

フィードバック制御

2019年度 3Q

担当教員: 藤田政之 教授 (S5-303B)

第7回講義

10月24日(木) 13:20~15:50, S224講義室

第 6 章 : フィードバック制御系の安定性

6.2 ナイキストの安定判別法 (pp. 115-120)

キーワード : 単純化されたナイキストの安定判別法

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕 (pp. 120-125)

キーワード : 位相交差周波数, ゲイン交差周波数,
位相余裕, ゲイン余裕

学習目標 : 単純化されたナイキストの安定判別法について説明できる. 安定性の程度を評価するゲイン余裕や位相余裕について説明できる.

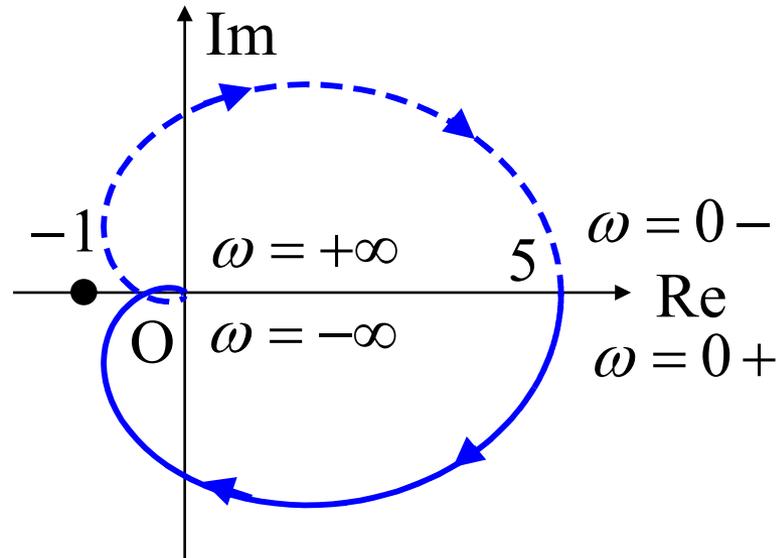
ナイキストの安定判別法 [復習]

- [ステップ 1] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を、角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡 Γ を得る。
- [ステップ 2] ナイキスト軌跡 Γ が点 $(-1,0)$ のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを N とする。
- [ステップ 3] 開ループ伝達関数 $P(s)K(s)$ の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを Π とする。
- [ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は $Z = N + \Pi$ となる。したがって、 $Z = 0$ ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$ ならば系は不安定である。

[例 6.2]

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{30}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

[ステップ 1]



[ステップ 2] $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 0$

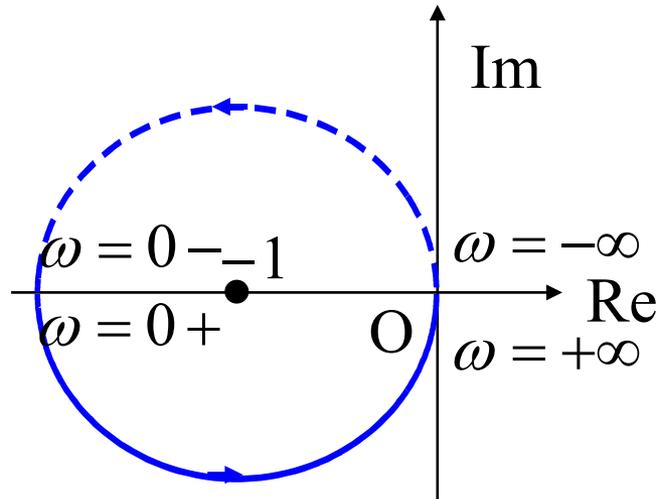
[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0$ **制御系は安定**

[例 6.3] (不安定系の場合)

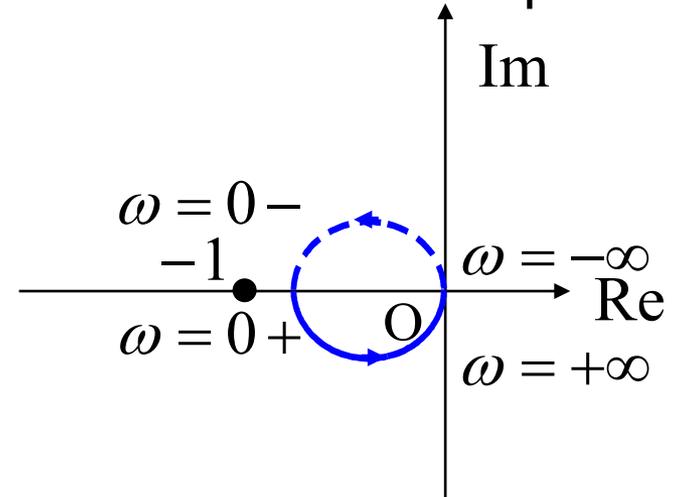
$$L(s) = \frac{K}{s-1} \quad K = 2, \frac{3}{4}$$

[ステップ 1]

(a) $K = 2$



(b) $K = \frac{3}{4}$



[ステップ 2] $N = -1$

$N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 1$

$\Pi = 1$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = -1 + 1 = 0$

$Z = N + \Pi = 0 + 1 = 1 \neq 0$

安定

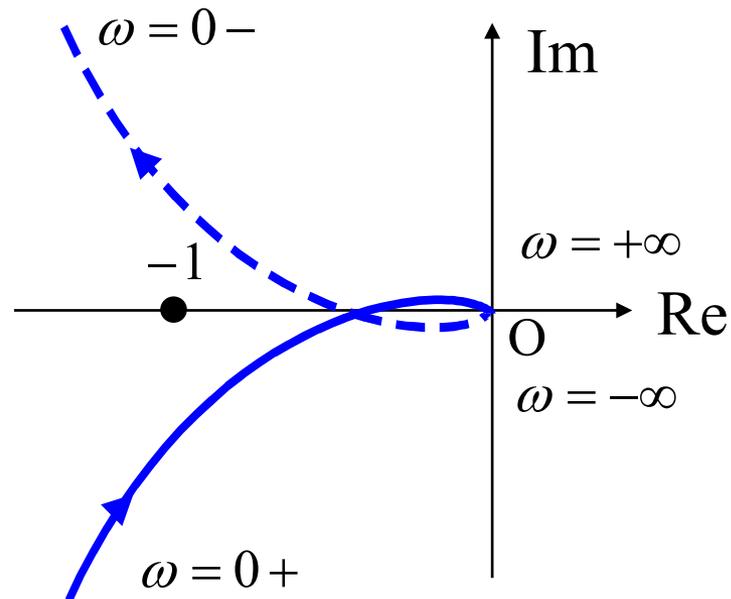
不安定

[例 6.4] (虚軸上に極がある場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

[ステップ 1] 閉曲線 C に対するナイキスト軌跡

$\Rightarrow \omega = 0$ の近傍で不連続, N を求められない



$s = 0$ を回避し, 左に見るように経路 $d \rightarrow e \rightarrow f$

(新たな閉曲線 C 内に $s = 0$ の極は入らない)

経路 $d \rightarrow e \rightarrow f$ $s = \varepsilon e^{j\theta}$ ($\varepsilon \rightarrow 0, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)

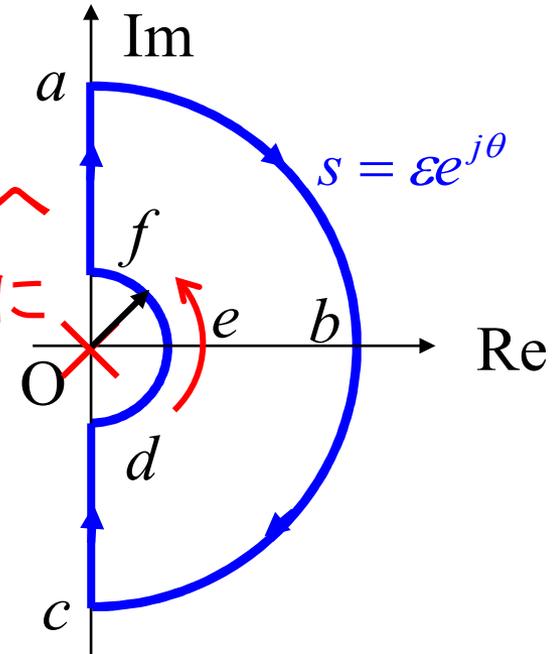
$$\left[L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right]$$

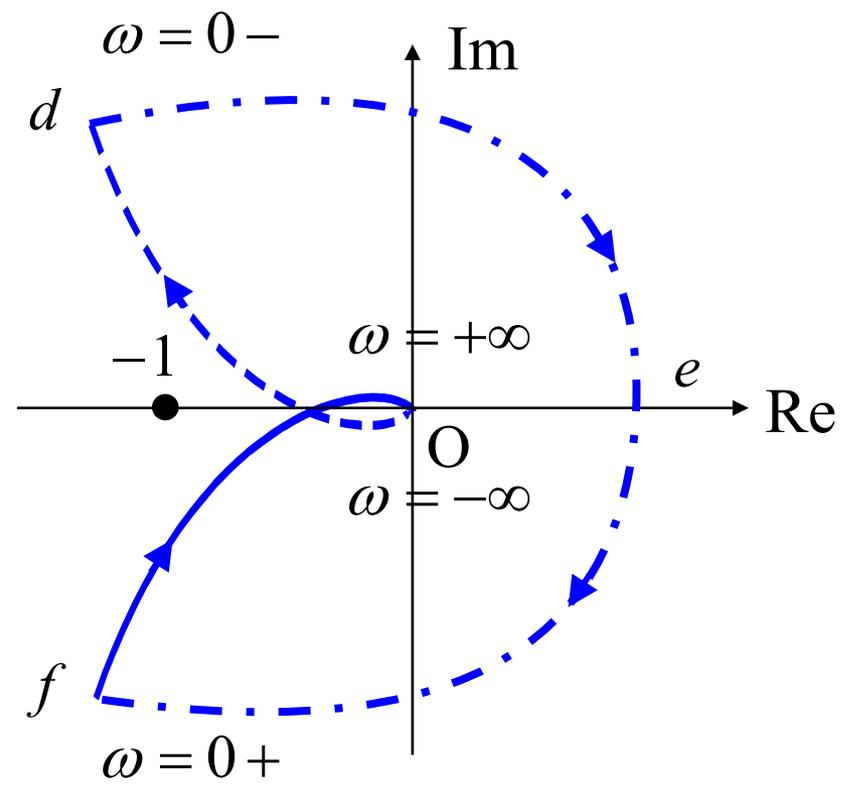
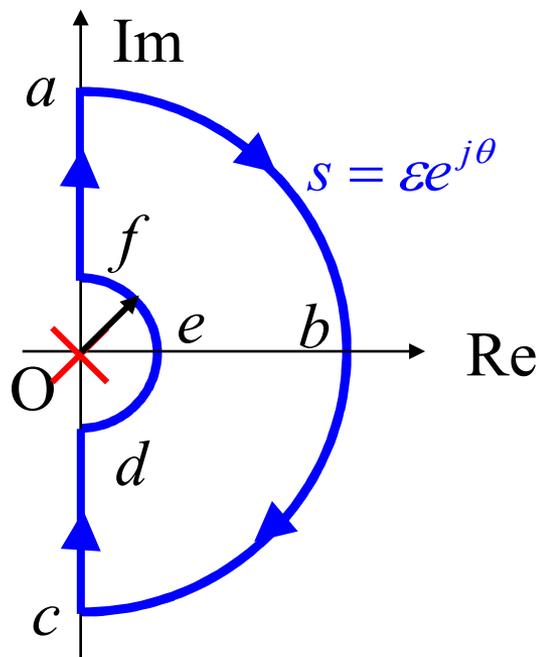
-90° から $+90^\circ$ へ
反時計方向に

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon e^{j\theta}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon e^{j\theta} (\varepsilon e^{j\theta} + 1)(\varepsilon e^{j\theta} + 2)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{2\varepsilon} e^{-j\theta}$$

半径 ∞ の円周 $+90^\circ$ から -90° へ
時計方向に





[ステップ 2] $N = 0$

[ステップ 3] $\Pi = 0$

[ステップ 4] $Z = N + \Pi = 0$ **制御系は安定**

開ループ伝達関数が安定な場合

$\Pi = 0$ より

$Z = 0$ となるためには $N = 0$ でなければならない

$$\left[\because Z = N + \Pi \right]$$

簡単化されたナイキストの安定判別法

[ステップ 1] 開ループ伝達関数の極の中に, その実部が正となるものがないことを確認する.

[ステップ 2] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡 $P(j\omega)K(j\omega)$ を角周波数 $\omega = 0 \sim +\infty$ の範囲で描く.

[ステップ 3] ω を 0 から ∞ へ変化させたとき, この開ループ伝達関数のベクトル軌跡が点 $(-1, 0)$ をつねに左に見るように動くなれば, 系は安定である. また, 右に見れば系は不安定となる.

[例 6.5] (安定系の場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad K = 3, 6, 12$$

$K = 3$ のとき

点 $(-1, 0)$ を常に左に見る

⇒ 安定

$K = 6$ のとき

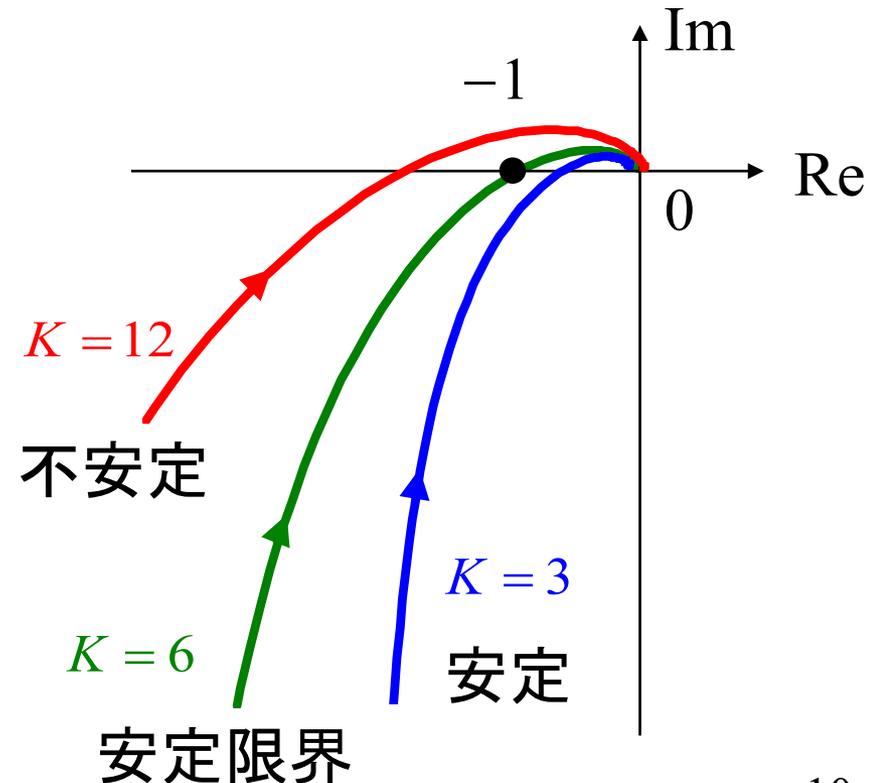
ちょうど点 $(-1, 0)$ を通過する

⇒ 安定限界

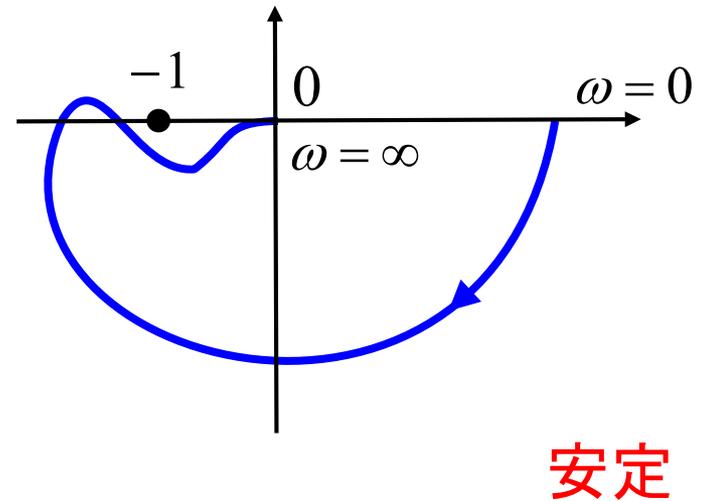
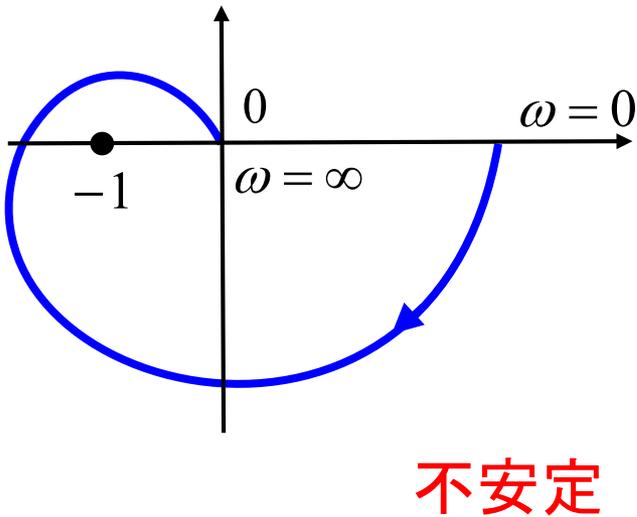
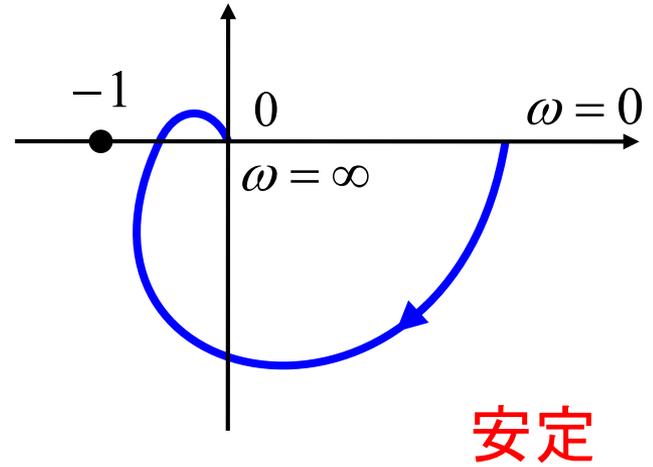
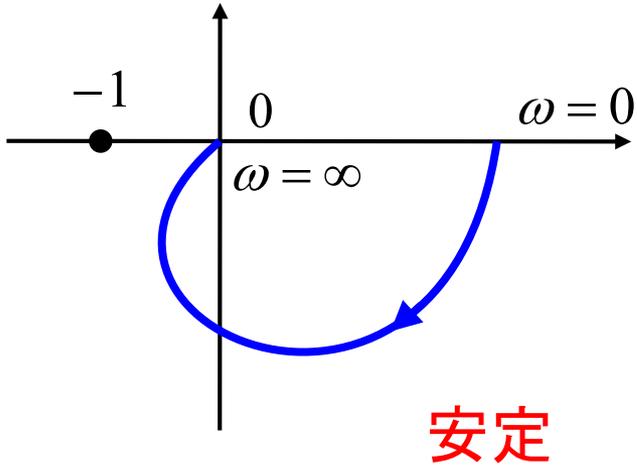
$K = 12$ のとき

点 $(-1, 0)$ を右にみるようになる

⇒ 不安定



[例] 簡単化されたナイキストの安定判別法



Harry Nyquist (1889-1976)

Bell System Technical Journal (1932)

“Regeneration Theory”

<https://www.skydio.com/>

Click !

<https://www.biocarbonengineering.com/>

Click !

6.3 ゲイン余裕, 位相余裕

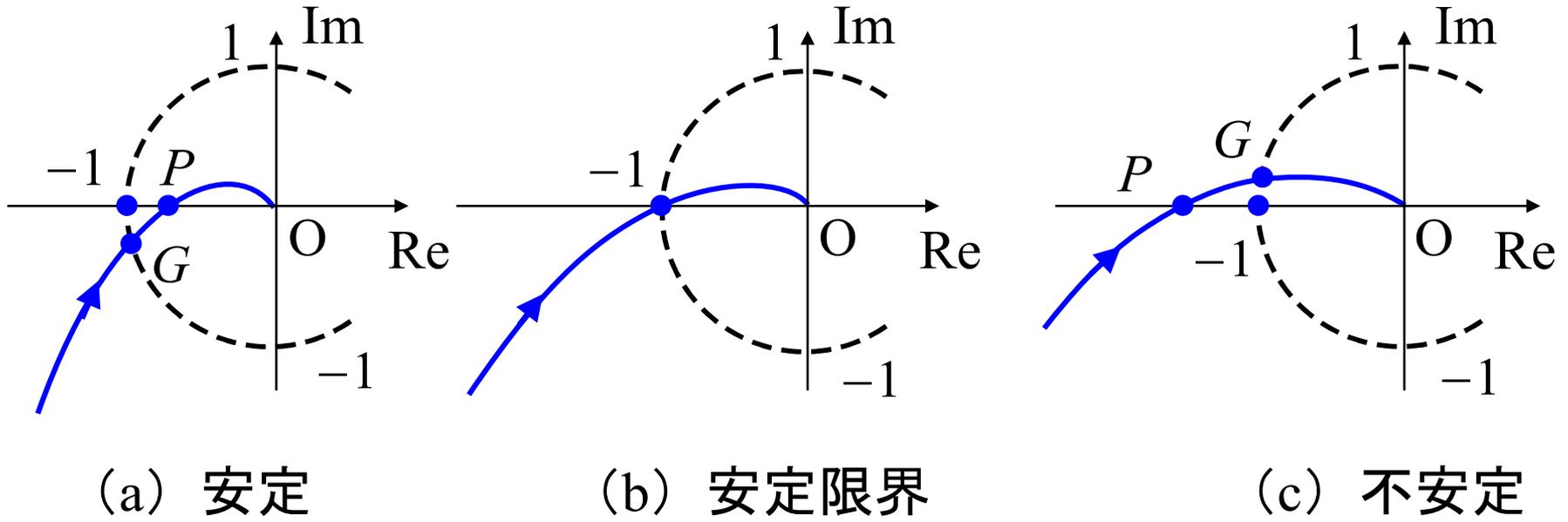


図6.11 ベクトル軌跡と安定性

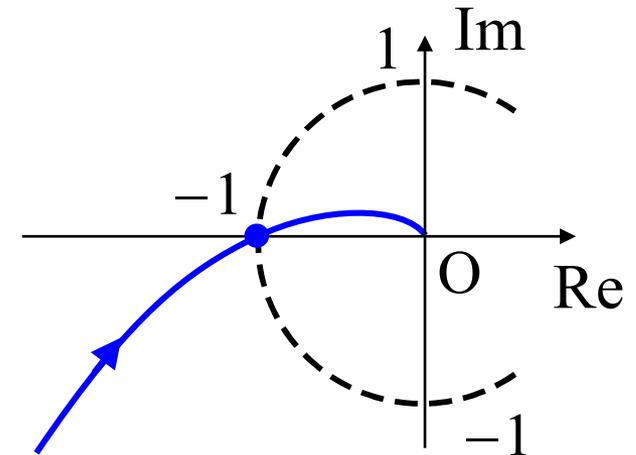
安定限界のとき,

ベクトル軌跡がちょうど点 $(-1,0)$ の上を通る

$$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ \text{ のとき}$$

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| = 1$$

ω_{pc} : ベクトル軌跡の位相が
 -180° になる周波数



(b) 安定限界

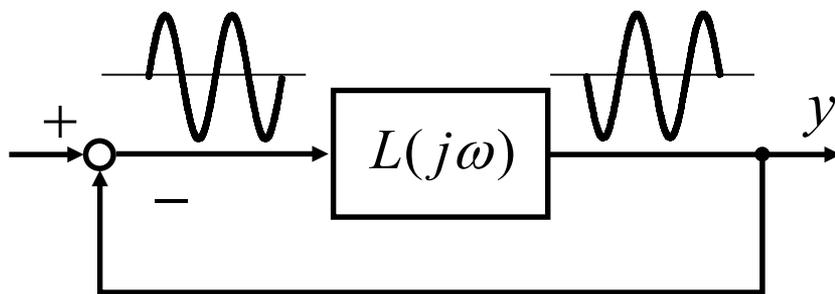
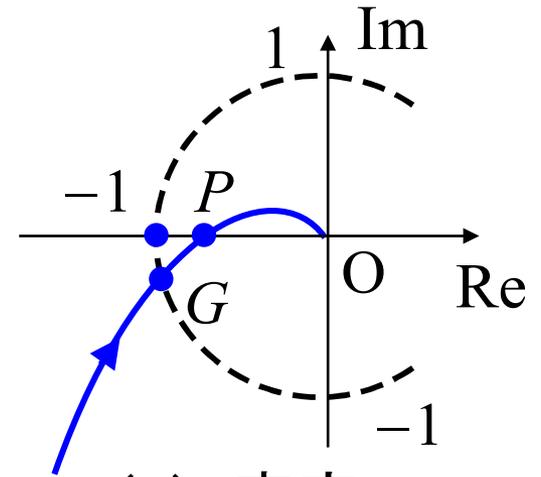


図6.11 ベクトル軌跡と安定性

安定のとき,

$$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ \text{ のとき}$$

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| < 1$$



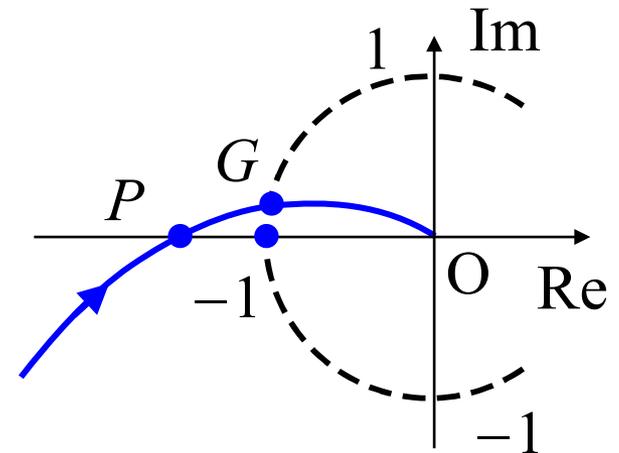
(a) 安定

図6.11 ベクトル軌跡と安定性

不安定のとき,

$$\angle P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc}) = -180^\circ \text{ のとき}$$

$$|P(j\omega_{pc})K(j\omega_{pc})| > 1$$

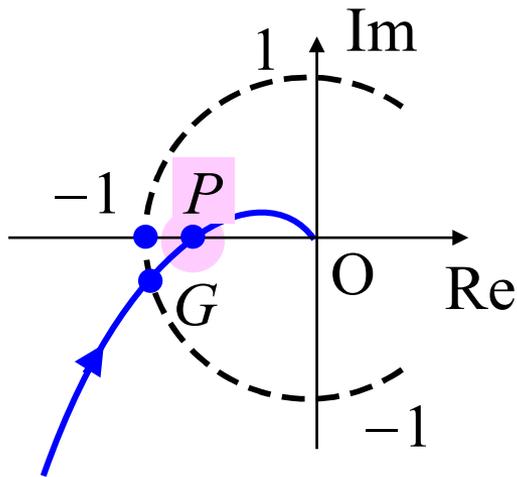


(c) 不安定

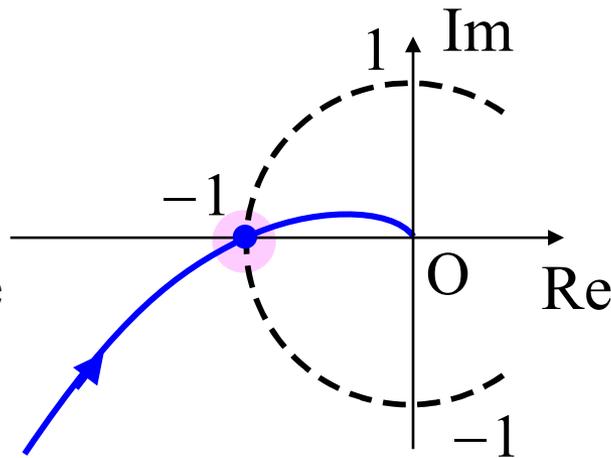
図6.11 ベクトル軌跡と安定性

位相交差周波数 ω_{pc}

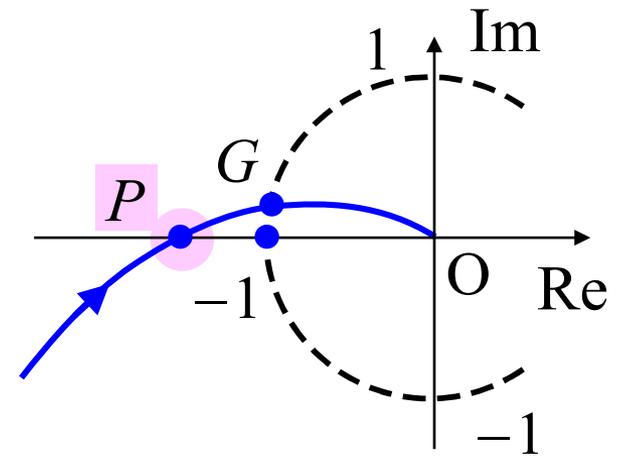
ベクトル軌跡が負の実軸を横切る点 P に対応
位相が -180° になる



(a) 安定



(b) 安定限界



(c) 不安定

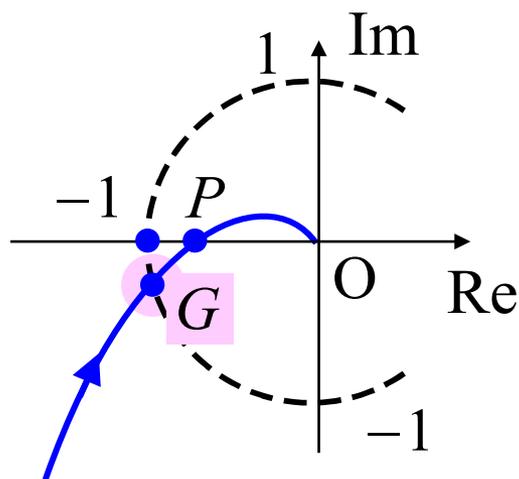
ゲイン交差周波数 ω_{gc}

ゲインがちょうど 1 になる点 G に対応
単位円を横切る

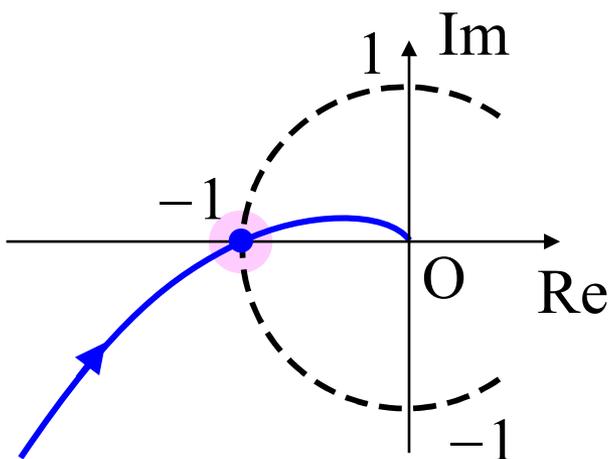
$$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) > -180^\circ \quad \text{安定}$$

$$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) = -180^\circ \quad \text{安定限界}$$

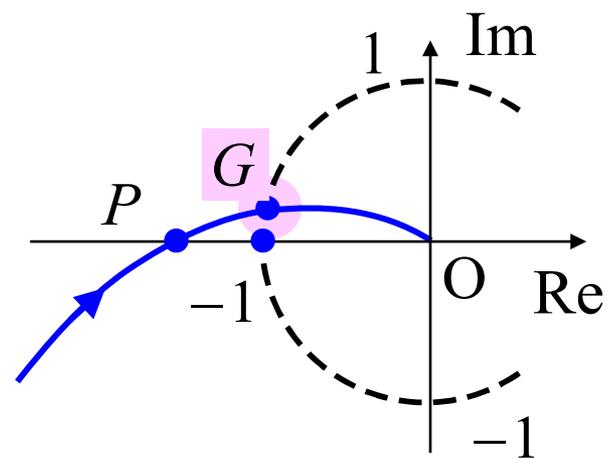
$$\angle P(j\omega_{gc})K(j\omega_{gc}) < -180^\circ \quad \text{不安定}$$



(a) 安定



(b) 安定限界



(c) 不安定 19

ベクトル軌跡が点 $(-1,0)$ からある程度離れているならば, **安定余裕**がある.

ゲイン余裕 GM

あとどれだけゲインを増やすと制御系が不安定になるか.

$$GM = \frac{1}{OP} \quad (\text{dB})$$

位相余裕 PM

あとどれだけ位相が遅れると制御系が不安定になるか.

$$PM = \angle GOP \quad (^\circ)$$

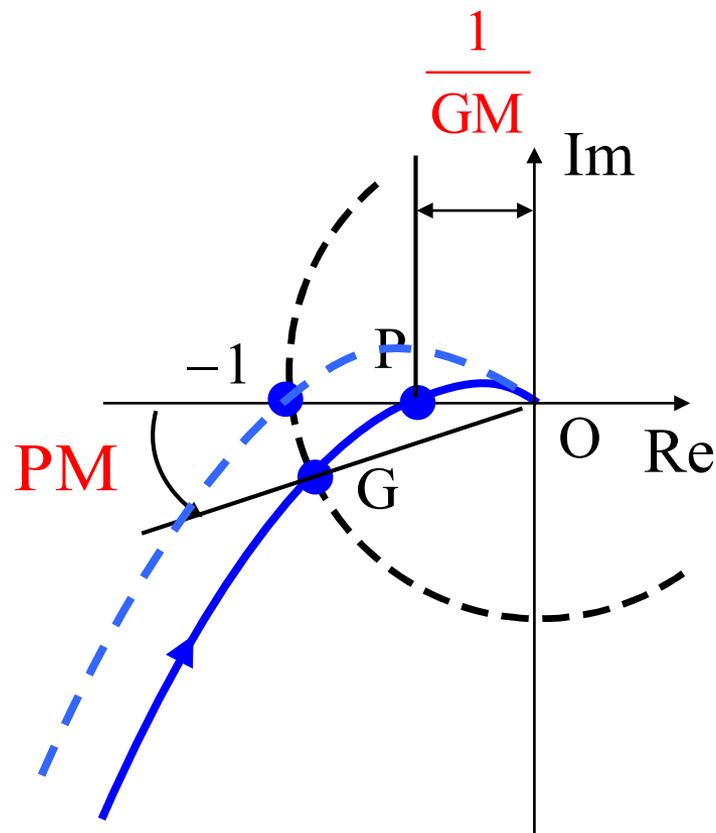
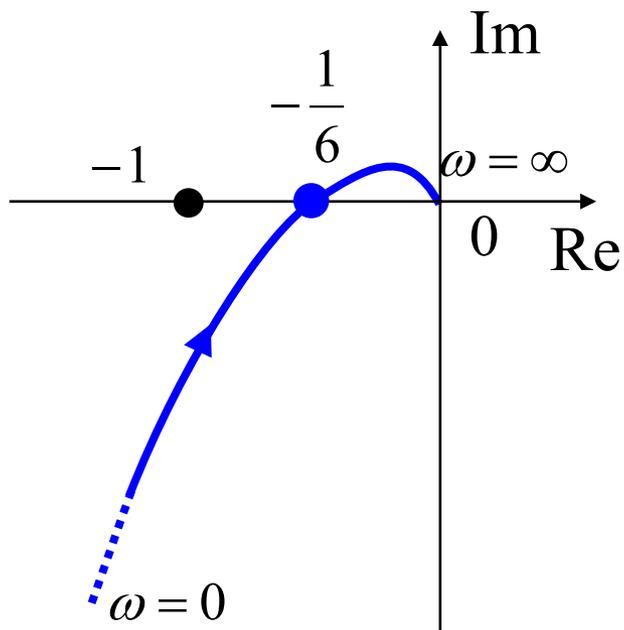


図6.12 ゲイン余裕, 位相余裕

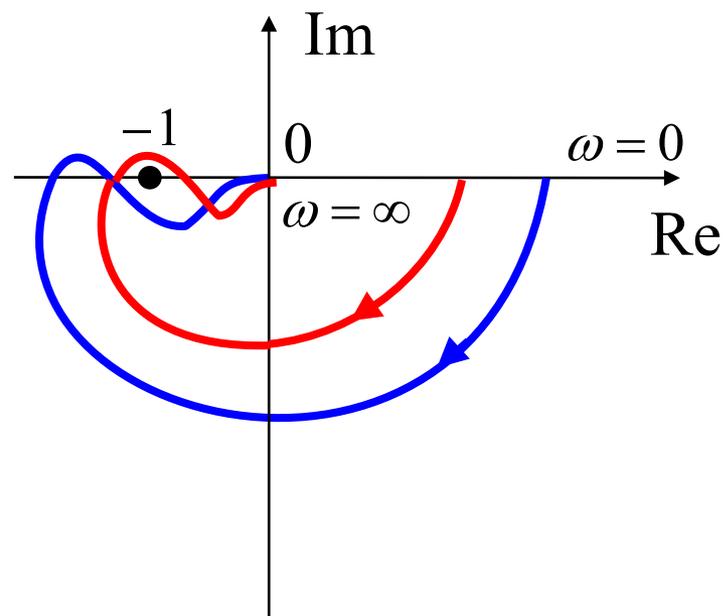
[例] ゲイン余裕

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



安定

$$GM = 6$$



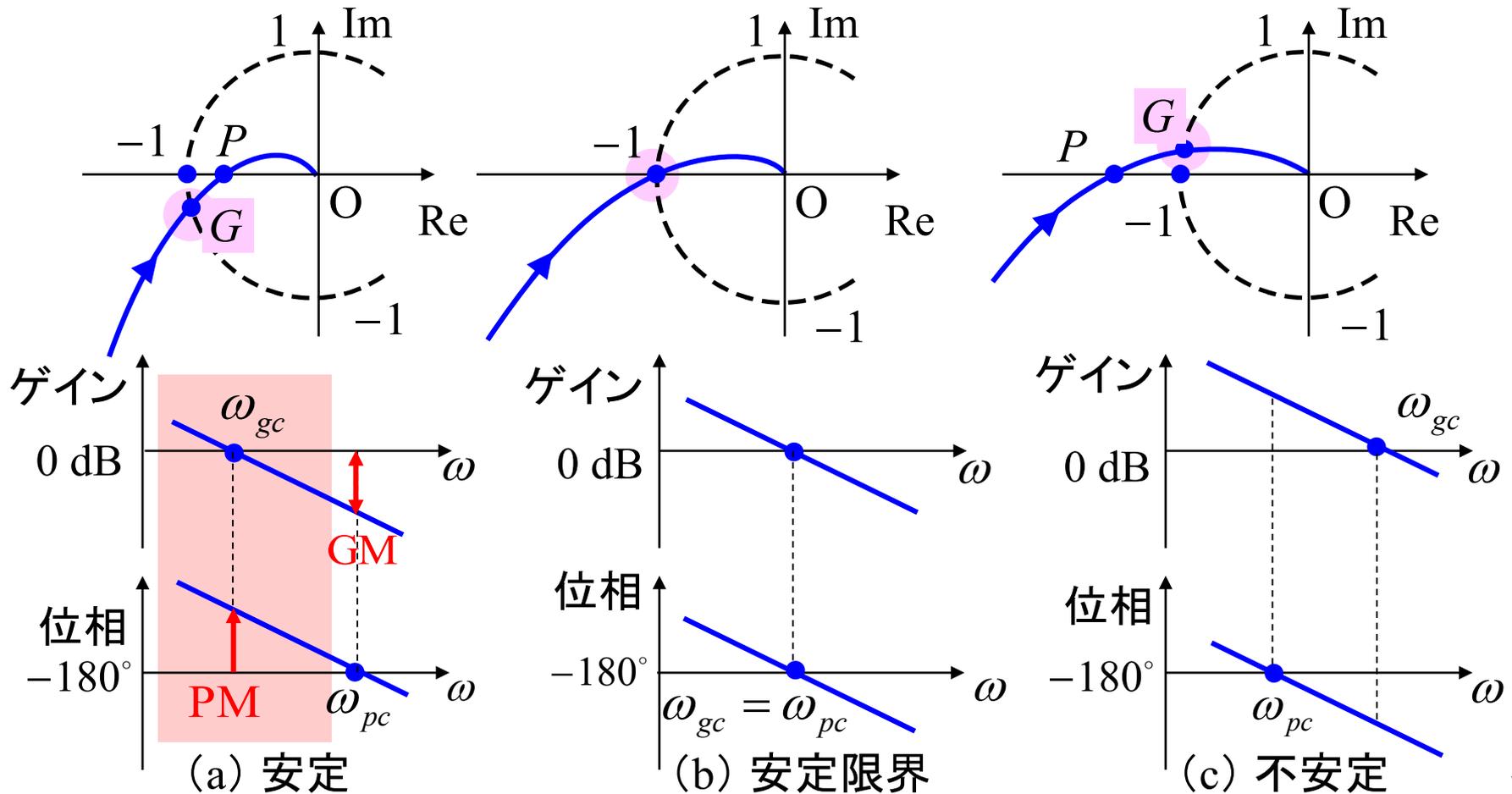
安定(条件付安定)

$$GM = \infty$$

ボード線図での読み取り

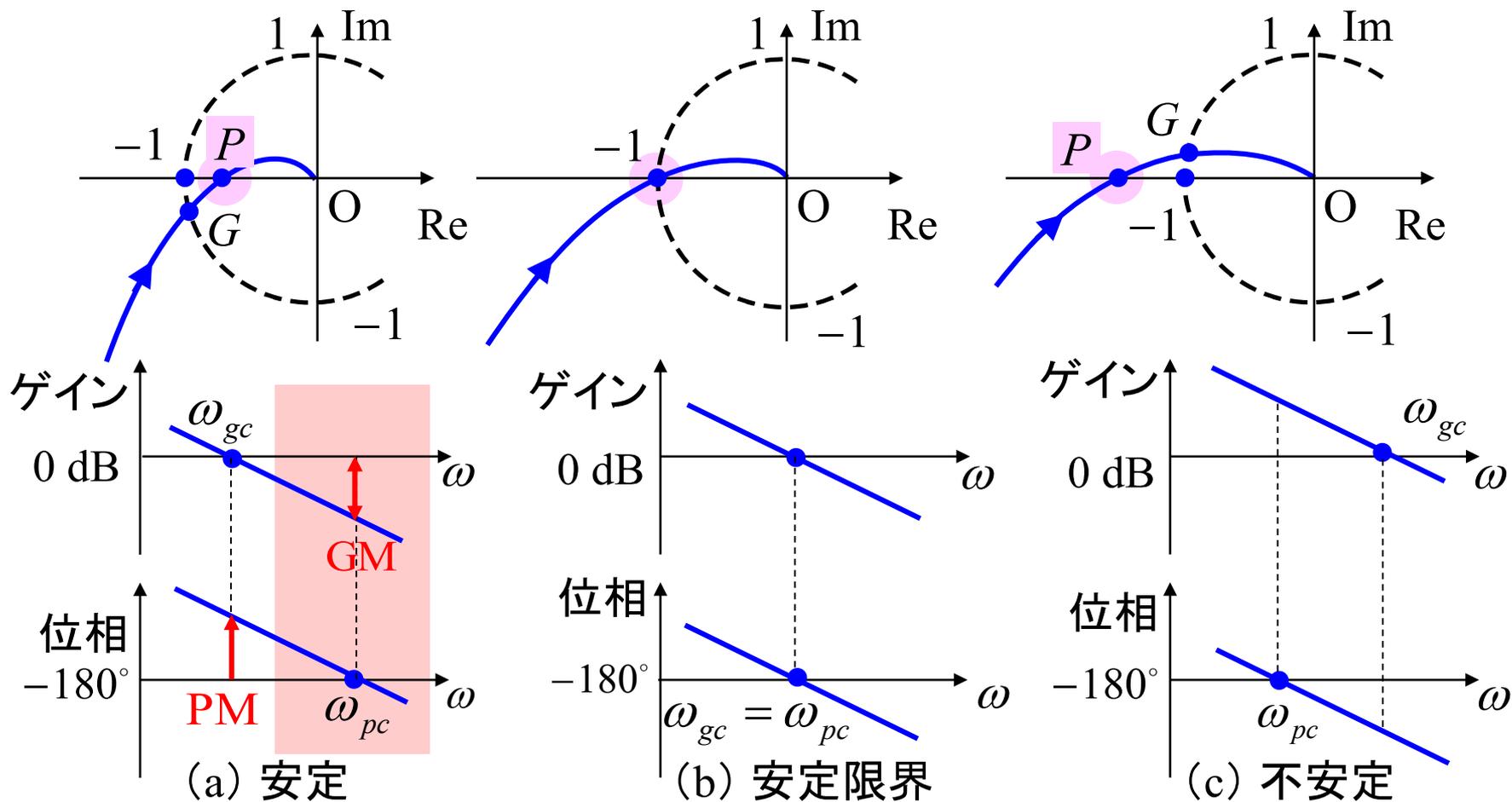
- (a) 位相が -180° より進む \Rightarrow 安定
- (b) 位相が -180° ちょうど \Rightarrow 安定限界
- (c) 位相が -180° より遅れる \Rightarrow 不安定

ゲイン交差周波数 ω_{gc} で PM を読み取る.



- (a) ゲインが 0 dB より低い \Rightarrow 安定
- (b) ゲインが 0 dB ちょうど \Rightarrow 安定限界
- (c) ゲインが 0 dB より高い \Rightarrow 不安定

位相交差周波数 ω_{pc} で GM を読み取る.



[例 6.6] (虚軸上に極がある場合)

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (K=3)$$

ゲイン交差周波数

$$\omega_{gc} \cong 0.97 \text{ rad/s}$$

位相余裕

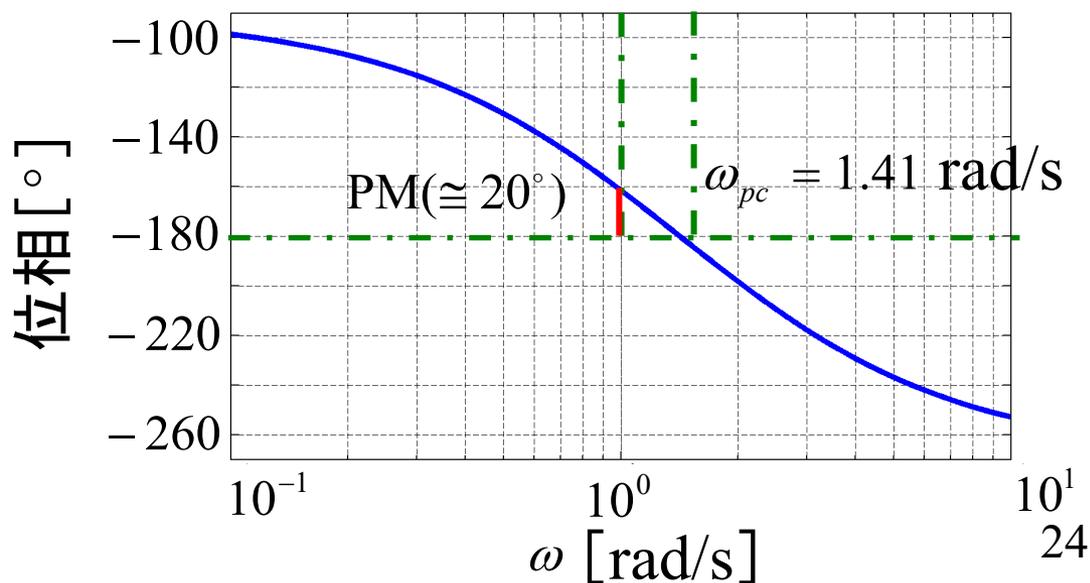
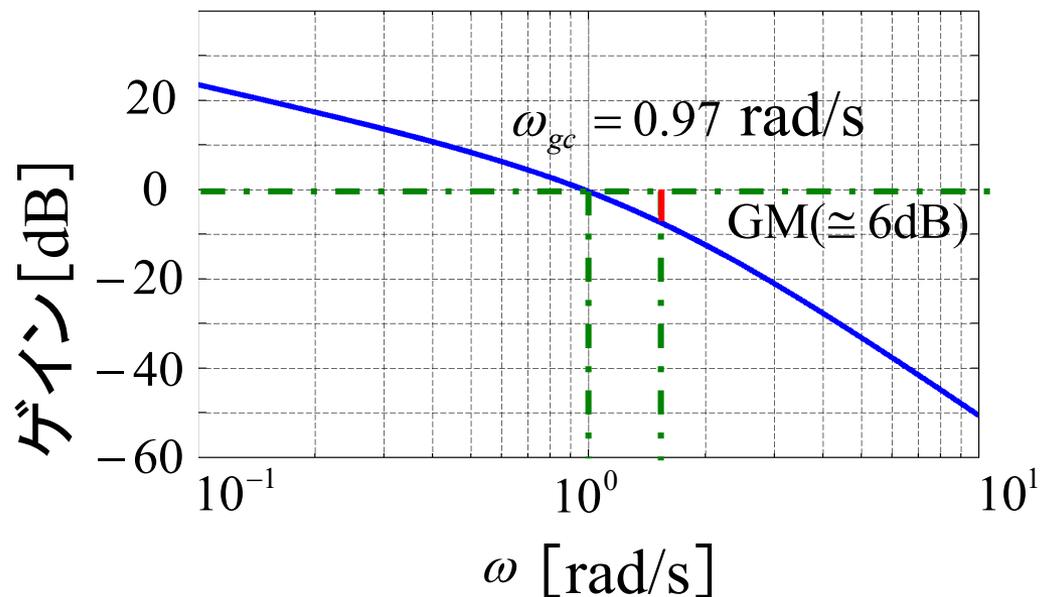
$$PM \cong 20^\circ$$

位相交差周波数

$$\omega_{pc} \cong 1.41 \text{ rad/s}$$

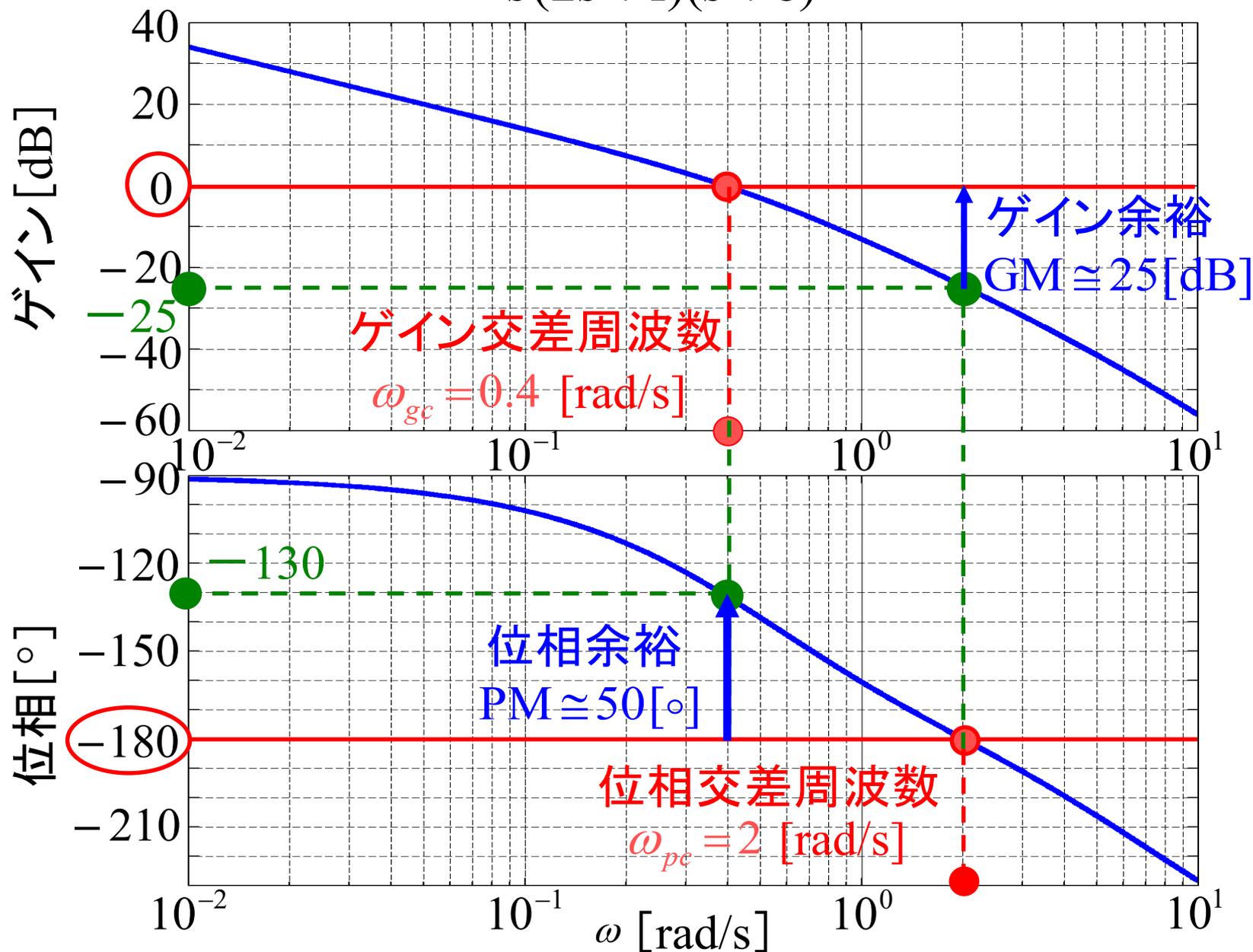
ゲイン余裕

$$GM \cong 6\text{dB}$$



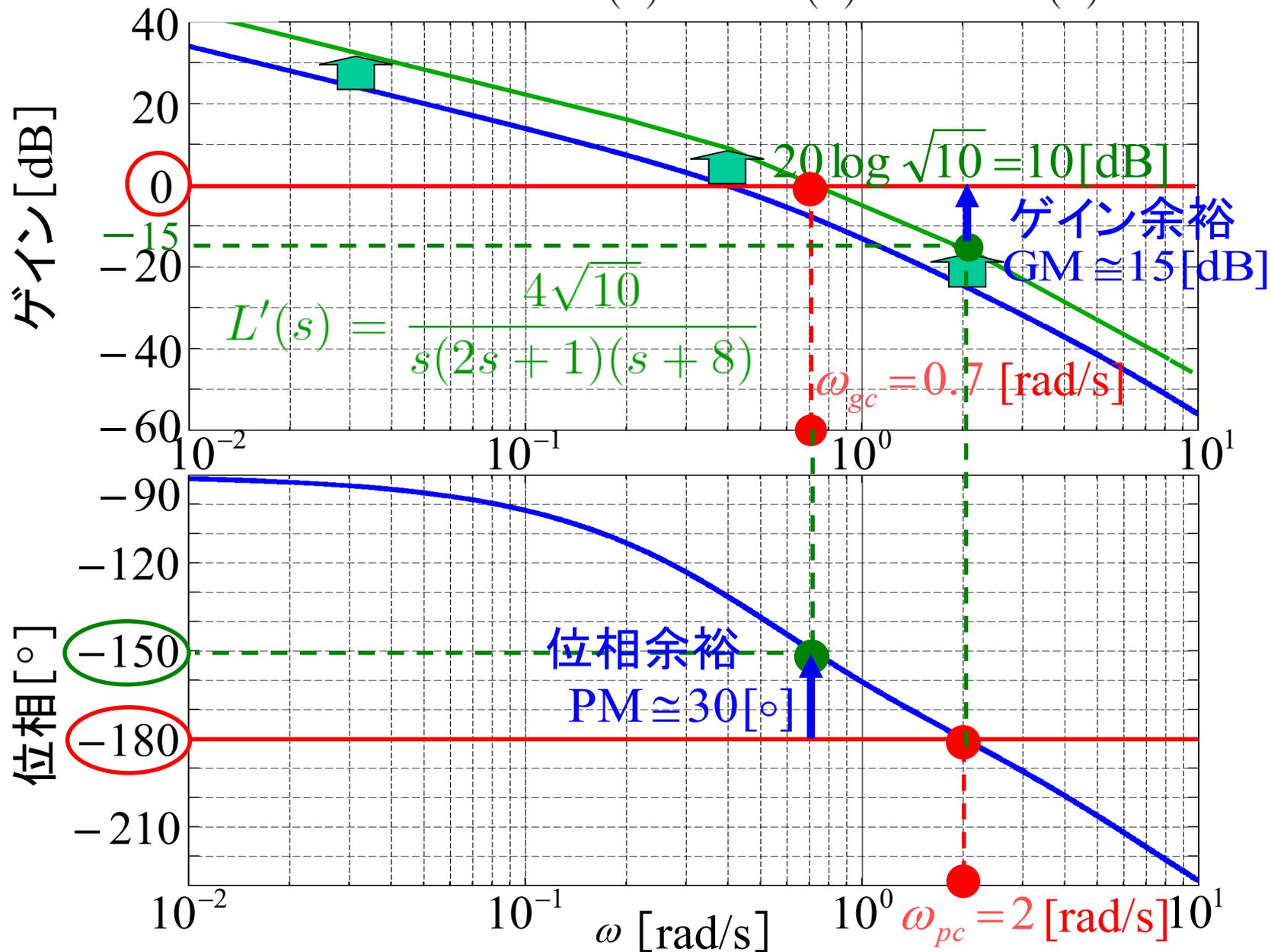
[例題]

$$L(s) = \frac{4}{s(2s+1)(s+8)} \text{ のボード線図}$$



[例題] ゲイン倍によるゲイン余裕と位相余裕の変化

$$L'(s) = KL(s) = \sqrt{10}L(s)$$



第6章：フィードバック制御系の安定性

✓ 6.2 ナイキストの安定判別法 (pp. 115-120)

キーワード：単純化されたナイキストの安定判別法

✓ 6.3 ゲイン余裕, 位相余裕 (pp. 120-125)

キーワード：位相交差周波数, ゲイン交差周波数,
位相余裕, ゲイン余裕

学習目標：単純化されたナイキストの安定判別法について説明できる。安定性の程度を評価するゲイン余裕や位相余裕について説明できる。

Reading Assignment #9

第7章：フィードバック制御系のロバスト性解析

7.1 不確かさとロバスト性 (pp. 127~135)

キーワード： ロバスト性, モデル, 不確かさ,
ノミナルモデル, モデル集合

学習目標：制御系のロバスト性解析として, まずモデルとそれに含まれる不確かさの概念を説明できる.
モデルの不確かさの記述法を習得する.