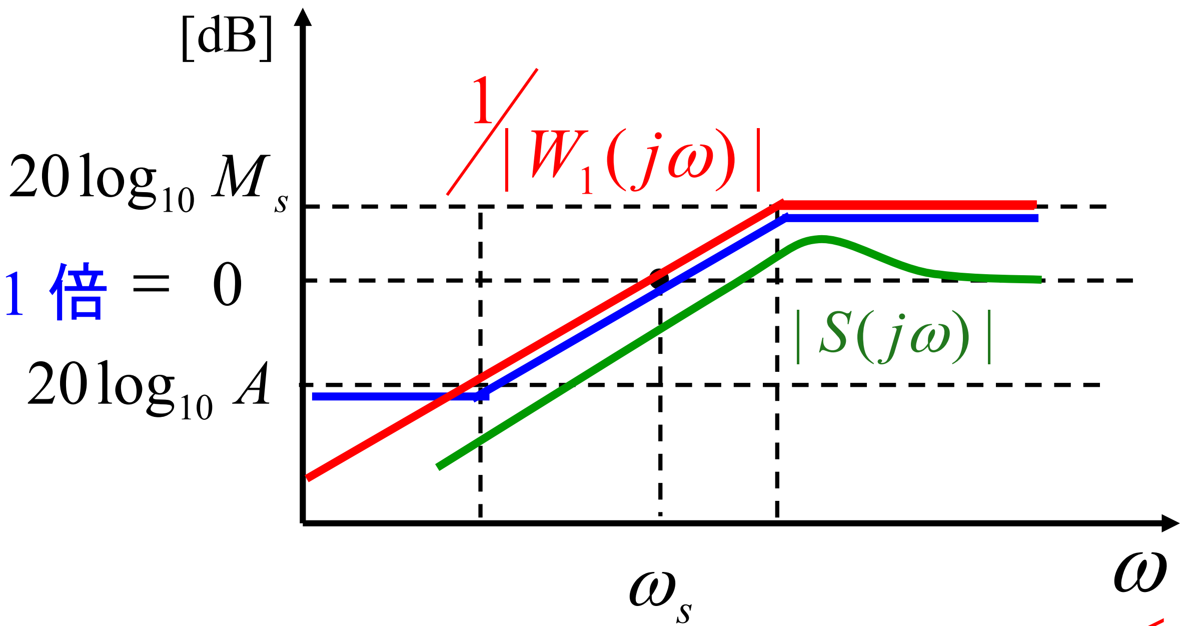


図 7.14 感度関数とノミナル性能

性能の周波数重み $W_1(s)$

$$W_1 = \frac{\frac{1}{M_s}s + \omega_s}{s} \qquad W_1 = \frac{\frac{1}{M_s}s + \omega_s}{s + \omega_s A}$$



ω_s ：感度関数の大きさが1 倍となる時の周波数

M_s ：高周波数帯での性能

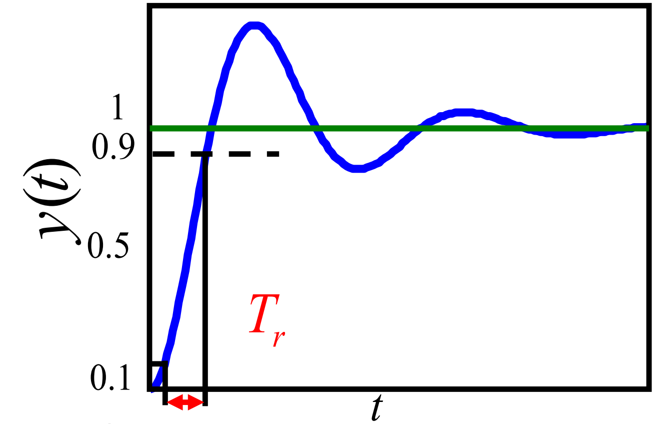
経験的指標から $M_s \leq 2$

A ：低周波数帯での性能

$\omega \leq \omega_s$ では低感度化が図れてフィードバック制御の効果が働く.

速応性に対する仕様(ω_s)

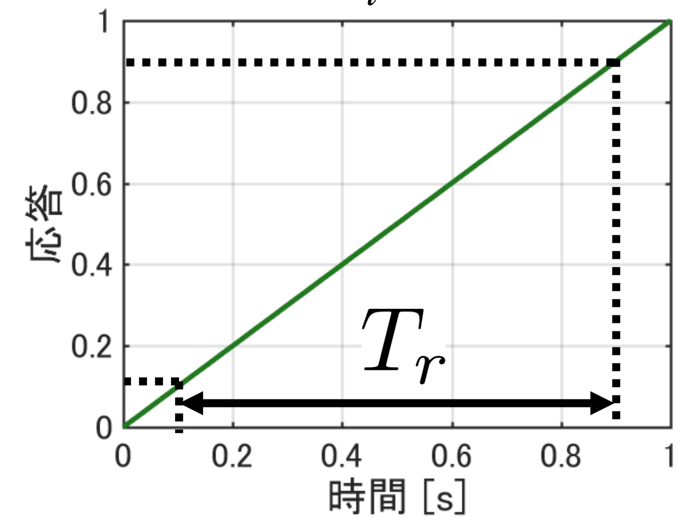
立ち上がり時間



1次系 $T_r \approx 2.2T$ [s]

2次系 $T_r \approx \dfrac{1.8}{\omega_n}$ [s]

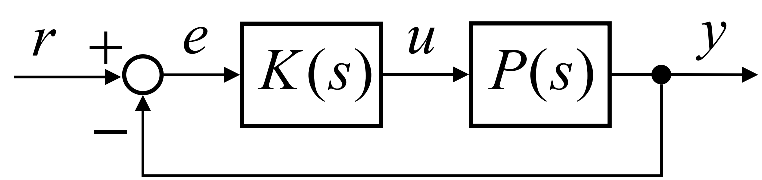
[例] ノミナルモデル $P(s) = \dfrac{1}{s}$



ノミナルモデル(積分器)の
開ループステップ応答

$T_r = 0.8$ s

$K(s) = K \quad G_{yr} = \dfrac{K}{s+K}$



要求仕様: 速応性の向上
(2倍の速さ)

$T_r \leq 0.4$ s

$$T_r \cong 2.2T \leq 0.4 \text{ s}$$

$$\frac{2.2}{0.4} = 5.5 \leq \frac{1}{T} \leq \omega_s$$

速応性に対する仕様: $T_r \leq 0.4$ s

$$W_1 = \frac{\frac{1}{M_s}s + \omega_s}{s + \omega_s A} = \frac{0.5s + 5.5}{s}$$

$\omega_s = 5.5$

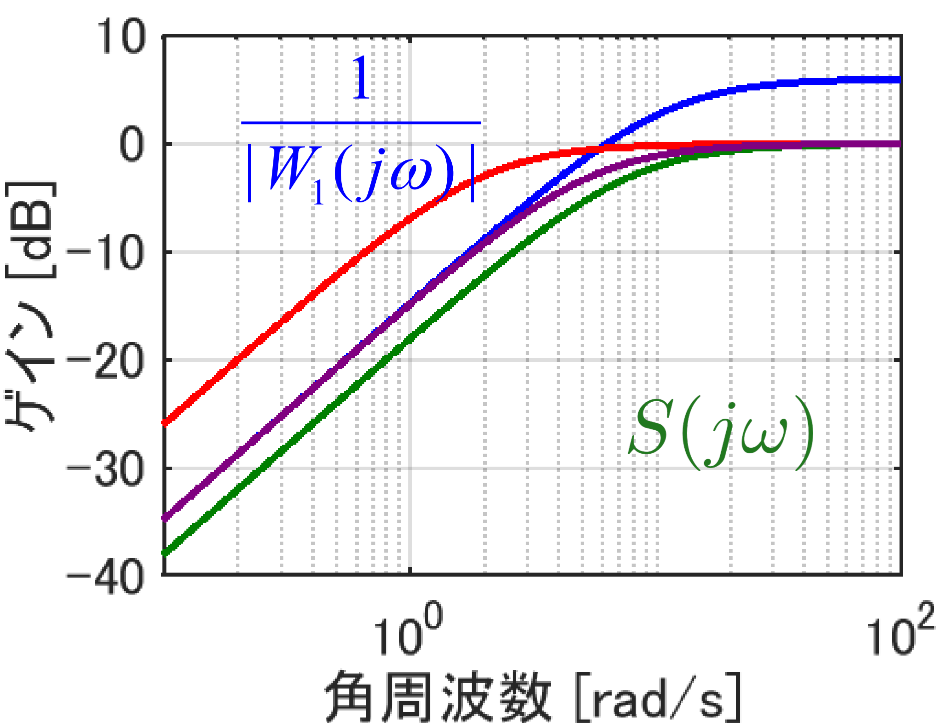
$M_s = 2$

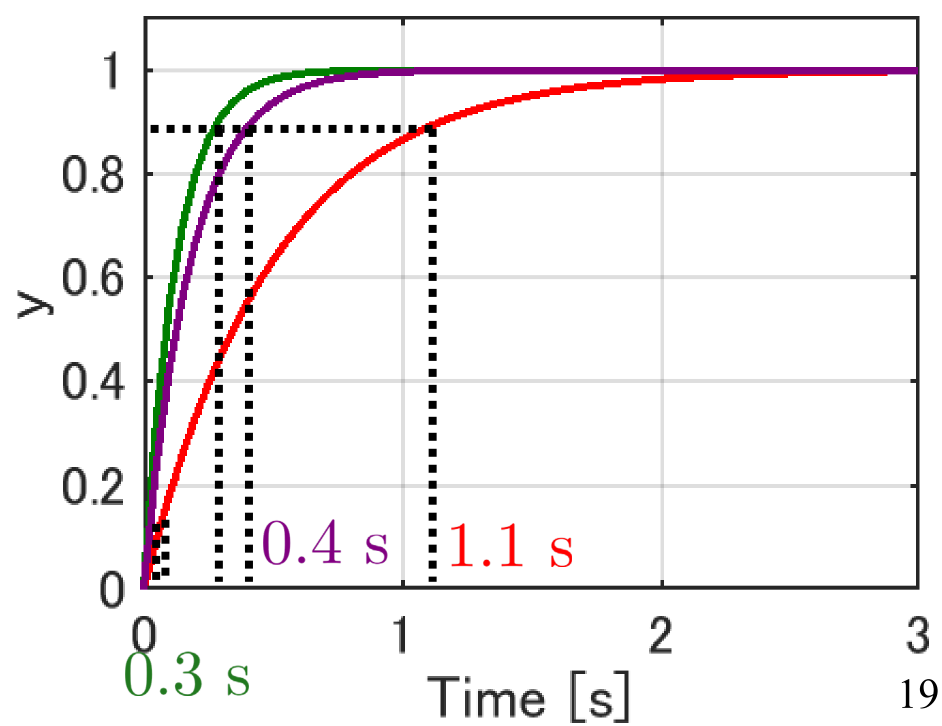
$A = 0$

定数ゲイン

$K(s) = 8$　　$K(s) = 2$　　ノミナル性能を満たすには

$K > 5.5$





7章 演習問題【6】

制御対象 $P(s)$ の不安定極を p, 不安定零点を z としたとき,

$$S(p)=0,\quad T(p)=1$$

$$S(z)=1,\quad T(z)=0$$

なる条件（補間拘束）を満たさなければならない

性能の限界

$$S+T=1$$

$$\left(S=\frac{1}{1+PK},\quad T=\frac{PK}{1+PK}\right)$$

感度関数

$$S(s)=\frac{1}{1+P(s)K(s)}$$

拘束条件

$$S+T=1$$

$$\underline{S(p)=0}$$

$$P(p)=\infty$$

$$S(p)=\frac{1}{1+\underbrace{P(p)K(p)}_{=\infty}}=0$$

不安定な
極零相殺しない

$$\underline{S(z)=1}$$

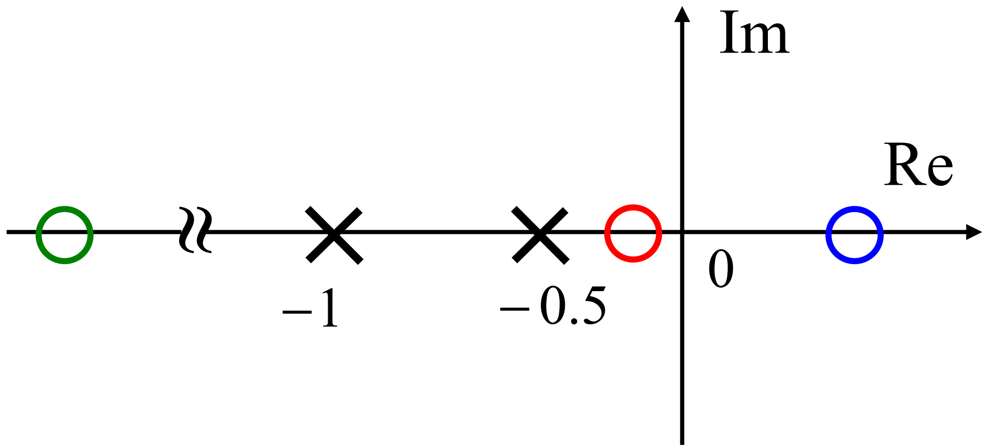
$$P(z)=0$$

$$S(z)=\frac{1}{1+\underbrace{P(z)K(z)}_{=0}}=\frac{1}{1}=1$$

零点の影響（§3.4.3）

［例 3.4］

$$G(s) = \frac{as+1}{(s+1)(2s+1)}$$



極:　$-1,\ -0.5$

零点:　$-\frac{1}{a}$

a : 小 ⇒ 影響なし

a : 大 ⇒ オーバシュート

$a < 0$:（不安定）⇒ 逆ぶれ

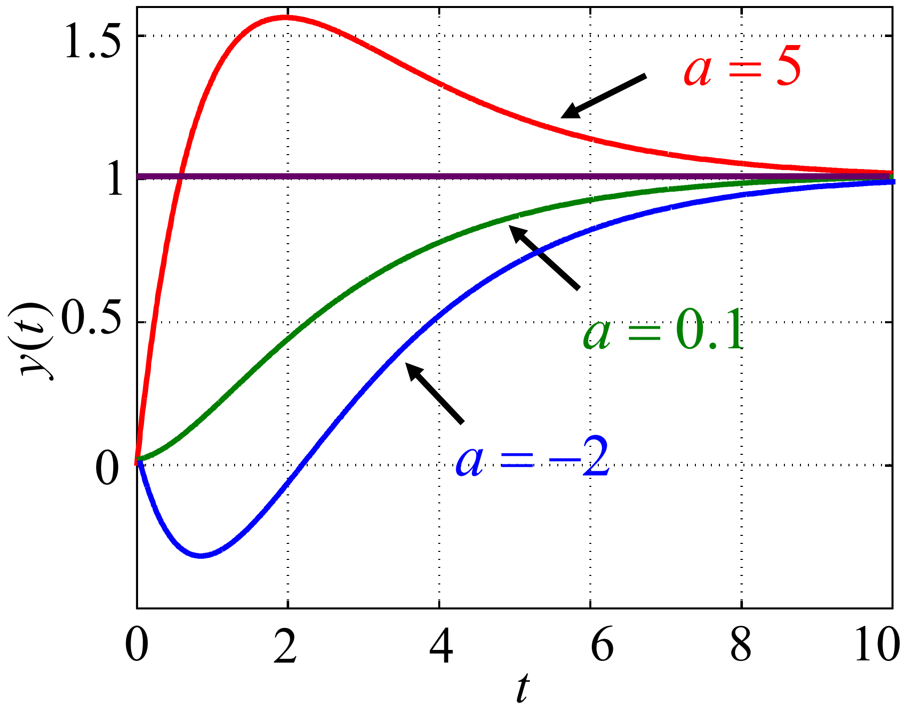
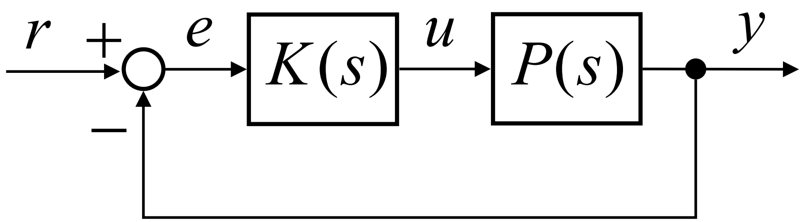


図 3.13 零点の影響

ロバスト性能

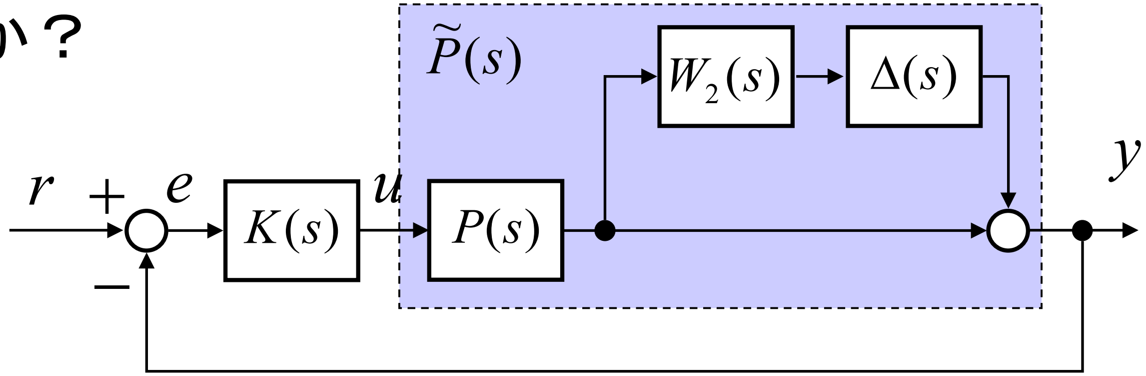


（不確かな）感度関数

$$\tilde{S} = \frac{1}{1+\tilde{P}K}, \quad \tilde{P} = (1+\Delta W_2)P$$

（ $\Delta = 0$ のとき $\tilde{P} = P$, $\tilde{S} = S$; ノミナル性能）

不確かさがある場合でも,（安定性だけでなく）
性能も保持されるのか？

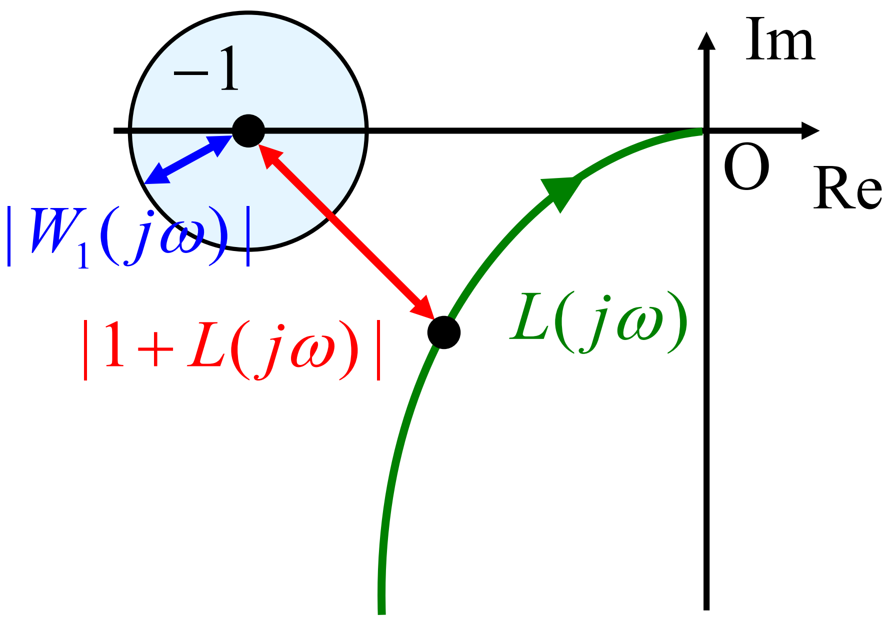


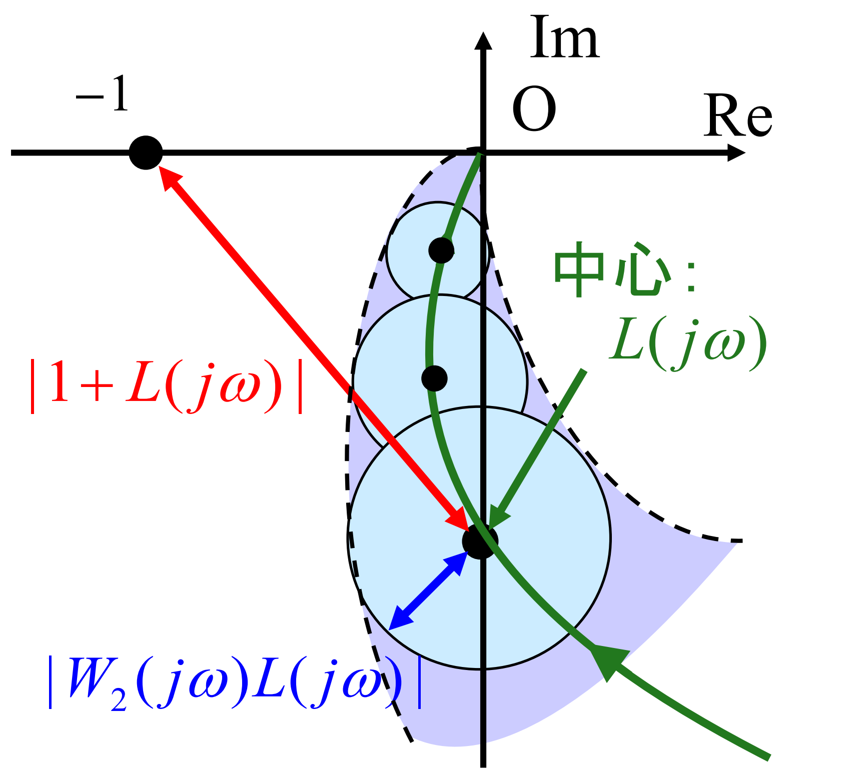
ロバスト性能とは

（i）ロバスト安定

（ii）$|W_1\tilde{S}|<1, \ ^\forall\omega, \ ^\forall\tilde{P} \in \mathcal{P}$

任意の $\tilde{L}$ について, そのベクトル軌跡が $(-1,0)$ から $|W_1|$ だけ離れていなければならない





ロバスト性能条件:

$$|W_1| + |W_2 L| < |1+L|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{W_1}{1+L}\right| + \left|\frac{W_2 L}{1+L}\right| < 1$$

$$\therefore\ |W_1 S| + |W_2 T| < 1,\ {}^{\forall}\omega$$

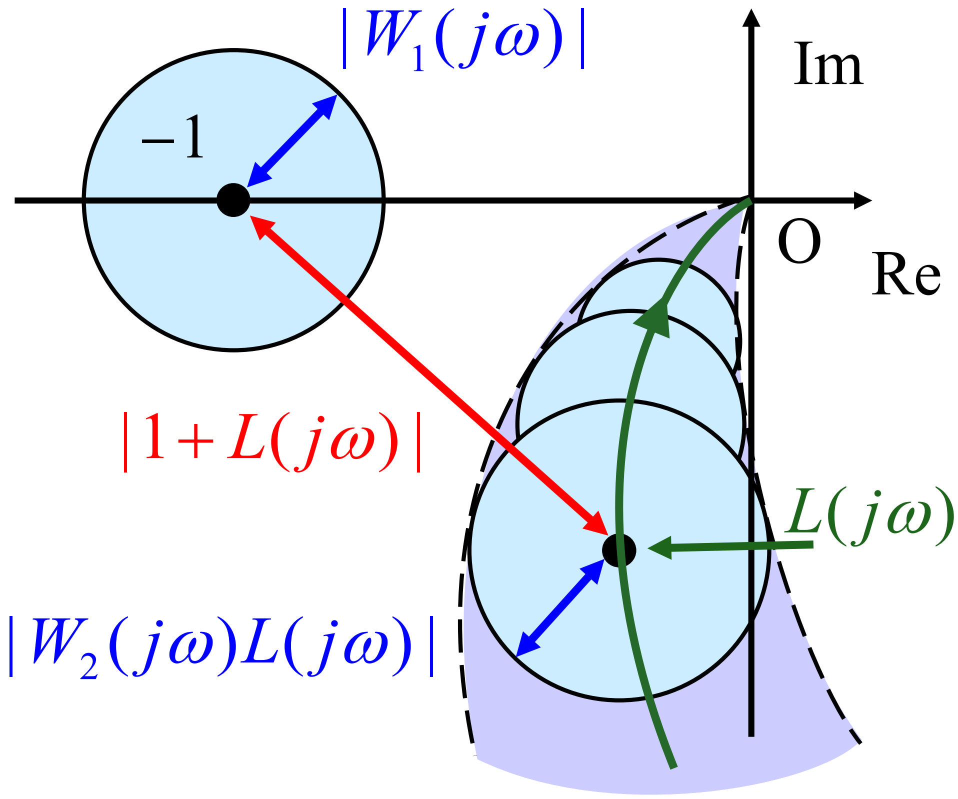


図 7.16　ベクトル軌跡によるロバスト性能

フィードバック制御系のロバスト性解析

ノミナル安定（NS）： $\phi = D_P D_K + N_P N_K = 0$ が安定

（内部安定）　（ S, T, KS, PS が安定）

ノミナル性能（NP）： $|W_1 S| < 1, \quad {}^\forall \omega$

ロバスト安定（RS）： $|W_2 T| < 1, \quad {}^\forall \omega$

ロバスト性能（RP）： $|W_1 S| + |W_2 T| < 1, \quad {}^\forall \omega$

補間条件： $S + T = 1, \quad {}^\forall \omega$

第 7 章 :フィードバック制御系のロバスト性解析

7.2 ロバスト安定性 (pp. 135-138)

キーワード : ロバスト安定性, 相補感度関数

7.3 制御性能のロバスト性 (pp. 139-142)

キーワード : ノミナル性能, 感度関数, ロバスト性能

学習目標 : ロバスト安定性について, その性質と条件を説明できる. また, ノミナル性能について理解し, 制御性能のロバスト性について説明できる.

Reading Assignment #11

第 8 章 :フィードバック制御系の設計法

8.1 設計手順と性能評価(pp. 146～149)

キーワード： 設計手順，性能評価

8.2 PID 補償による制御系設計(pp. 149～154)

キーワード： P(比例)，I(積分)，D(微分)

学習目標： 一般的な制御系設計における手順と制御系の性能評価について学ぶ．さらにPID補償の有効性について理解する．