フィードバック制御

2019年度　3Q

担当教員: 藤田政之　教授 (S5-303B)

第5回講義

10月17日（木）13:20～15:50，S224講義室

第 5 章 :周波数応答

5.3　ボード線図（pp. 94～98）

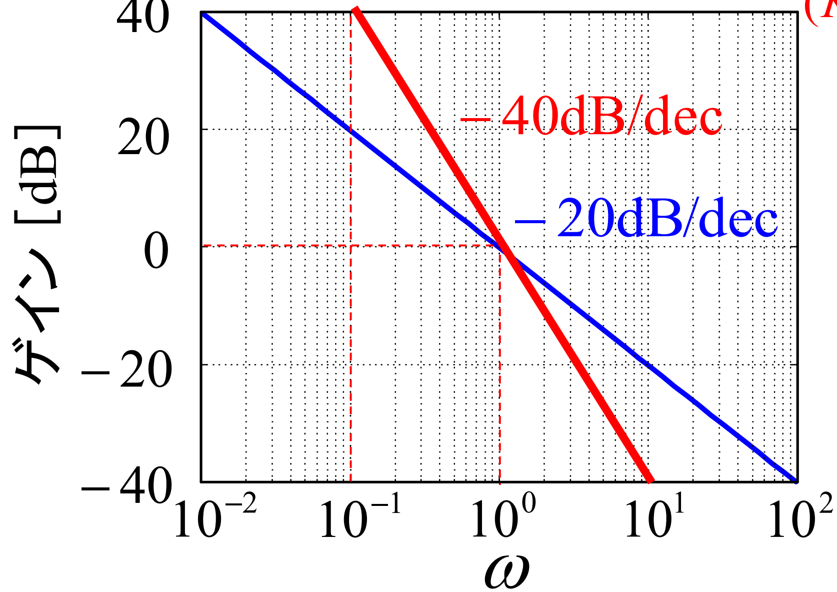
キーワード： ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

5.4　ボード線図の性質（pp. 98～104）

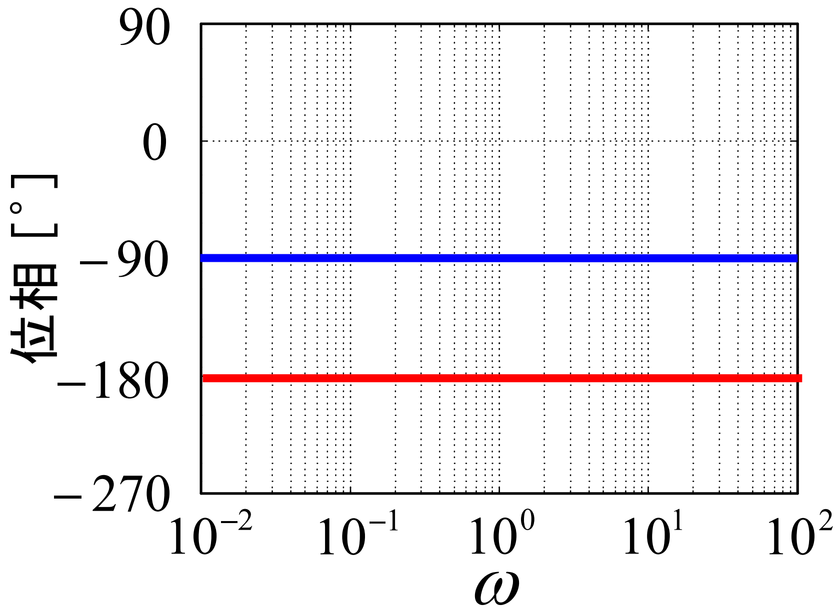
キーワード： 最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標 :ボード線図を用いて周波数特性を図式的に
表すことができる．最小位相系における
ゲインと位相の関係について説明できる．

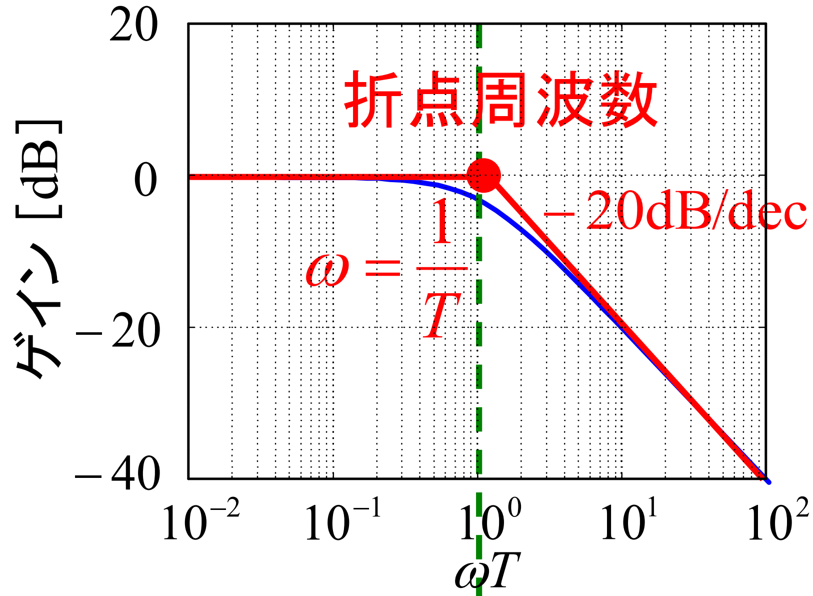
[復習] 積分系$(K=1)$　2 重積分系$(K=1)$ ｜ 1 次系$(K=1)$ 折れ線近似



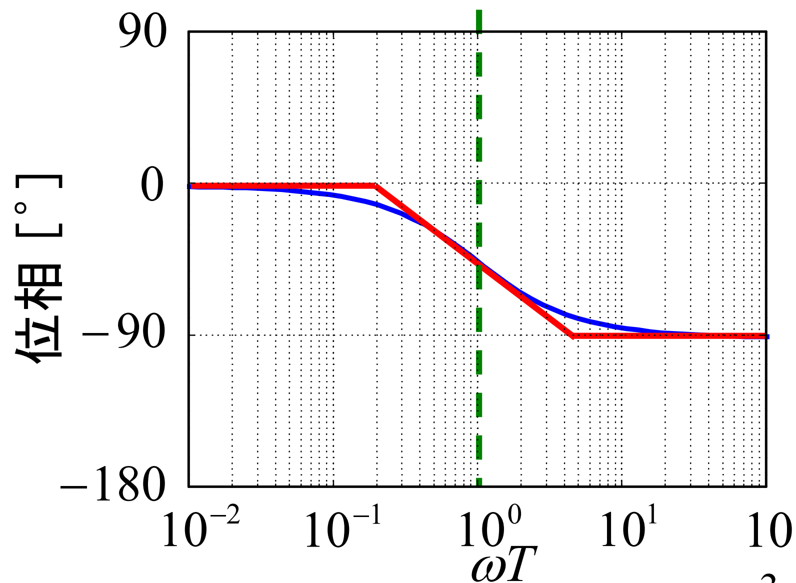
(a) ゲイン線図



(b) 位相線図



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

[復習]（5章：P93）

2 次系

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (K=1)$$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j+1}$$

$$=\frac{1}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1} \qquad \left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle([1-\Omega^2]\ +j[2\zeta\Omega]) \ =-\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

2 次系 $G(j\omega) = \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

$$= \frac{1}{(1-\Omega^2) + 2\zeta\Omega j} \quad \left(\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

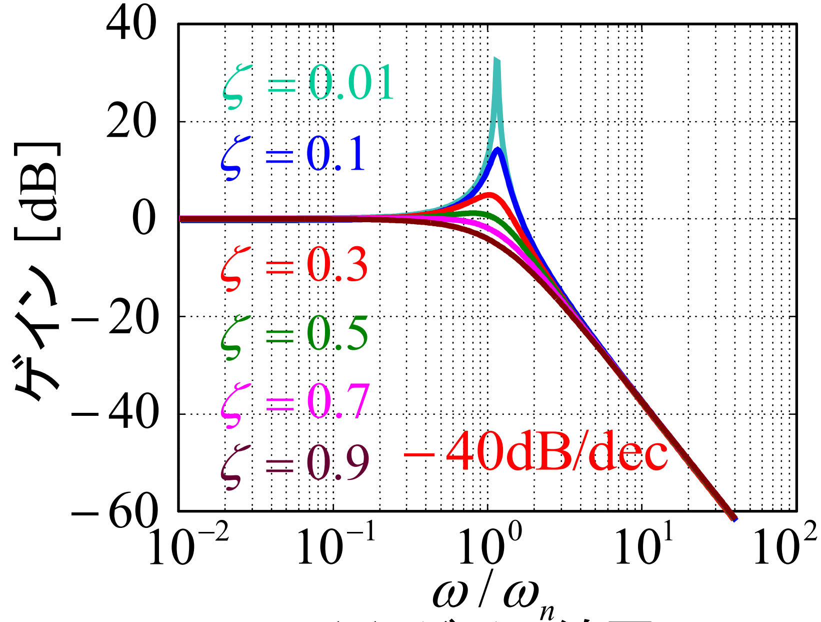
位相

$$\angle G(j\omega) = -\angle((1-\Omega^2) + j(2\zeta\Omega))$$

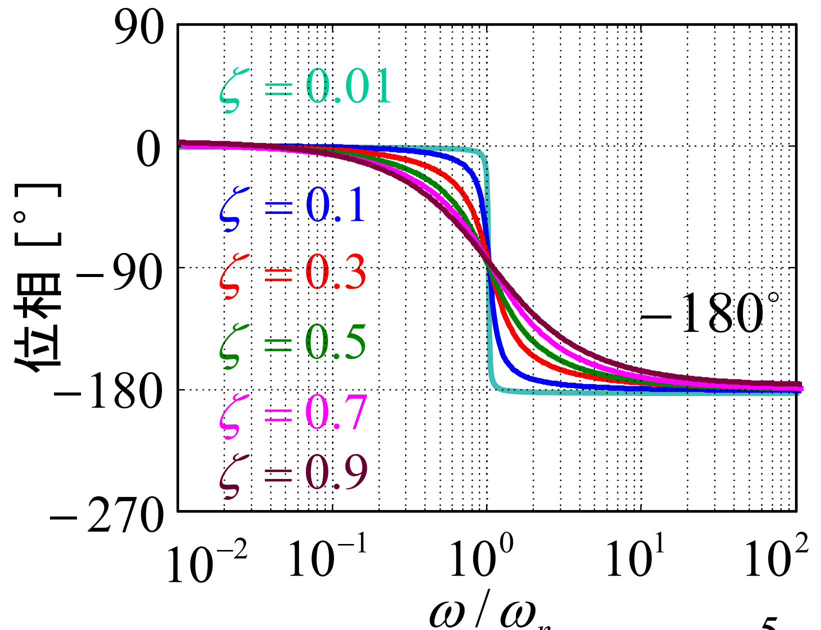
$\Omega << 1 \quad G(j\omega) \approx 1$

$\Omega >> 1 \quad G(j\omega) \approx \dfrac{1}{-\Omega^2}$

$$\begin{cases} \Omega << 1 & 20\log|G| \approx 20\log 1 = 0 \ \text{dB} \\ & \angle G \approx 0^\circ \\ \Omega = 1 & 20\log|G| = 20\log\left|\dfrac{1}{2\zeta}\right| \ \text{dB} \\ & \angle G = -90^\circ \\ \Omega >> 1 & 20\log|G| \approx -40\log|\Omega| \ \text{dB} \\ & \angle G \approx -180^\circ \end{cases}$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

$$\Omega = 0 \qquad |G| = 1 \qquad \angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$$

$$\Omega = 1 \qquad |G| = \frac{1}{2\zeta} \qquad \angle G = -90^\circ$$

$$\Omega \approx \infty \qquad |G| \approx 0 \qquad \angle G \approx -180^\circ$$

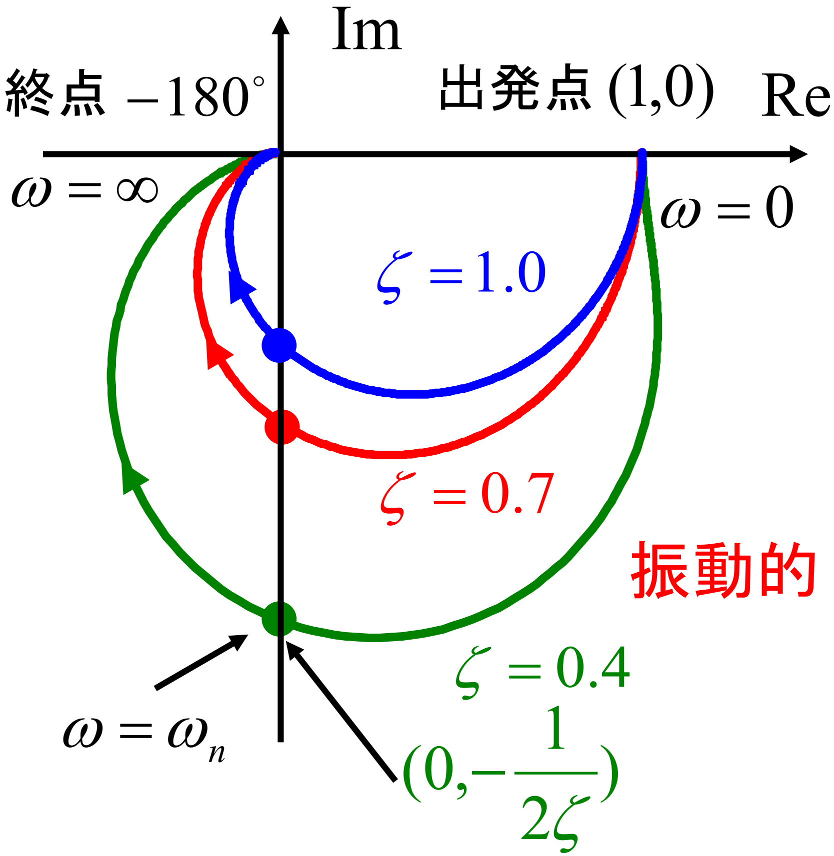
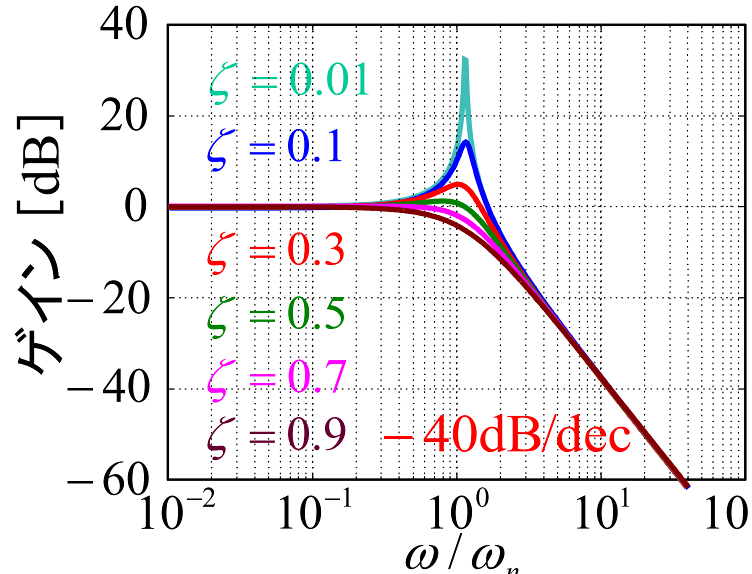
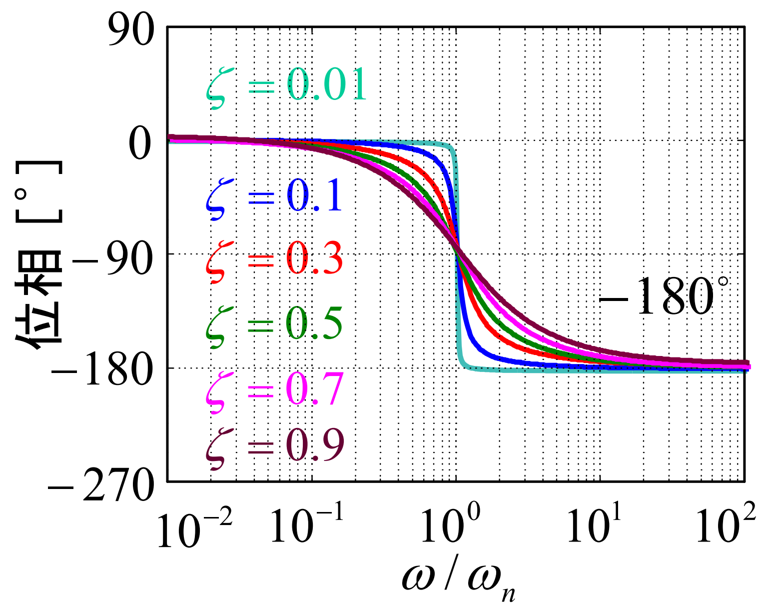


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

[復習]（3章：pp. 45-49）

2 次系の時間応答（ステップ応答）$G(s)=\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$K(>0)$ ゲイン：定常値，$G(0)=K$

$\zeta(>0)$ 減衰係数：振動減衰(ダンピング)の特性を定める

$\zeta<1$　不足制動

$$y(t)=K\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\right\}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$\zeta=1$　臨界制動

$$y(t)=K\left\{1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right\}$$

$\zeta>1$　過制動

$$y(t)=K\left\{1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left((\zeta+\beta)e^{\omega_n\beta t}-(\zeta-\beta)e^{-\omega_n\beta t}\right)\right\}\qquad \beta=\sqrt{\zeta^2-1}$$

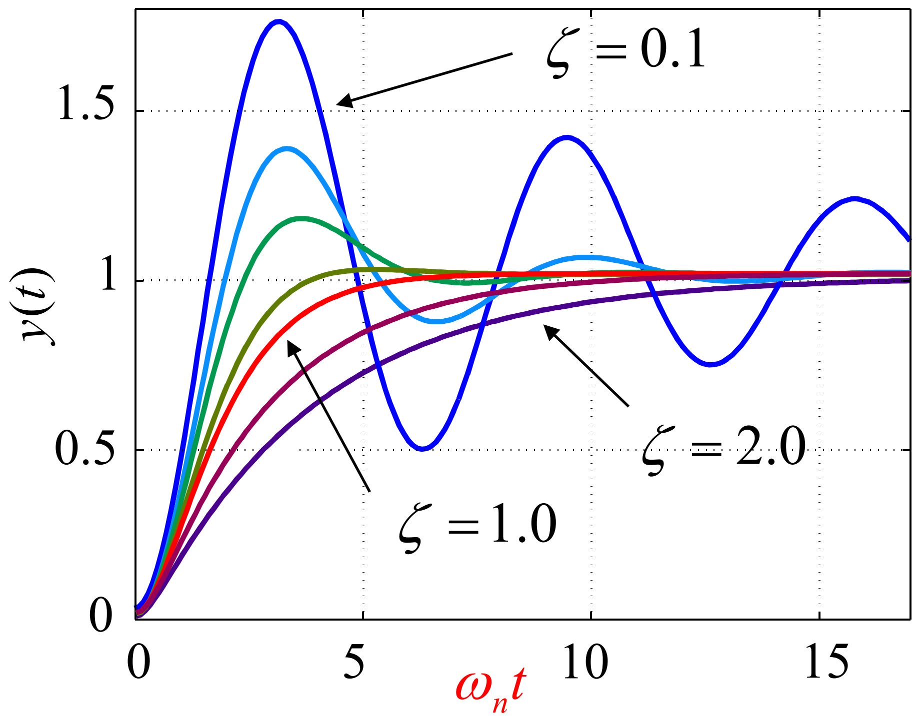


図3.7 2次系のステップ応答

[復習]（3章：pp. 45-49） 2 次系の時間応答（ステップ応答）

$\omega_n (>0)$ 自然角周波数： 速応性を定める

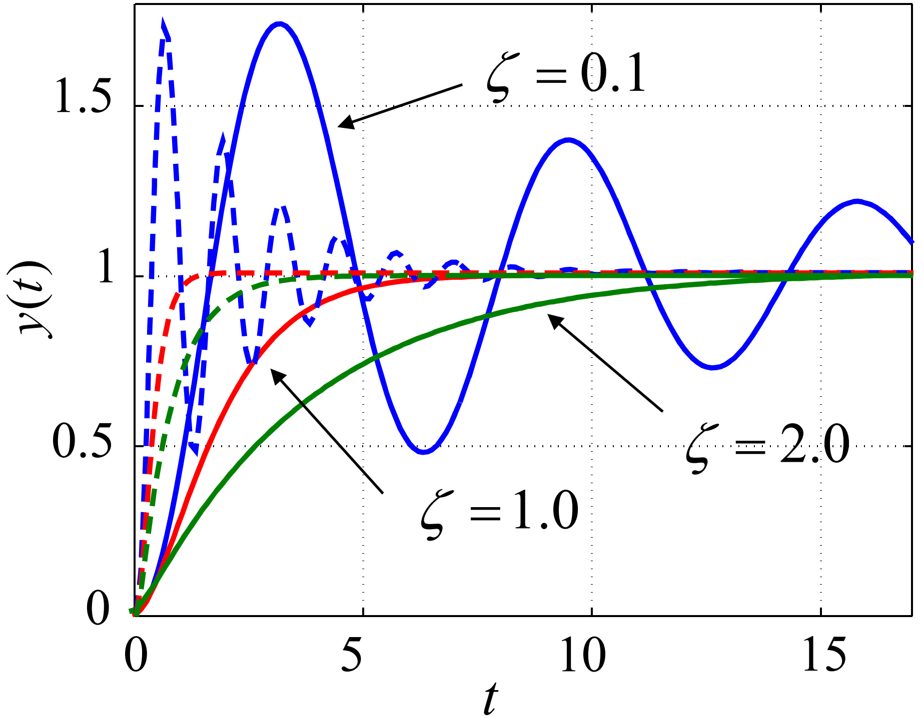
横軸 $\omega_n t$

ω_n は原点からの距離

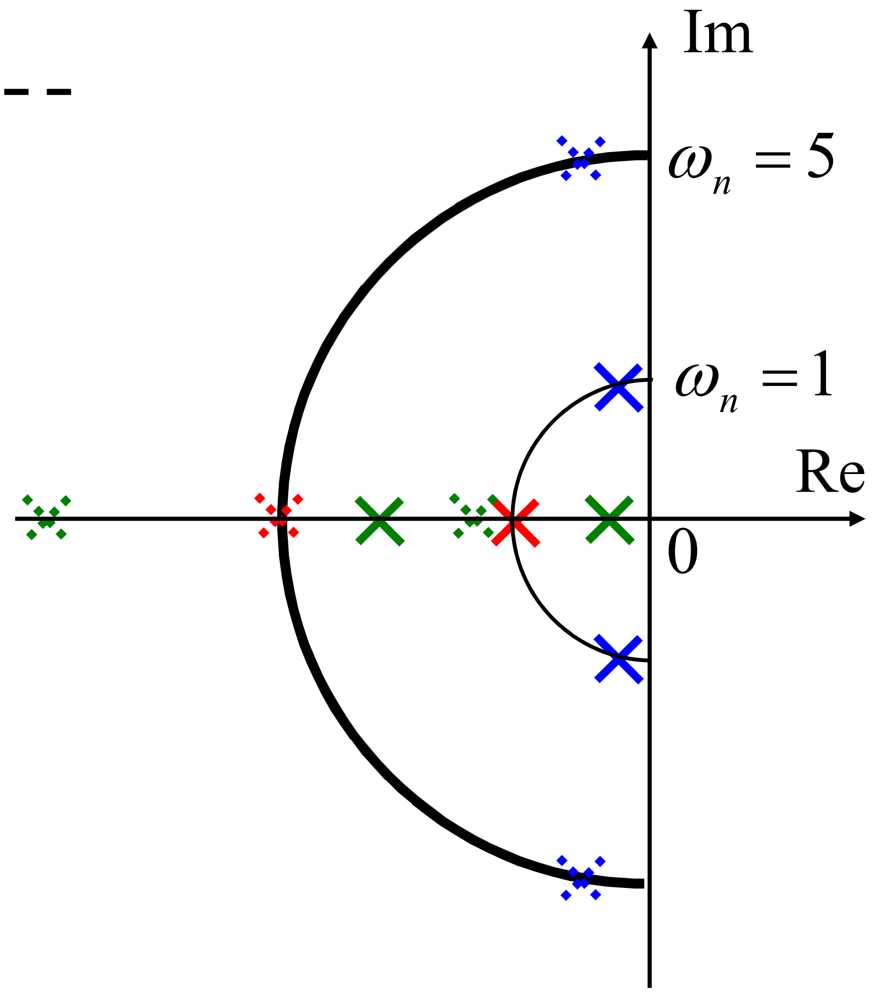
目盛り 10 $\begin{cases} \omega_n = 1 & t = 10 \\ \omega_n = 5 & t = 2 \end{cases}$

$\omega_n = 1$：実線、$\omega_n = 5$：破線

ω_n ：大 ➡ 応答が速くなる



2次系のステップ応答

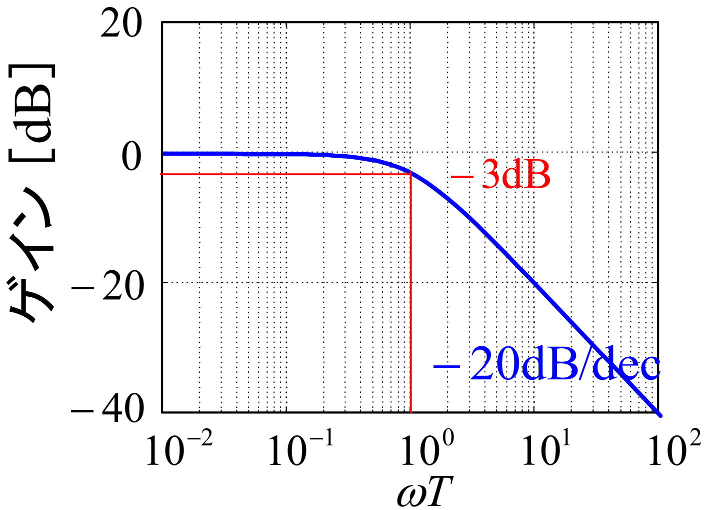


2次系の極の位置

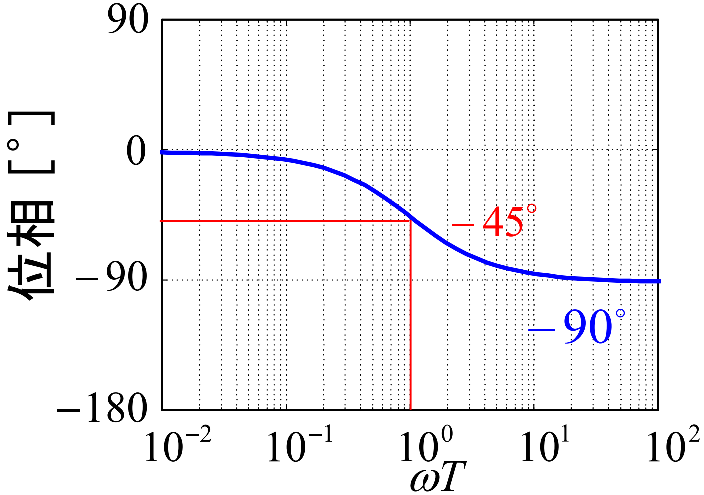
まとめ

1 次系$_{(K=1)}$ $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$

2 次系$_{(K=1)}$ $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

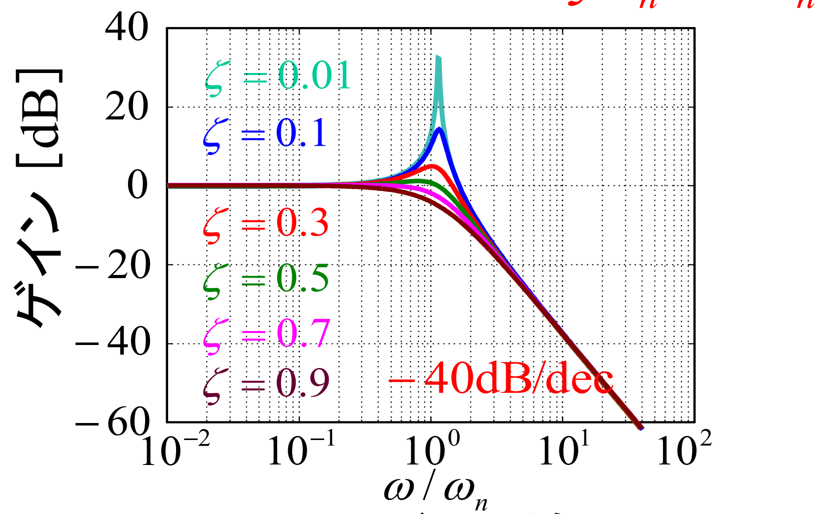


(a) ゲイン線図

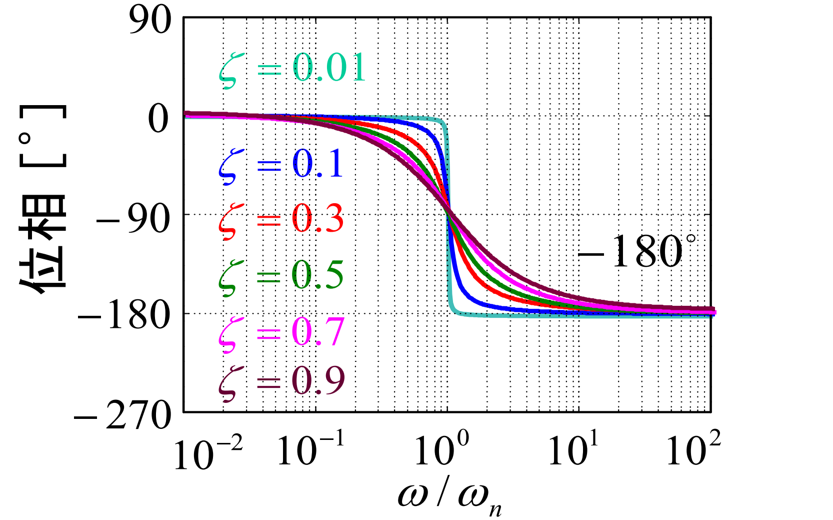


(b) 位相線図

図 5. 7 1 次系のボード線図



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

図5.9 2 次系のボード線図

むだ時間要素

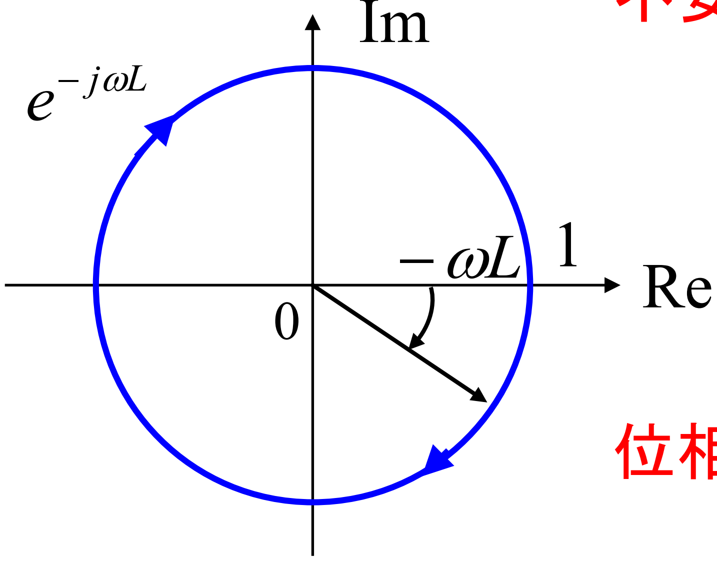
$$G(s)=e^{-sL}$$

パデー近似

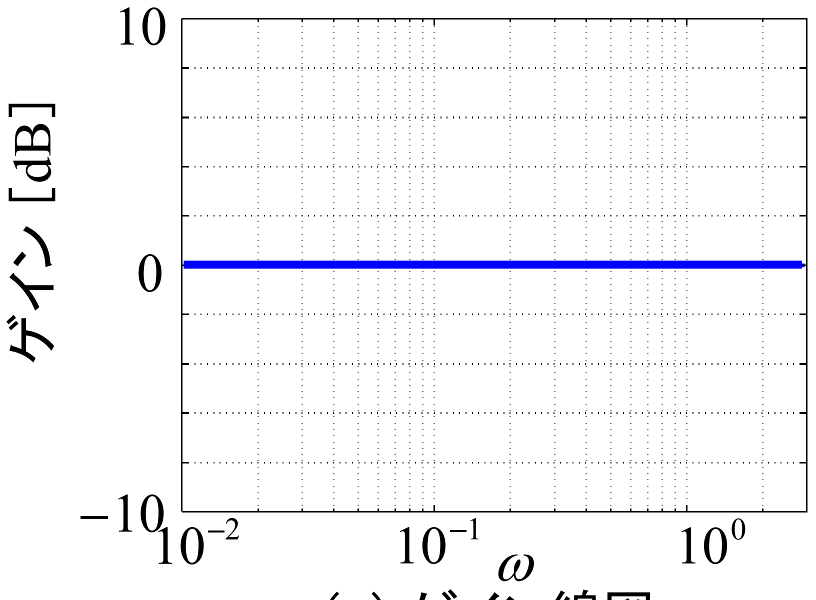
$$e^{-sL}\cong\frac{1-Ls/2}{1+Ls/2},$$

$$e^{-sL}\cong\frac{1-Ls/2+(Ls)^2/12}{1+Ls/2+(Ls)^2/12}$$

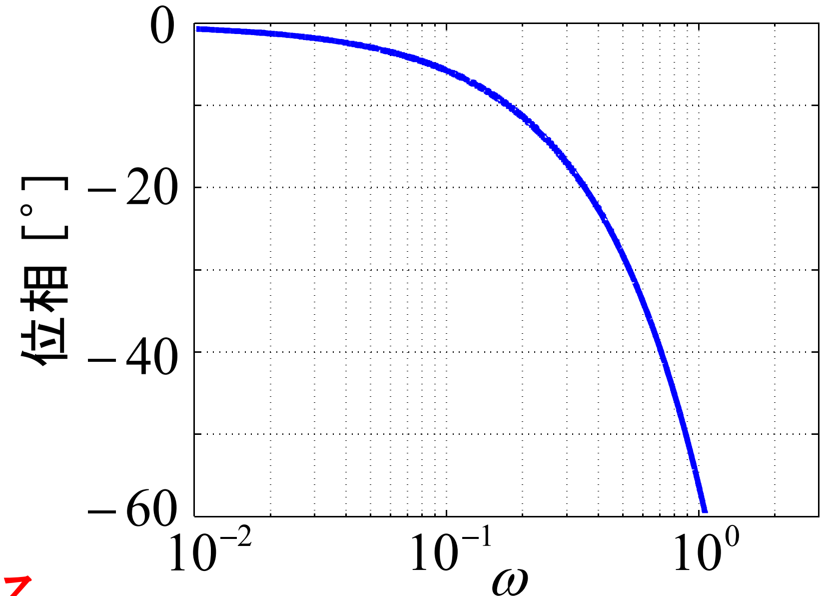
不安定零点



位相が遅れる



(a) ゲイン線図



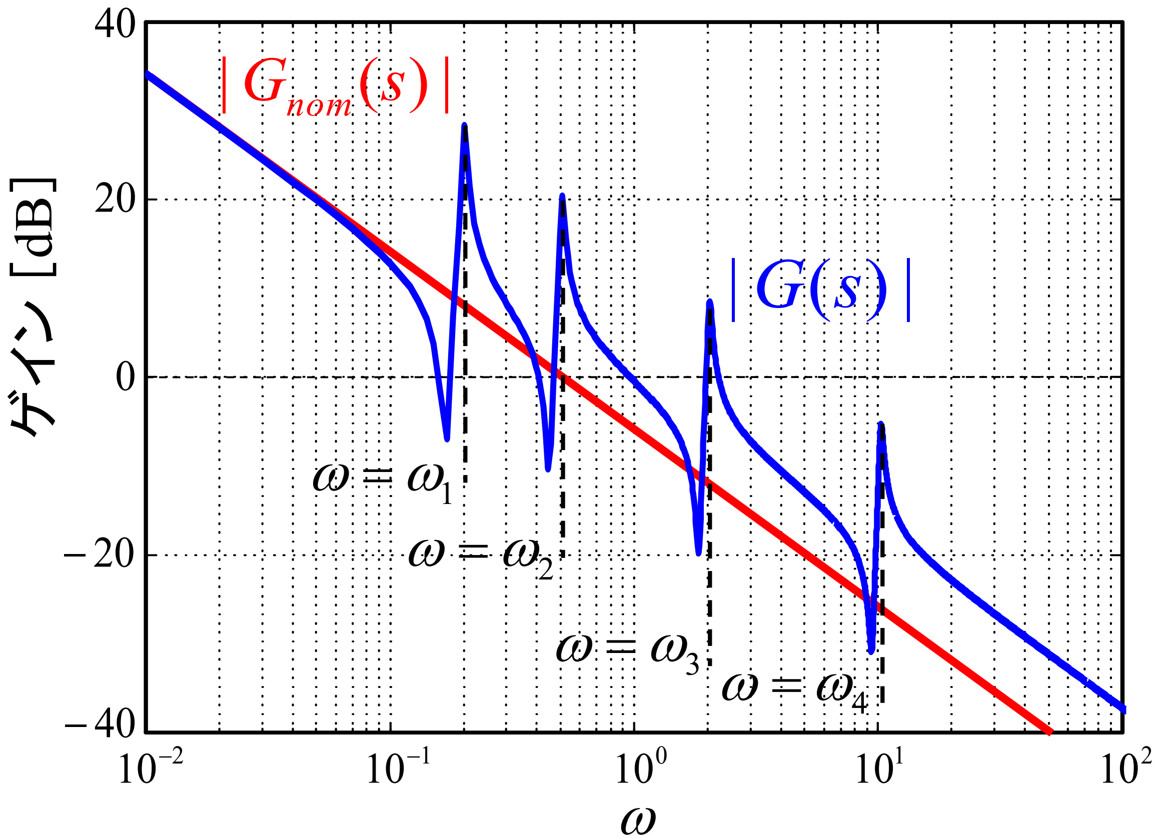
(b) 位相線図

振動系

$$G(s)=\underbrace{\frac{0.5}{s}}_{G_{nom}(s)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{4}\frac{0.2s}{s^2+2\zeta_i\omega_i s+\omega_i^2}}_{\text{振動系}}$$

http://mobile.jaxa.jp/gallery_list/index.php?category=iss

$$\omega_1=0.2,\ \omega_2=0.5,\ \omega_3=2,\ \omega_4=10,\ \zeta_i=0.02$$



5.4 ボード線図の性質

ゲインと位相の関係

［ 例 ］

$$G_1(s) = \frac{1+s}{s^2+s+1} \qquad G_2(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

ゲイン

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1+j\omega|}{|(j\omega)^2+j\omega+1|} = \frac{|1+j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{|1-\omega^2+j\omega|}$$

$$= \frac{|1-j\omega|}{|1-\omega^2+j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$

同じ

位相

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1-j\omega) - \angle(1-\omega^2+j\omega)$$

異なる

$$\angle G_1(j\omega) = \angle(1 + j\omega) - \angle(1 - \omega^2 + j\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \angle(1 - j\omega) - \angle(1 - \omega^2 + j\omega)$$

$$\omega = 0$$

$$\angle G_1(0) = \angle G_2(0) = 0^\circ$$

$$\omega \to \infty$$

$$\angle G_1(j\omega) \approx \angle j\omega - \angle(-\omega^2)$$

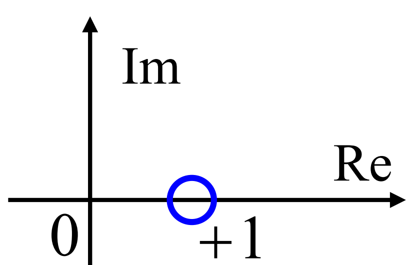
$$= +90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$$

$$\angle G_2(j\omega) \approx \angle(-j\omega) - \angle(-\omega^2)$$

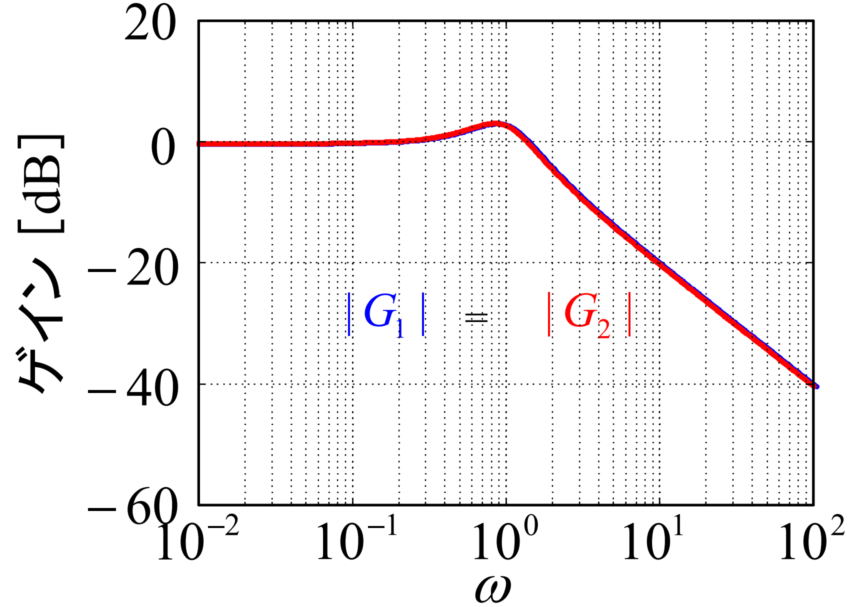
$$= -90^\circ - 180^\circ = -270^\circ$$

位相が遅れる

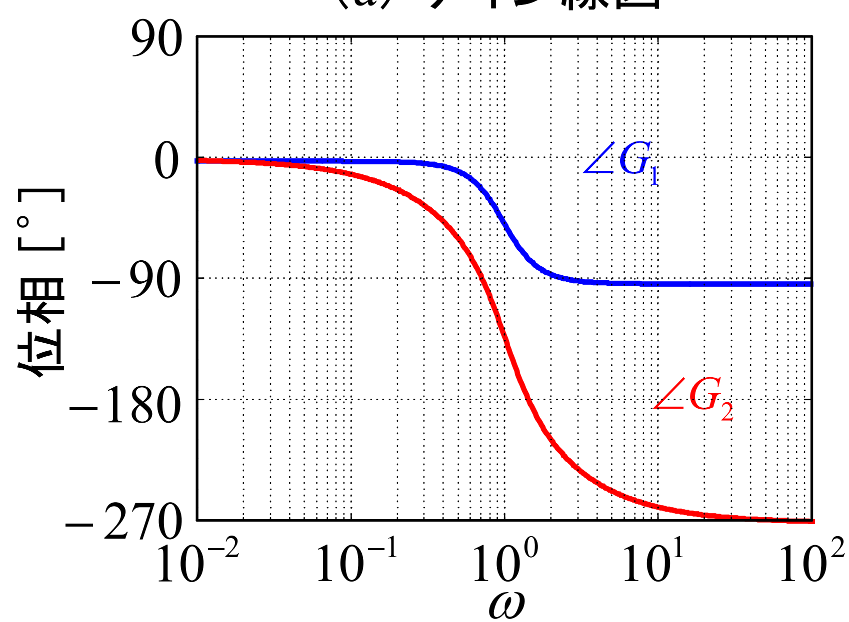
$$G_2(s) = \frac{1 - s}{s^2 + s + 1}$$



不安定零点



(a) ゲイン線図



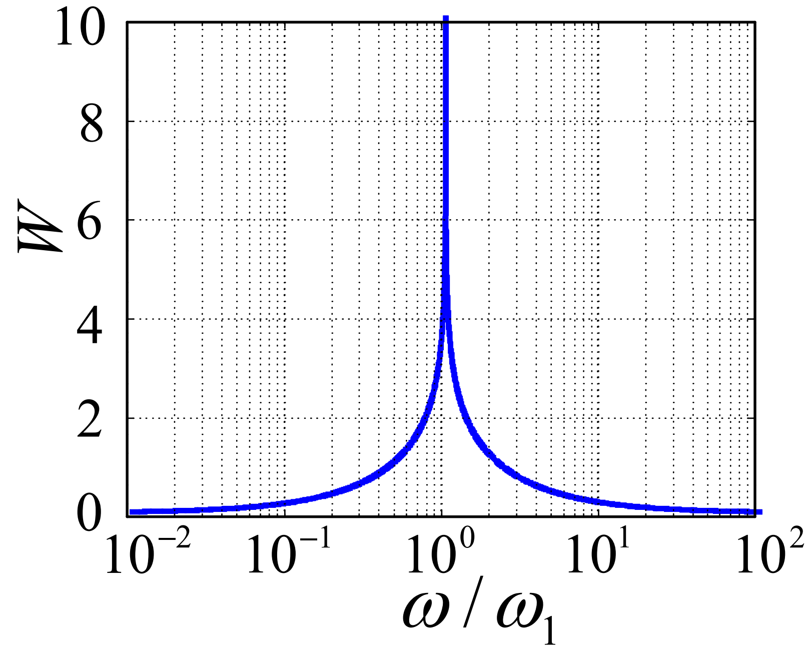
(b) 位相線図

最小位相系　安定なシステムでかつ不安定零点をもたない

ゲインから位相が一意に定まる.
（ボードのゲイン − 位相関係式）

$$\angle G(j\omega_1) = \frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dM}{du} W du \quad (5.35)$$

$(^\circ)$ 度



$$\begin{cases} u = \ln(\omega/\omega_1) & \text{正規化角周波数} \\ M = \ln|G(j\omega)| & \text{対数ゲイン} \\ W = \ln(\coth(|u|/2)) & \text{重み関数} \end{cases}$$

$$\left(\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)$$

$\dfrac{dM}{du}$　横軸，縦軸を自然対数目盛りとしたときのゲイン曲線の傾き

$$\int_{-\infty}^{\infty} W du = \frac{\pi^2}{2}$$ （$\omega = \omega_1$でピーク）

（dM/du 一定のとき）

$$\angle G(j\omega_1) \approx \frac{dM}{du}\cdot\frac{180}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} W du$$

$$= \frac{dM}{du}\cdot\frac{180}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{dM}{du}\times 90^\circ$$

$$= n\times 90^\circ$$

$n=-1$ のとき

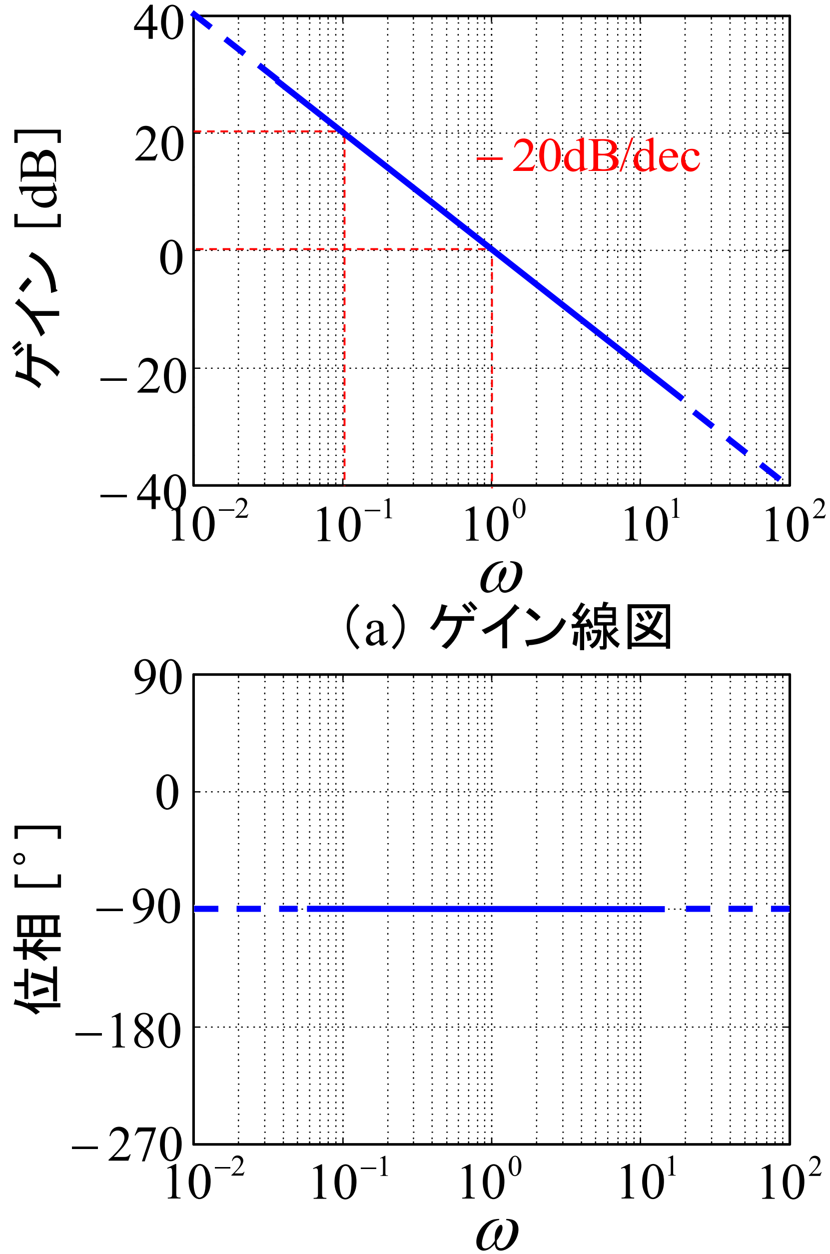
$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1$ で $\dfrac{dM}{du}=-1$

とすると

$-20\mathrm{dB/dec} \Rightarrow \angle G(j\omega_1)\approx -90^\circ$

積分系

1 次系（高周波域）



(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

$$\angle G(j\omega_1) \approx n \times 90^\circ$$

<u>$n = -2$ のとき</u>

$$0.1\omega_1 < \omega < 10\omega_1 \text{ で } \frac{dM}{du} = -2$$

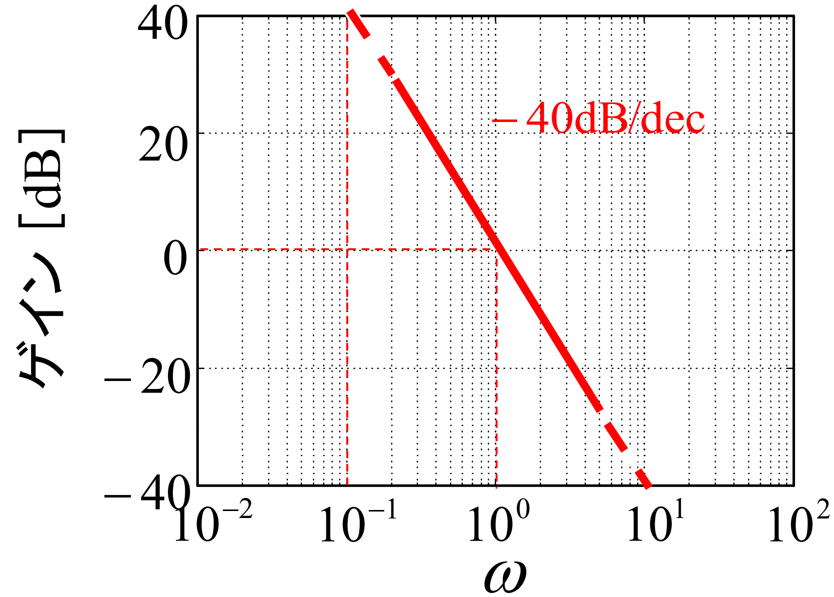
とすると

$-40\text{dB}/\text{dec}$

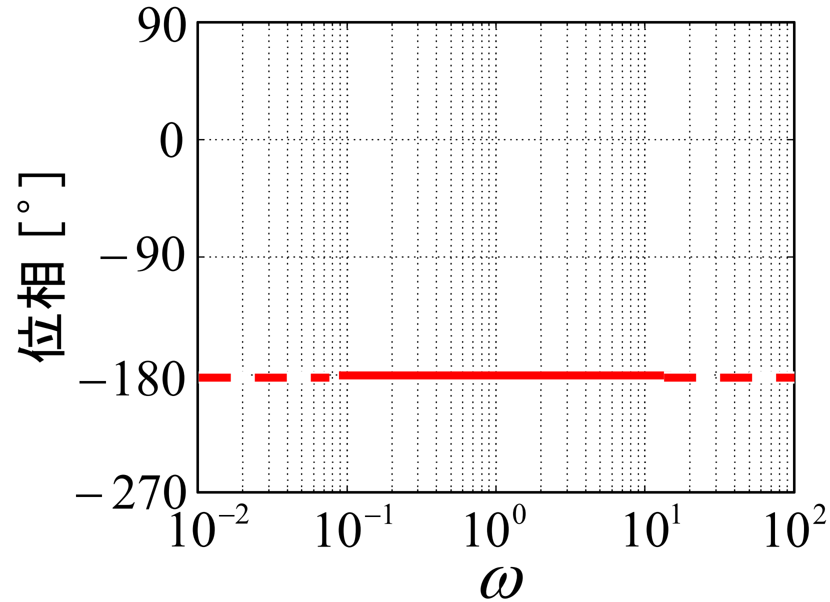
$$\Rightarrow \quad \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ$$

2 重積分系

2 次系(高周波域)



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

Hendrik W. Bode （1905－1982）

Bell System Technical Journal (1940)

Bodeによる代表的な著書

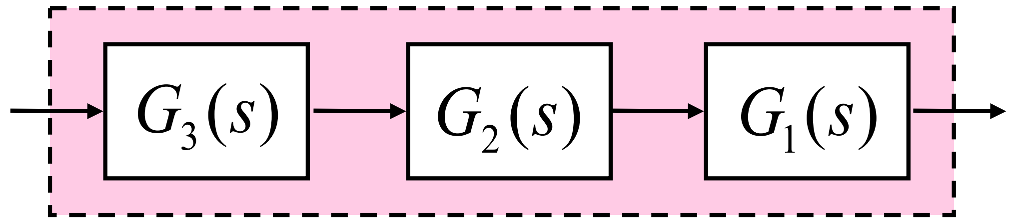
Network Analysis and Feedback Amplifier Design, 1945.

ボード線図の利点

［アイデア］ゲイン：対数スケール

位相：線形スケール

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$ （直列結合）



$$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

極形式で表示

$$G(j\omega)=re^{j\theta}$$

$$G_i(j\omega)=r_i e^{j\theta_i} \qquad (i=1\sim 3)$$

$$re^{j\theta}=(r_1e^{j\theta_1})(r_2e^{j\theta_2})(r_3e^{j\theta_3})$$

$$=r_1r_2r_3e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$r=r_1r_2r_3$$

$$\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3$$

$$G(j\omega) = re^{j\theta} = r_1 r_2 r_3 e^{j(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log r = 20\log(r_1 r_2 r_3)$$

$$= 20\log r_1 + 20\log r_2 + 20\log r_3$$

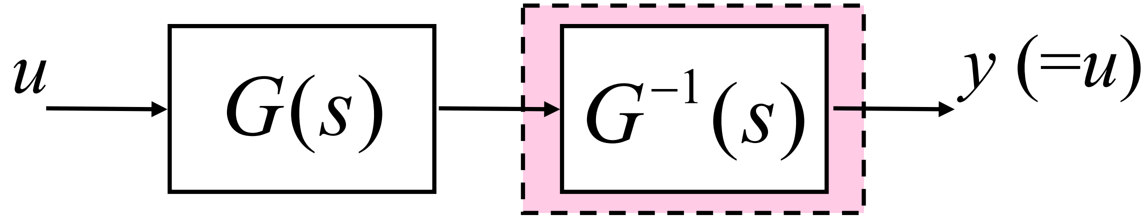
$$= \sum_{i=1}^{3} 20\log r_i = \sum_{i=1}^{3} 20\log|G_i(j\omega)|$$

$$\angle G(j\omega) = \theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \theta_i = \sum_{i=1}^{3} \angle G_i(j\omega)$$

直列結合のとき，ゲインと位相を単純に
加えあわせればよい

$G^{-1}(s)$（逆システム）のボード線図



ゲイン

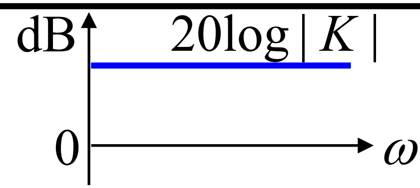
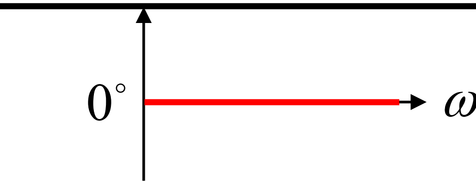
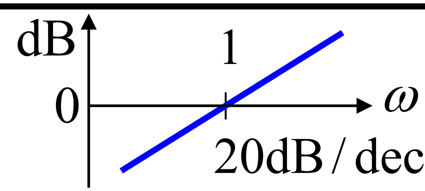
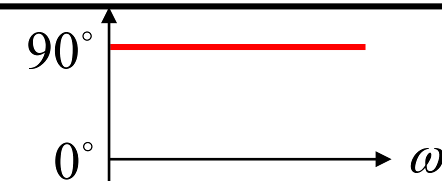
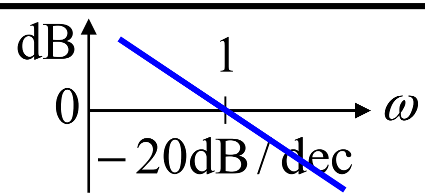
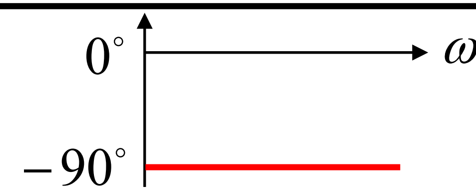
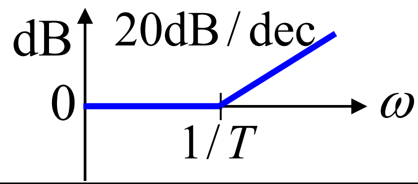
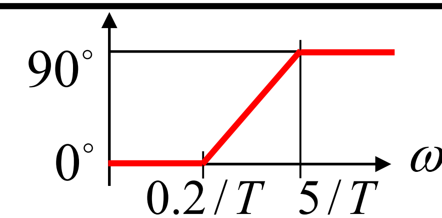
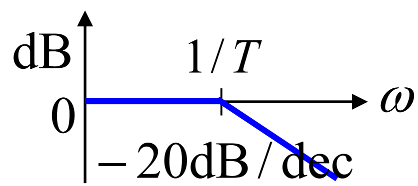
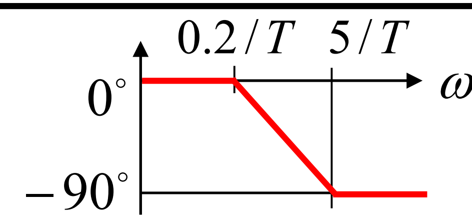
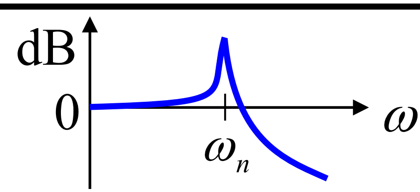
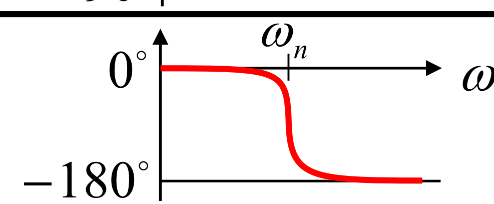
$$20\log\left|\frac{1}{G(j\omega)}\right| = -20\log|G(j\omega)|$$

位相

$$\angle\frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

逆システムでは，ゲインと位相の符号を反転

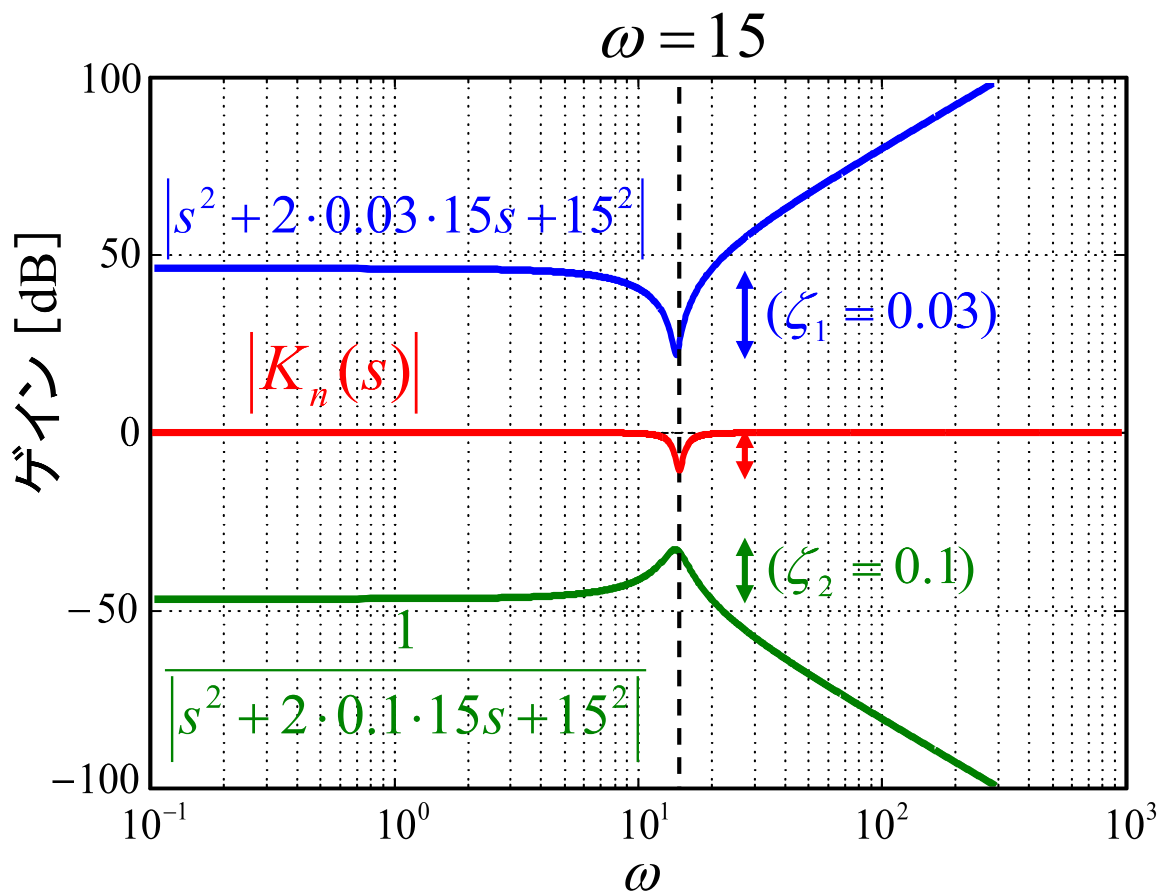
表 5.1　基本要素のボード線図

$G(s)$	ゲイン曲線	位相曲線
K		
s		
$\dfrac{1}{s}$		
$Ts+1$		
$\dfrac{1}{Ts+1}$		
$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$		

ノッチフィルタ

特定の周波数のゲインを下げる(上げる)フィルタ

$$K_n(s) = \frac{s^2 + 2\cdot 0.03 \cdot 15s + 15^2}{s^2 + 2\cdot 0.1 \cdot 15s + 15^2} \qquad \begin{array}{l} (\zeta_1 = 0.03) \\ (\zeta_2 = 0.1) \end{array}$$



K が変化しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega)=\frac{K}{1+j\omega T} \quad (T=1)$$

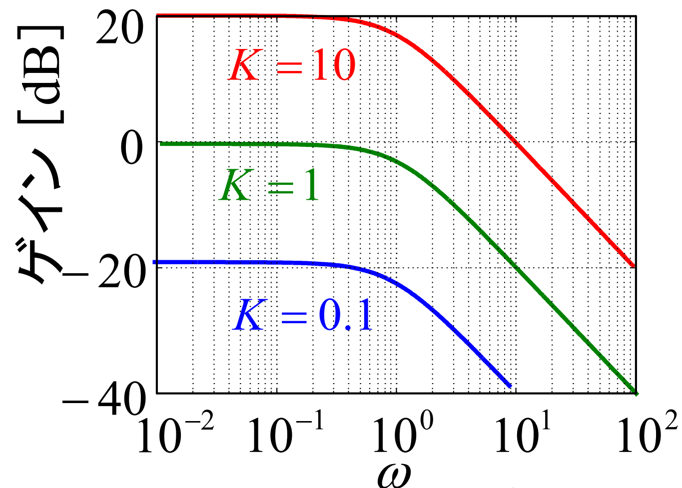
$K=10$

+40 [dB]
(×100)

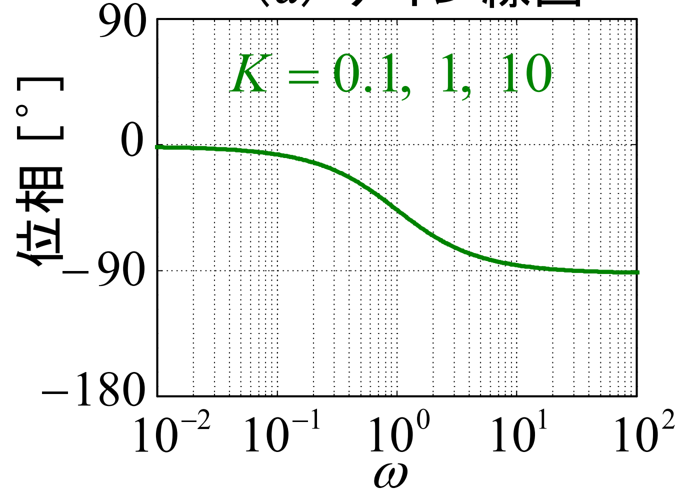
$K=1$

+20 [dB]
(×10)

$K=0.1$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

[例 5.1] （5章：pp. 102-103）

$$G(s)=\frac{100(s+1)}{s(s+10)}=G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$$

$$=10\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{0.1s+1}\cdot(s+1)$$

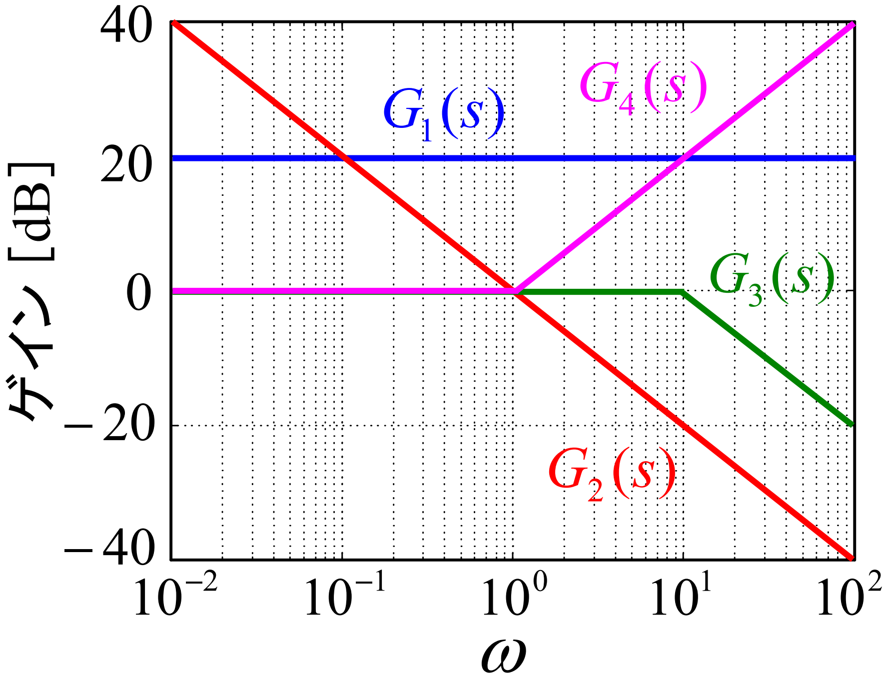


図 5. 12 各要素のゲイン線図（折れ線近似）

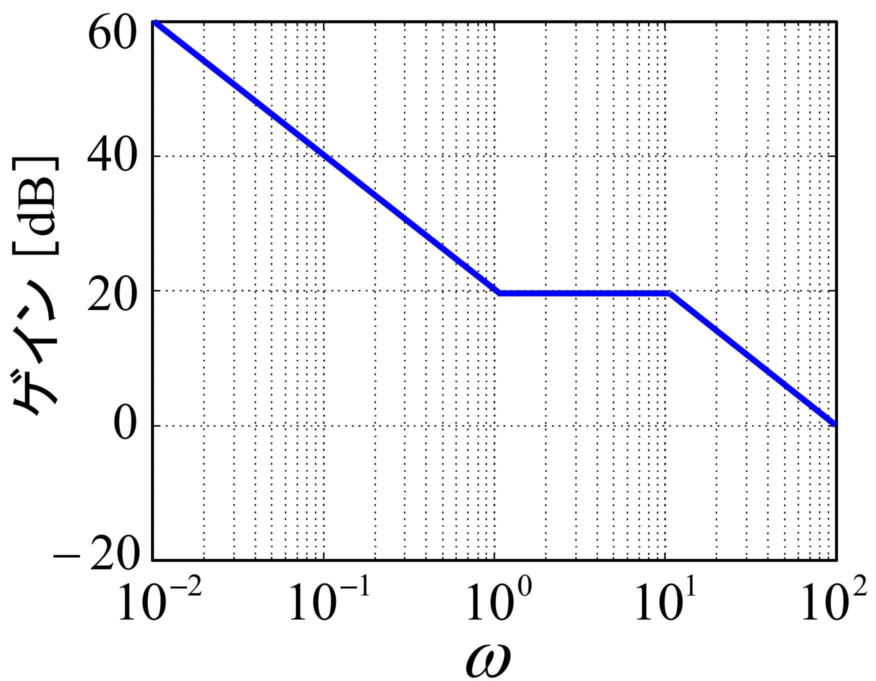
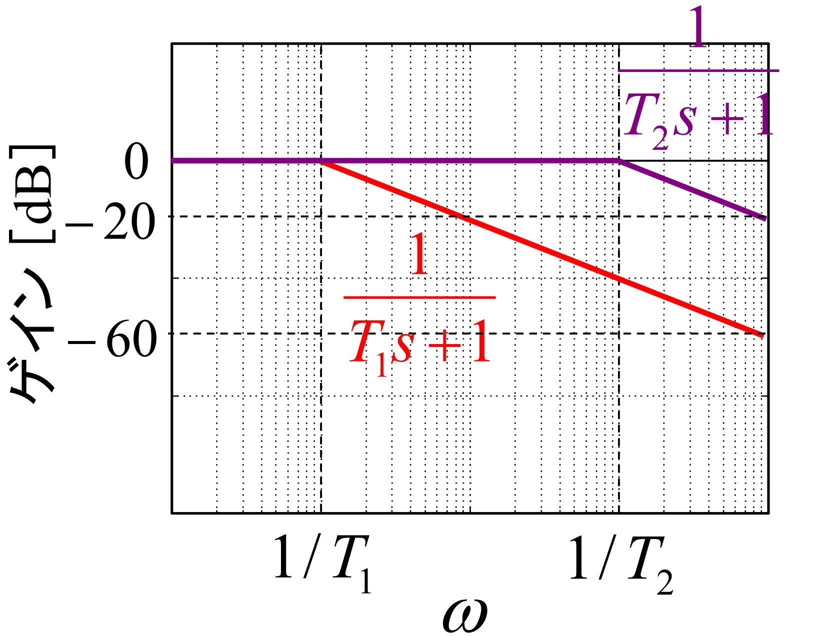
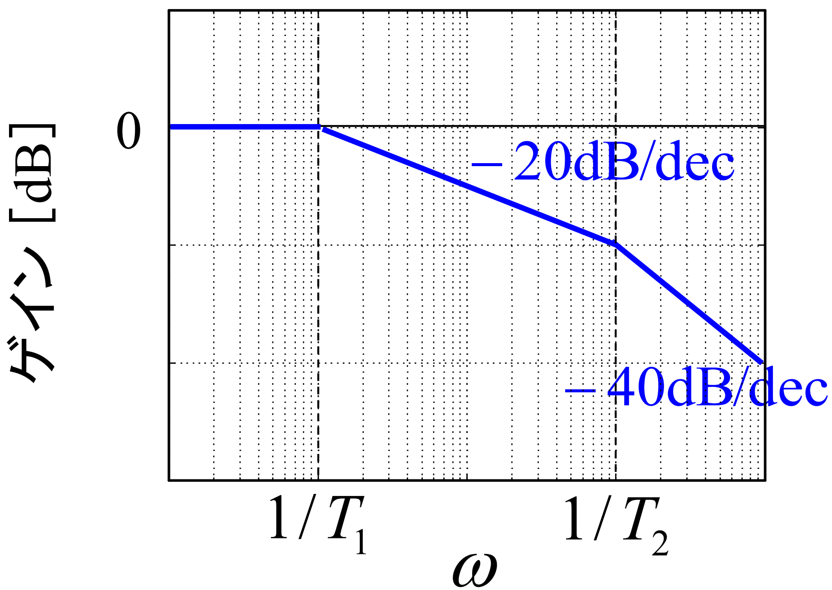


図 5. 13 $G(s)$のゲイン線図（折れ線近似）

2次遅れ $\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

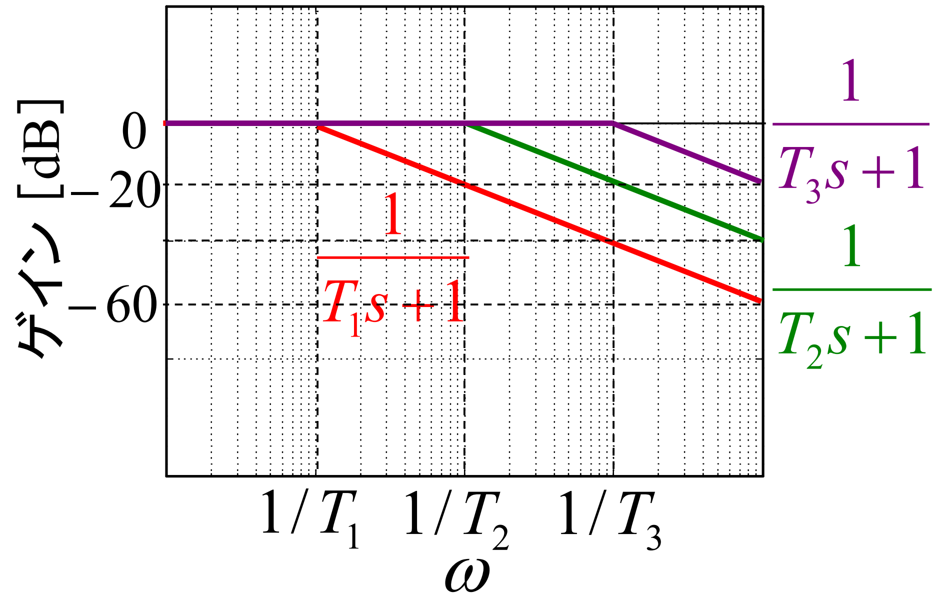
$(K=1)$

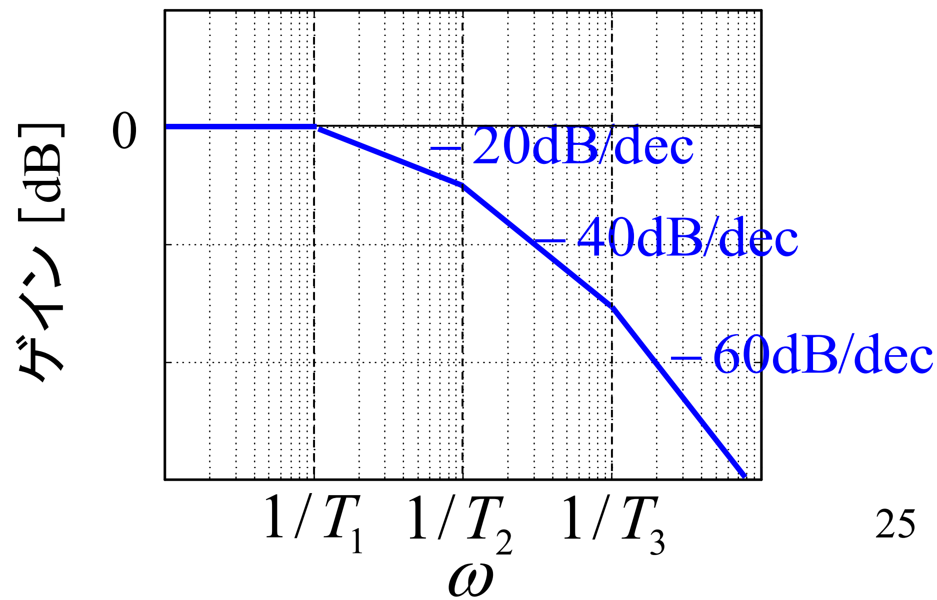




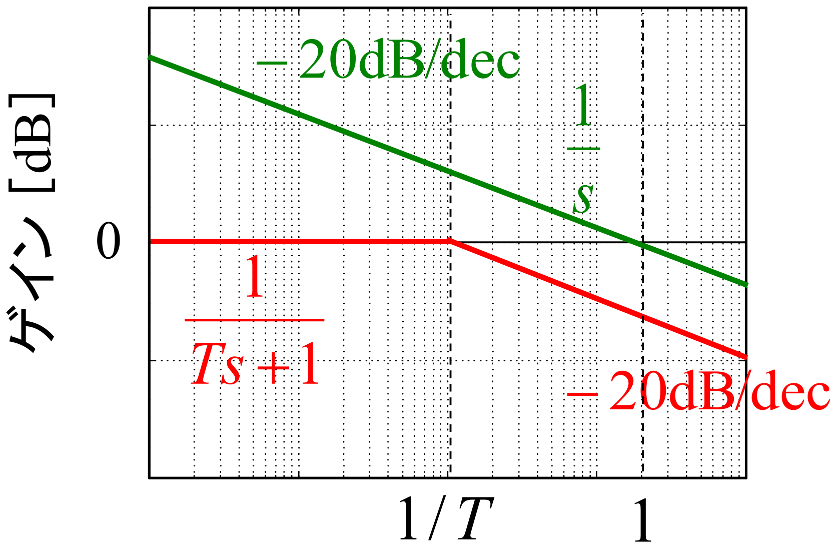
3次遅れ $\dfrac{1}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$

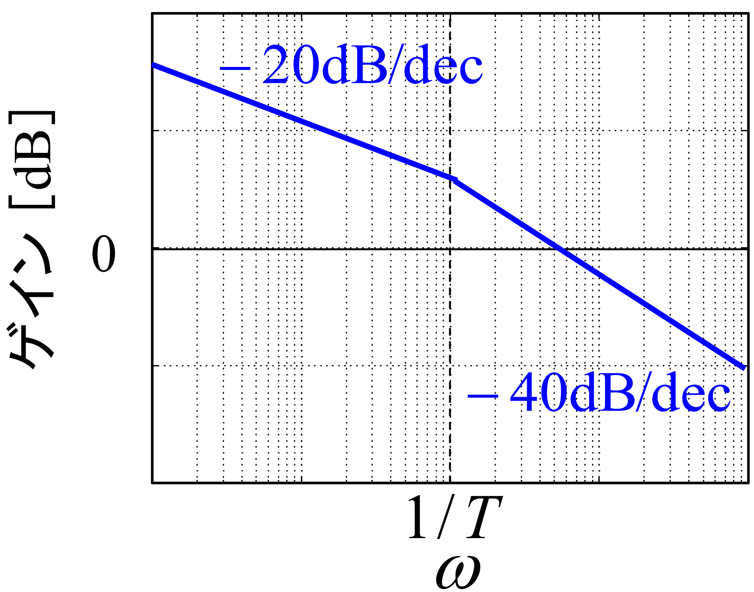
$(K=1)$



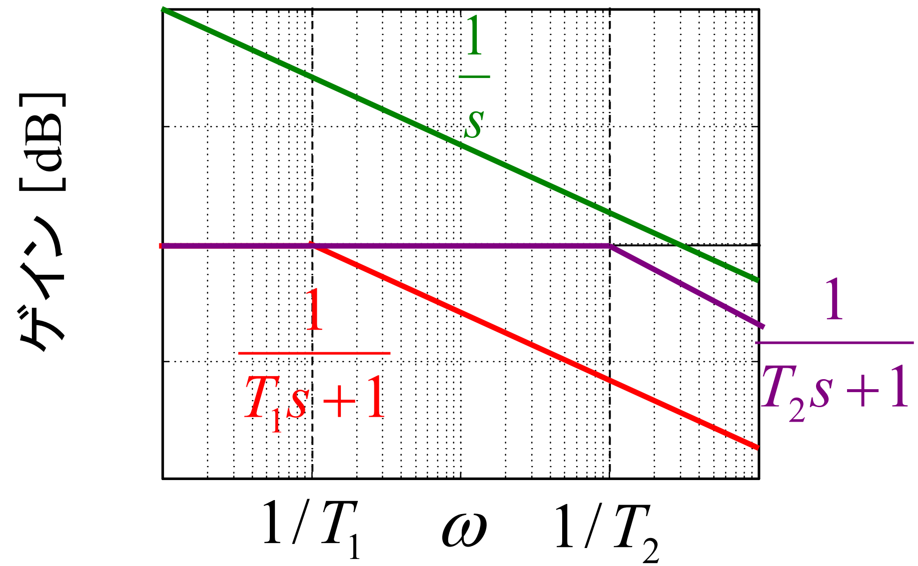


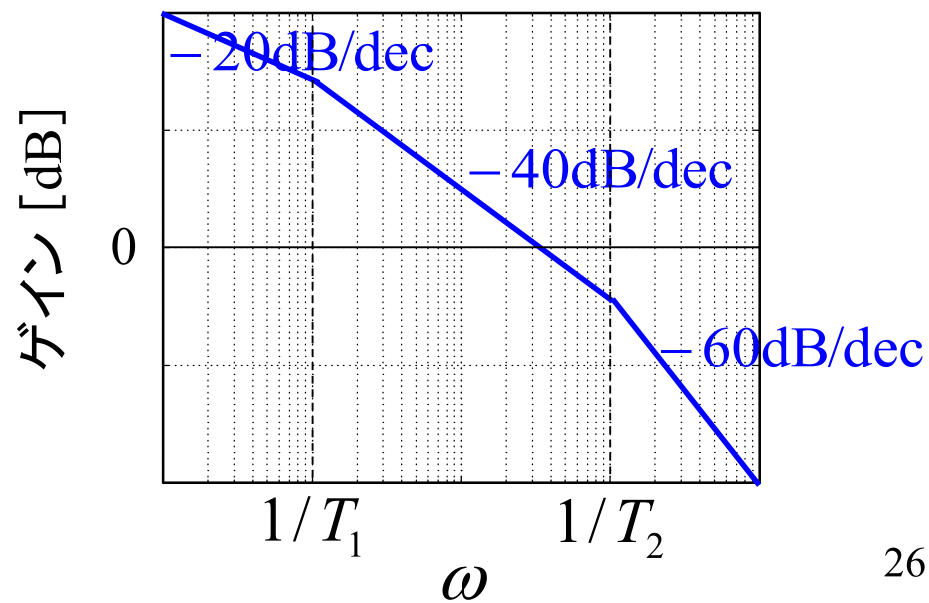
1次遅れ ＋ 積分 $\dfrac{1}{s(Ts+1)}$



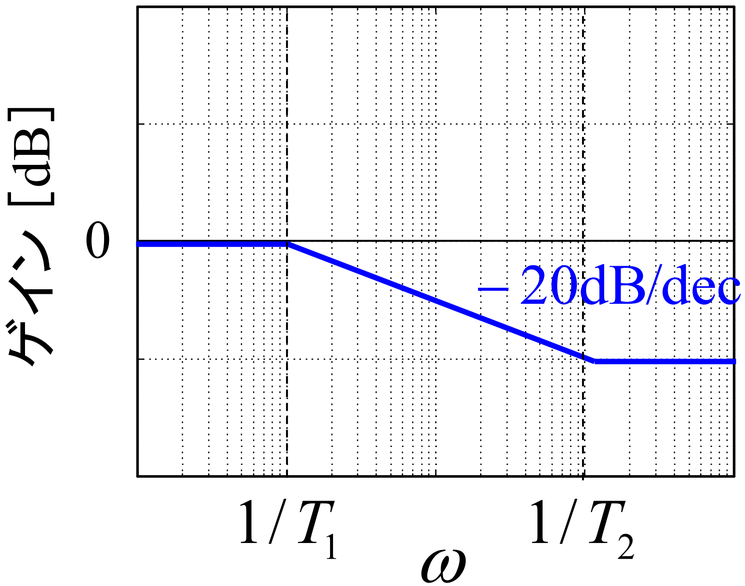


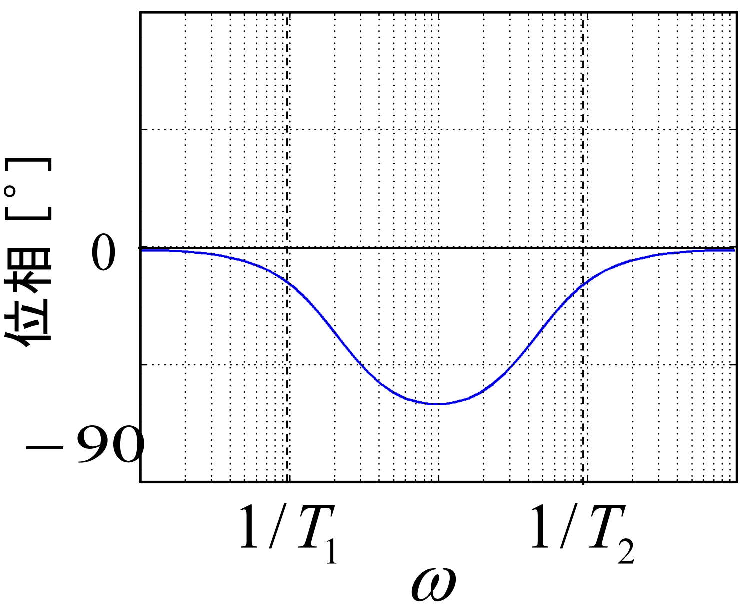
2次遅れ ＋ 積分 $\dfrac{1}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$



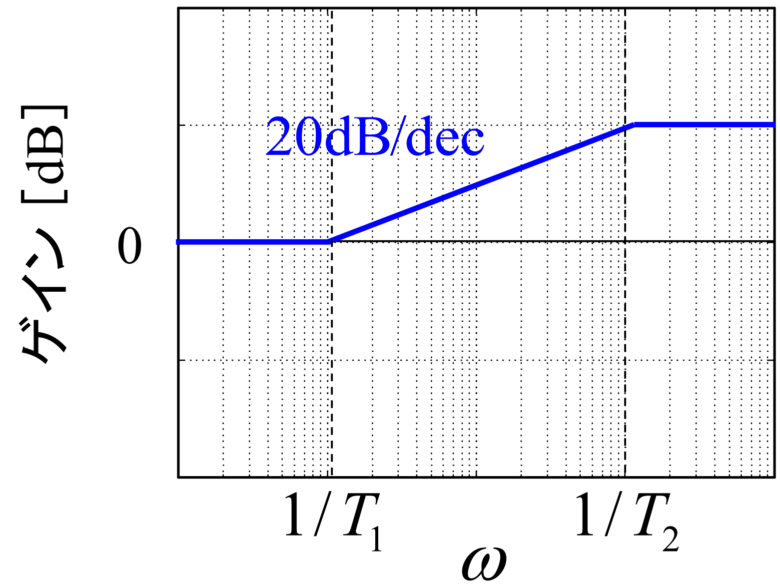


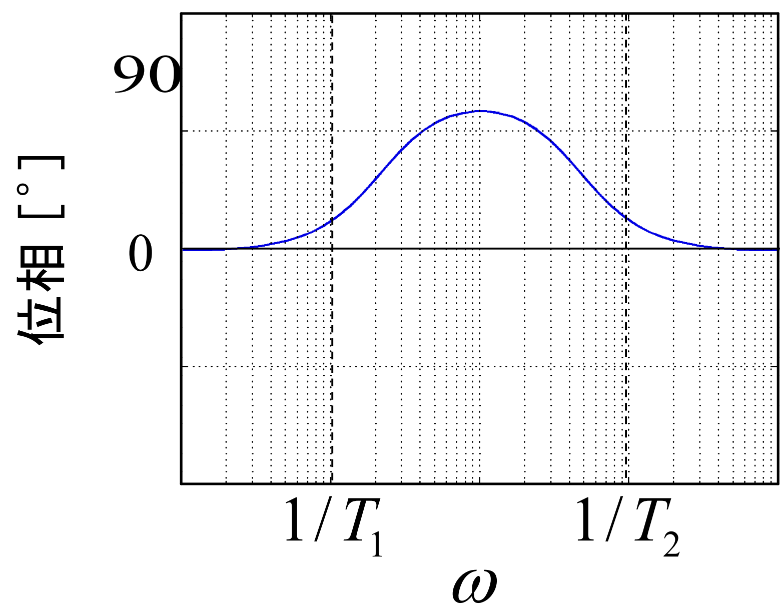
位相遅れ $\dfrac{T_2 s+1}{T_1 s+1}$ $T_1 > T_2 > 0$





位相進み $\dfrac{T_1 s+1}{T_2 s+1}$ $T_1 > T_2 > 0$





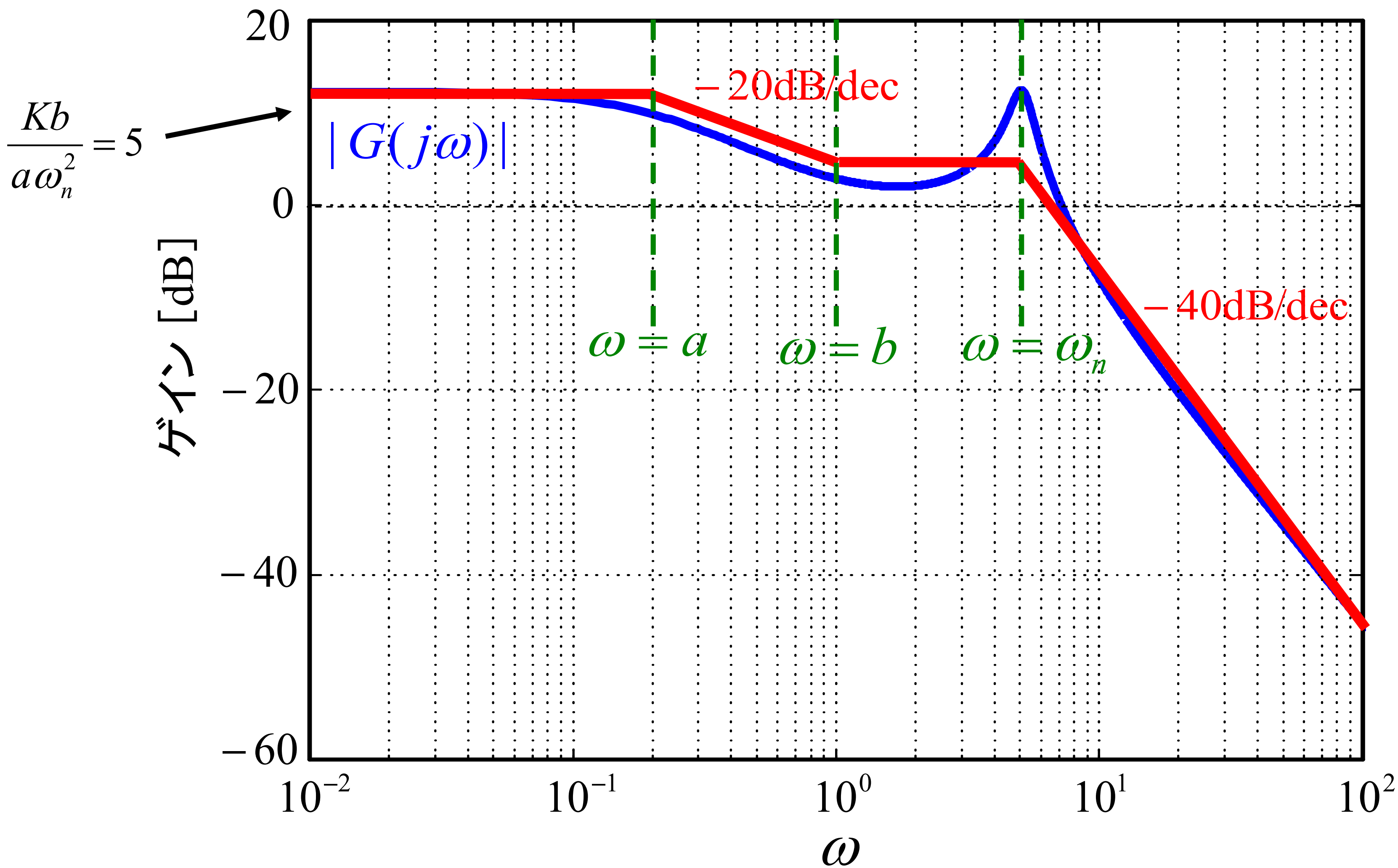
1次系 ＋ 2次系（ゲイン線図のみ）

$$G(s) = \frac{K(s+b)}{(s+a)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

$a = 0.2,\ b = 1$

$\omega_n = 5,\ \zeta = 0.1$

$K = 25$



ボード線図の利点

- システムを直列結合したもののボード線図は各システムのボード線図を単に加え合わせるだけで得られる.
- 折れ線近似が容易で, システムの概略特性を簡単に精度よく把握できる.
- 最小位相系では, ゲイン曲線から位相曲線の概略がわかる.
- 広い周波数帯域を1枚の図面で扱える.
- 実験データからボード線図を描くことも容易である.

第 5 章：周波数応答

5.3 ボード線図（pp. 94～98）

キーワード：ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

5.4 ボード線図の性質（pp. 98～104）

キーワード：最小位相系，ゲインー位相関係式

学習目標：ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができる．最小位相系におけるゲインと位相の関係について説明できる．

Reading Assignment #6

第 6 章 :フィードバック制御系の安定性

6.1 フィードバック系の内部安定性（pp. 106～110）

キーワード : 内部安定性, 特性多項式

6.2 ナイキストの安定判別法（pp. 110～115）

キーワード : ナイキストの安定判別法

学習目標 : フィードバック制御系の内部安定性について説明できる. ナイキストの安定判別法を理解し, フィードバック制御系の安定性を判定できる.