

フィードバック制御

2019年度 3Q

担当教員: 藤田政之 教授 (S5-303B)

第3回講義

10月3日(木) 13:20～15:50, S224講義室

第4章：フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性(pp. 75～76)

キーワード： 定常偏差

4.3 根軌跡(pp. 76～84)

キーワード： 特性方程式, 特性根, 根軌跡

第5章：周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数(pp. 87～90)

キーワード： 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標：定常偏差について説明できる. 根軌跡の基礎について説明できる. システムの周波数応答特性を説明できる.

定常偏差(復習)

偏差 $e(t) = r(t) - y(t)$

一巡伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$
(開ループ伝達関数)

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

(感度関数)

位置偏差定数

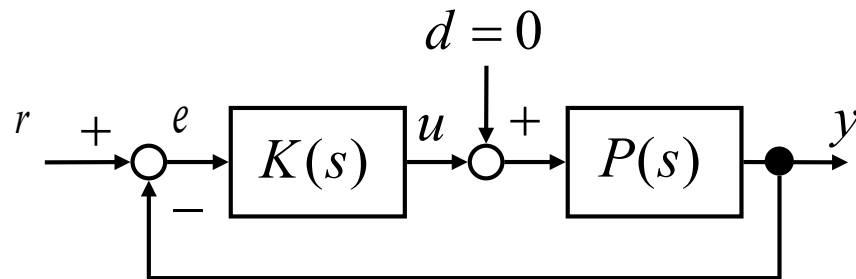
$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = L(0)$$

速度偏差定数

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s)$$

加速度偏差定数

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)$$



定常偏差 (安定なシステム)

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s) \end{aligned}$$

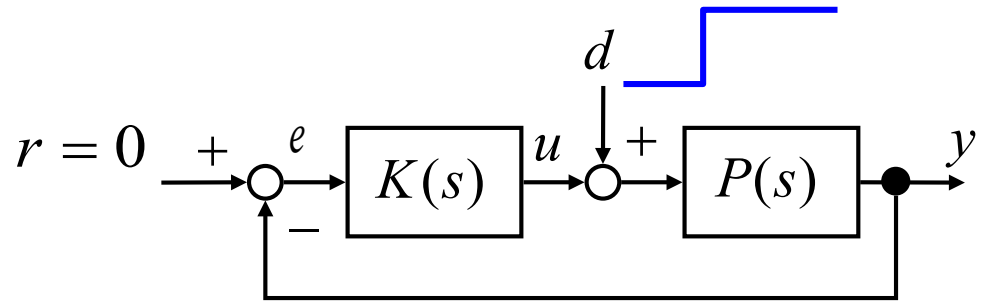
表4.1 制御系の型と定常偏差

制御系の型	$r(t) = 1$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
0 型	$\frac{1}{1 + K_p}$	∞	∞
1 型	0	$\frac{1}{K_v}$	∞
2 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

外乱に対する定常偏差 (目標値 $r = 0$)

$$e(s) = -y(s) = -\frac{P(s)}{1 + L(s)} d(s)$$

ステップ外乱 $d(s) = \frac{1}{s}$



定常偏差 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = -\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = -\frac{P(0)}{1 + L(0)}$
(安定なシステム)

$K(0) = \infty$ または $P(0) = 0$ ならば, 定常偏差 = 0

(実質的には)コントローラが積分器をもつことが重要

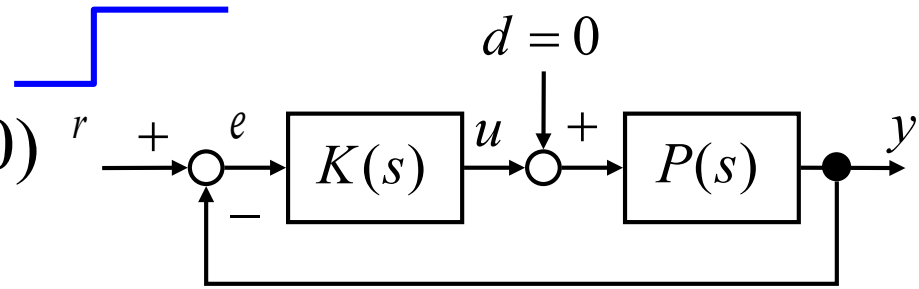
外乱の周波数成分 ($\omega = 0$) に対して, コントローラのゲインが無限大

[例 4.3] (復習)

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad K(s) = \frac{K_0}{s+1} \quad (K_0 > 0)$$

$$L(s) = P(s)K(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$$

1 型



位置偏差定数

$$K_p = L(0) = \infty$$

定常位置偏差

$$\begin{aligned} e_s &= \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} \\ &= \frac{1}{1 + L(0)} = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \end{aligned}$$

(K_0 の値に関係なく)

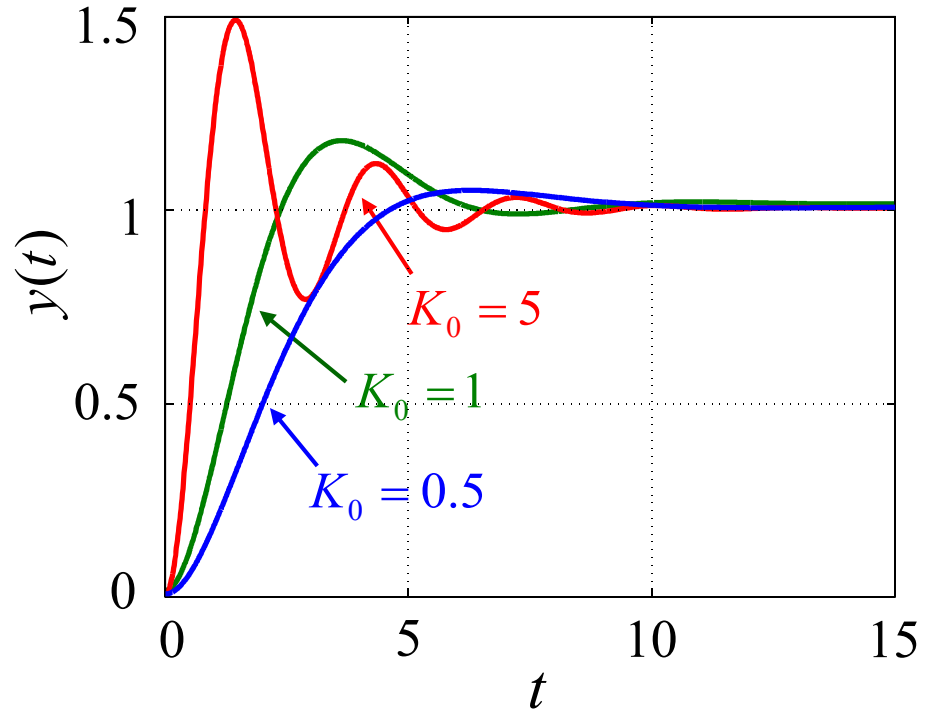
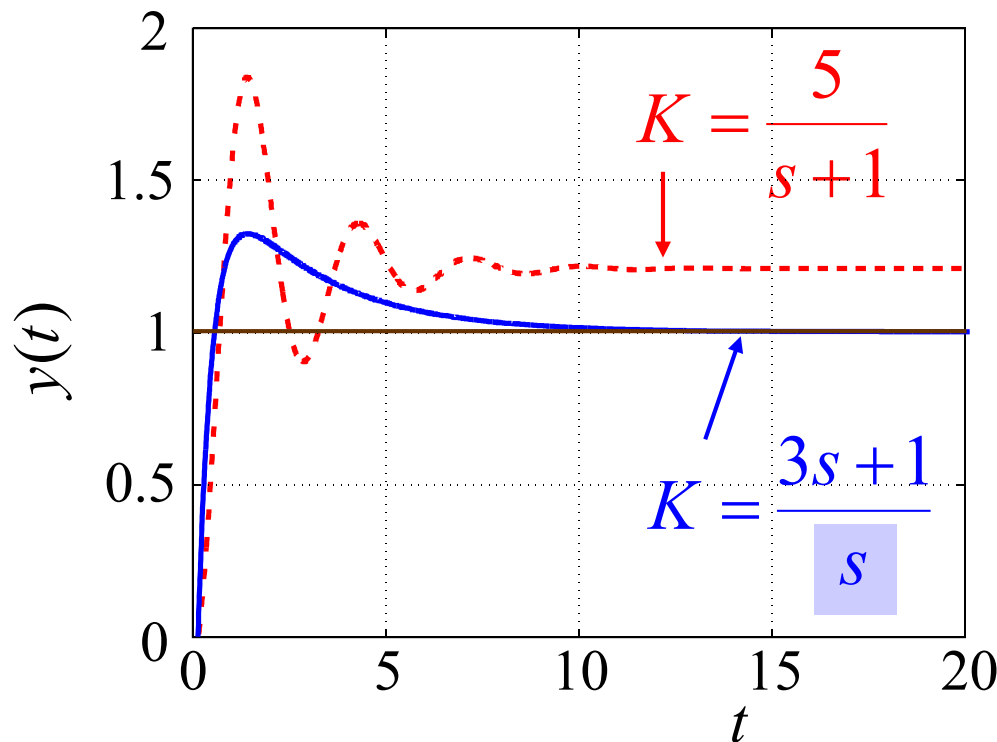
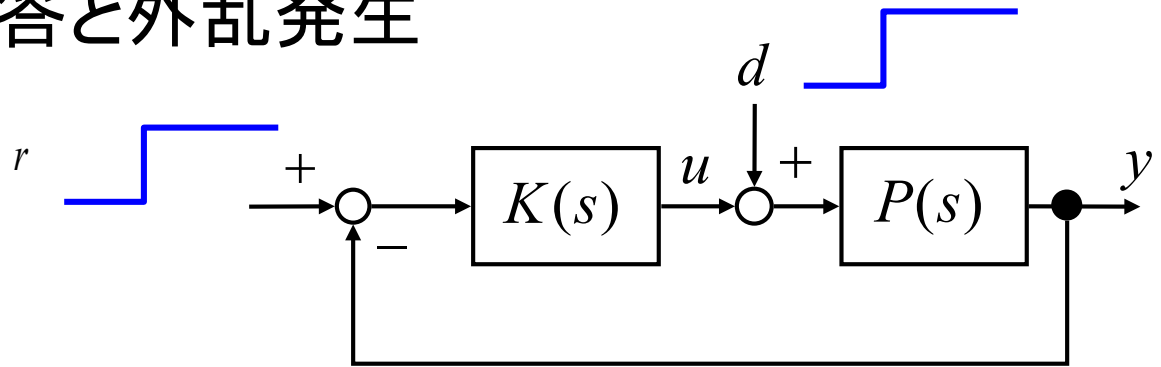


図4.4 (a) ステップ応答

[例 4.4] 目標値応答と外乱発生

$$P(s) = \frac{1}{s}, \quad d(s) = \frac{1}{s}$$



ステップ外乱が同時に
加わると定常偏差が残る

定常偏差をなくすには？

制御器に積分器 $K(s) = \frac{3s + 1}{s}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

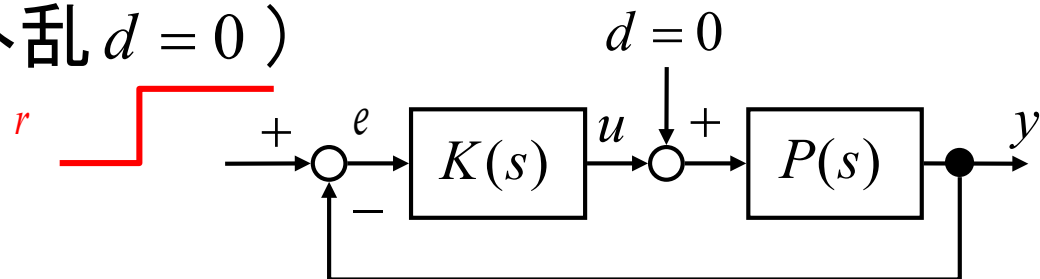
(安定なシステム)

図4.5 ステップ外乱が存在するときの目標値応答

目標値と外乱に対する定常偏差

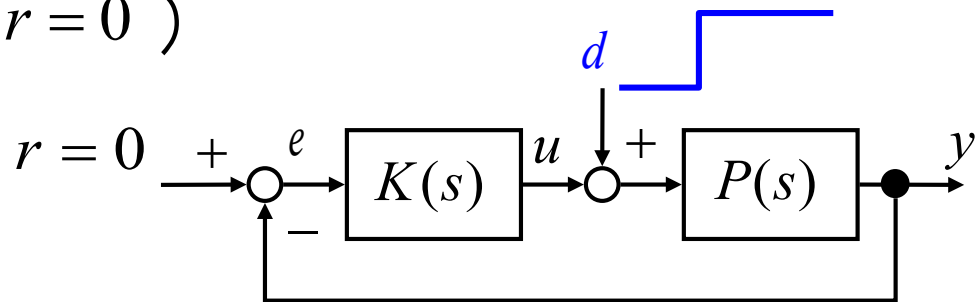
目標値に対する偏差（外乱 $d = 0$ ）

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$



外乱に対する偏差（目標値 $r = 0$ ）

$$e(s) = -\frac{P(s)}{1 + L(s)} d(s)$$

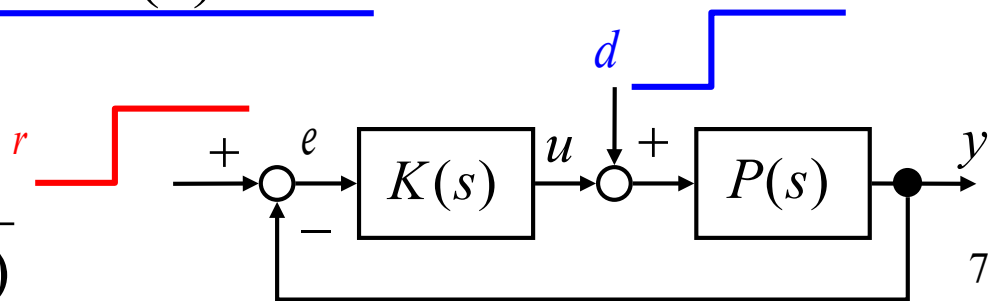


➡

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s) - \frac{P(s)}{1 + L(s)} d(s)$$

定常偏差（安定なシステム）

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + L(0)} - \frac{P(0)}{1 + L(0)}$$



4.3 根軌跡

K : 定数ゲイン(パラメータ)

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

閉ループ系の伝達関数

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}$$

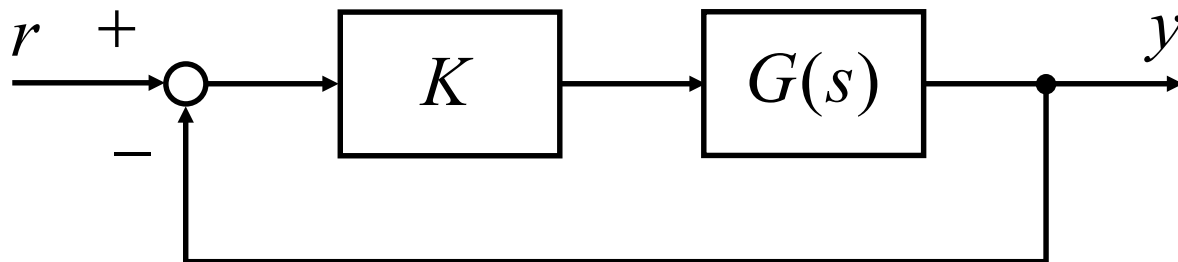
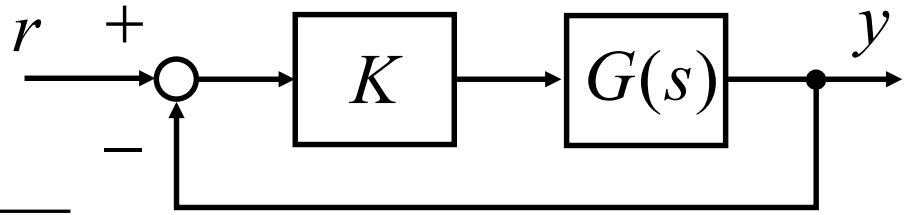


図 4.6 直結フィードバック制御系

閉ループ系の伝達関数

$$\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KN(s)}{D(s) + KN(s)}$$



閉ループ系の極

特性方程式

$$1 + KG(s) = 0 \quad \text{あるいは} \quad D(s) + KN(s) = 0$$

特性根

根軌跡

K を $0 \rightarrow \infty$ と変化させたとき, 特性根の位置を順次プロットしたもの

[例 4.5]

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \left[G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \right]$$

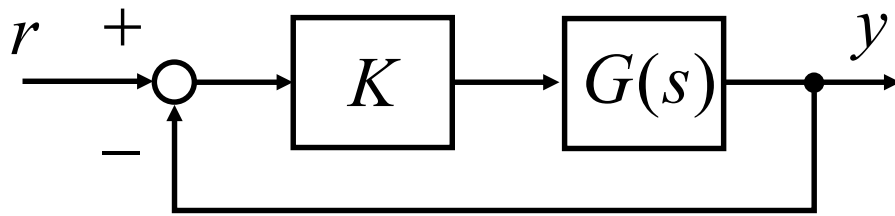


図 4.6 直結フィードバック制御系

$$D(s) + KN(s) = s(s+2) + K \cdot 1$$

$$= s^2 + 2s + K = 0$$

× : 極
○ : 零点

矢印 : K が増大
する方向

$$K = 0 \quad s = 0, -2 \quad (2 \text{ 実根})$$

$$0 < K < 1 \quad s = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

(2 実根)

$$K = 1 \quad s = -1 \quad (\text{重根})$$

$$K > 1 \quad s = -1 \pm \sqrt{K-1}j$$

(複素共役根)

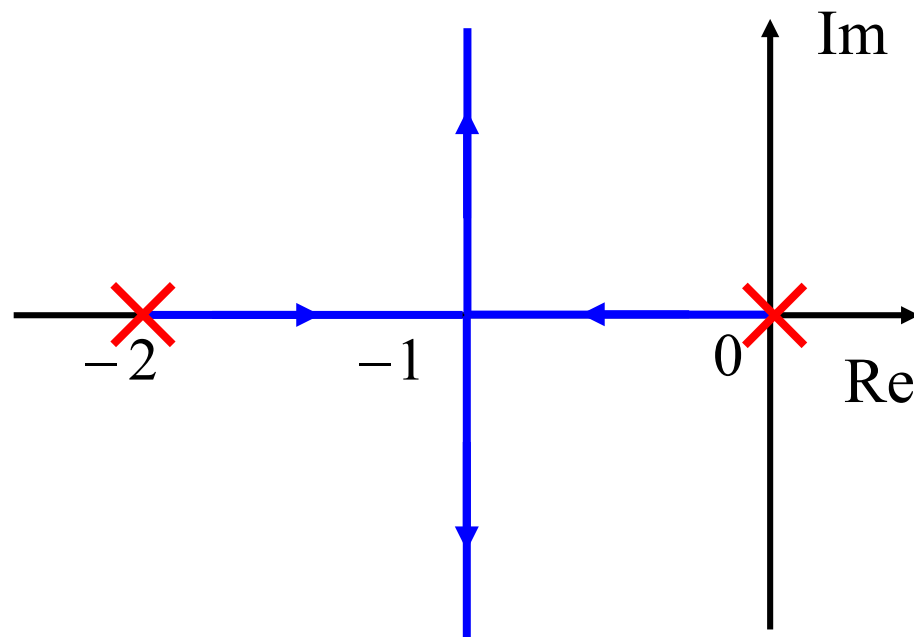


図 4.7 2 次系の根軌跡¹⁰

根軌跡の性質

[性質1]

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

根軌跡は $G(s)$ の極 p_i ($i = 1 \sim n$) から出発し, その中で m 本の軌跡の終点は $G(s)$ の零点 z_i ($i = 1 \sim m$) であり, 残りの $n - m$ 本の軌跡は無限遠点に発散していく.

[性質1] について

根軌跡(の一部)は, $G(s)$ の零点 z_i ($i = 1 \sim m$) へ向かう

$$1 + KG(s) = 0 \quad \text{より} \quad G(s) = -\frac{1}{K} \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow \infty)$$

根軌跡の性質

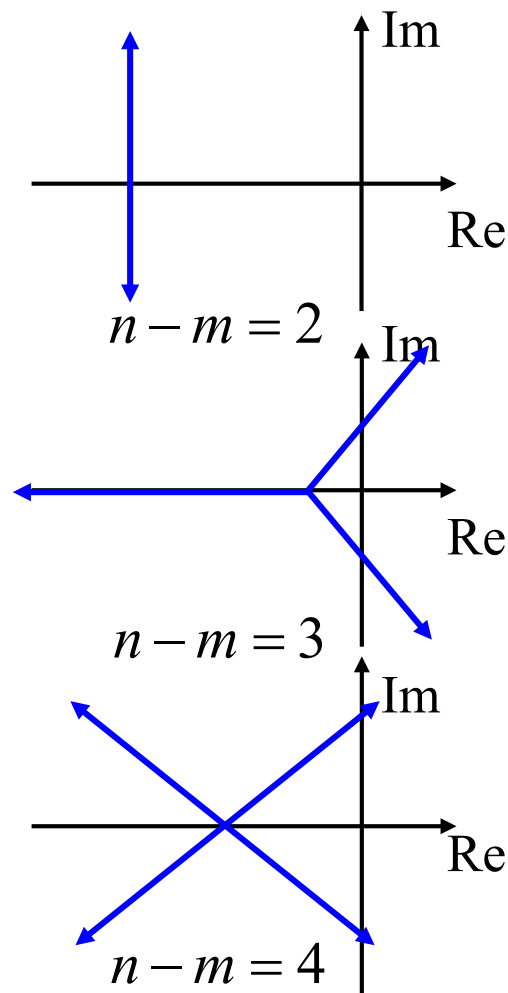
[性質2]

無限遠点に至る根軌跡の漸近線の角度は

$$\frac{180^\circ + 360^\circ l}{n - m} \quad l: \text{任意定数}$$

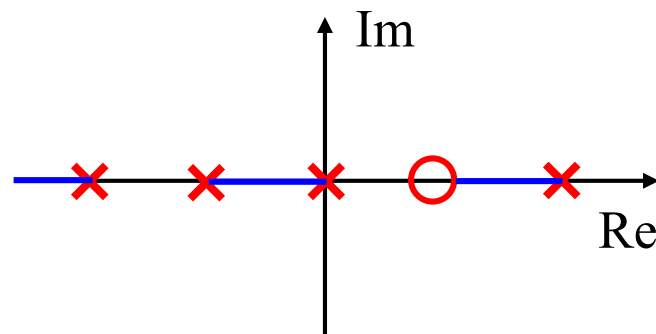
また, $n - m \geq 2$ のとき漸近線と実軸は交点を1つ持ち, その座標は

$$\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n - m}$$



[性質3]

実軸上の点で, その右側に $G(s)$ の実極と実零点が(重複度を含め)合計奇数個あれば, その点は根軌跡上の点である.



[性質4]

根軌跡が実軸から分岐(または合流)する点は,

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{G(s)} = 0$$

を満たす.

× : 極
○ : 零点

[性質5]

複素極 p_j から根軌跡が出発する角度は

$$180^\circ - \sum_{i \neq j} \angle(p_j - p_i) + \sum_{i=1}^m \angle(p_j - z_i)$$

であり, 複素零点 z_j へ根軌跡が終端する角度は

$$180^\circ + \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) - \sum_{i \neq j} \angle(z_j - z_i)$$

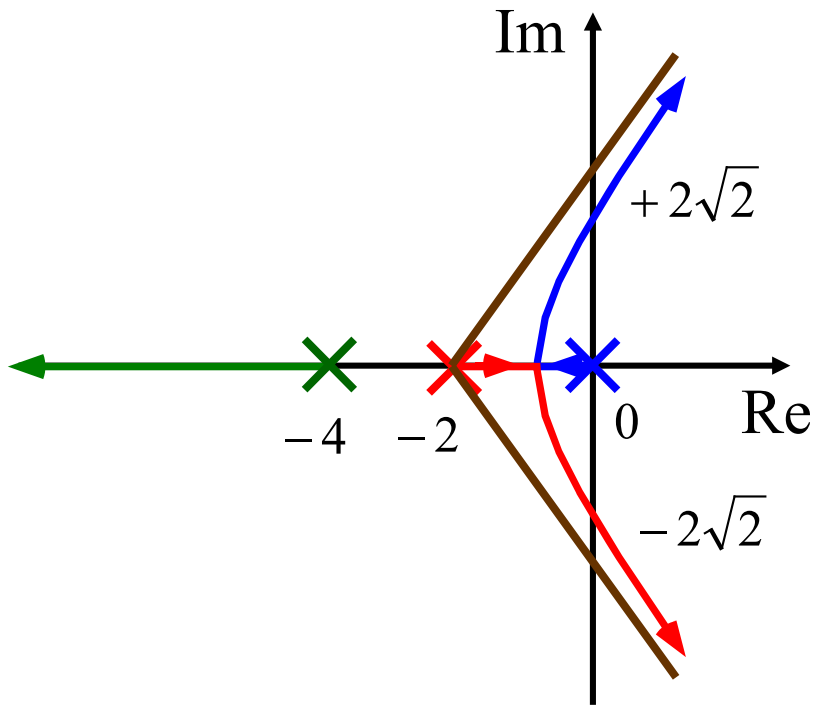


図 4.10 $G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$
のときの根軌跡

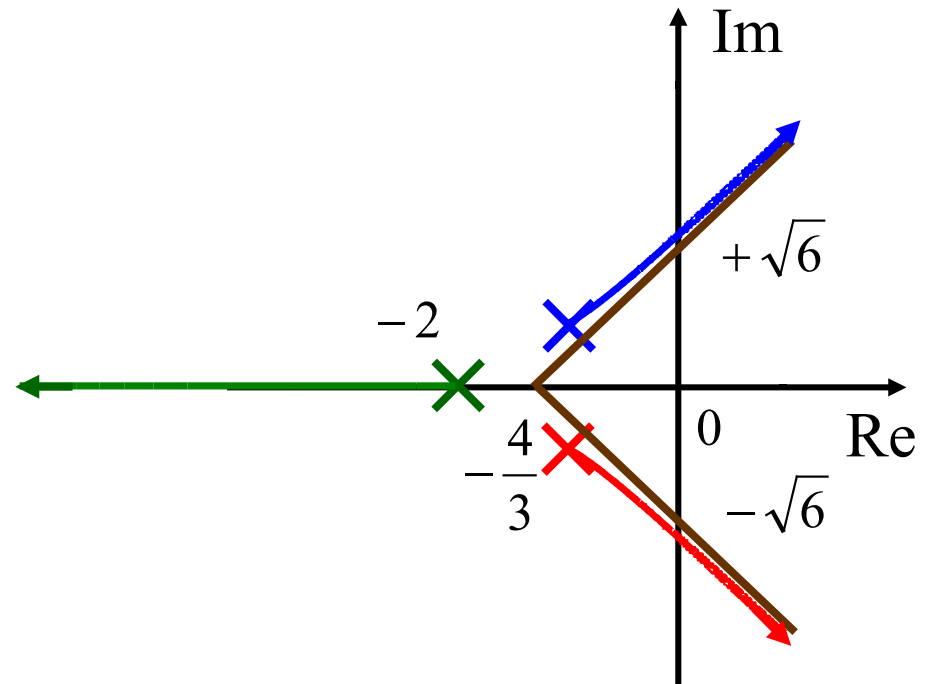
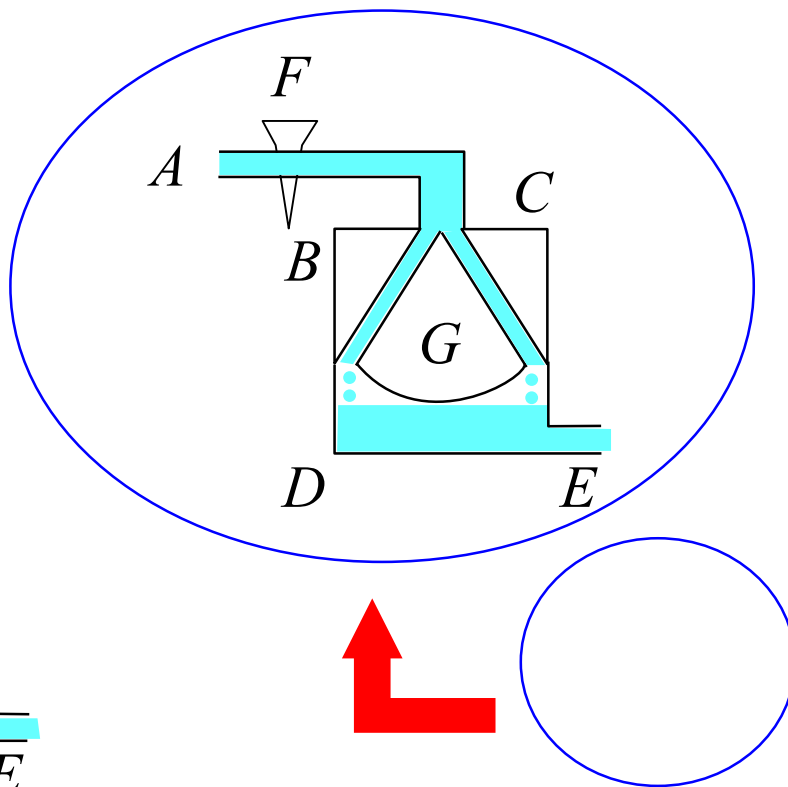
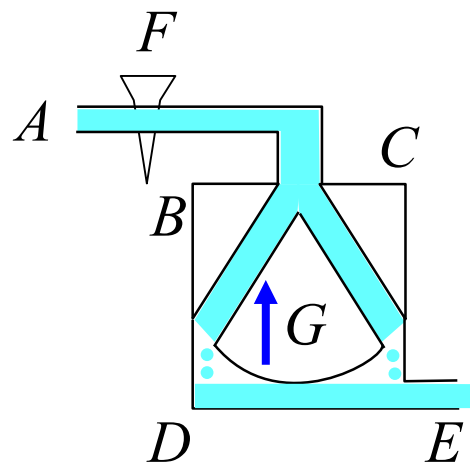
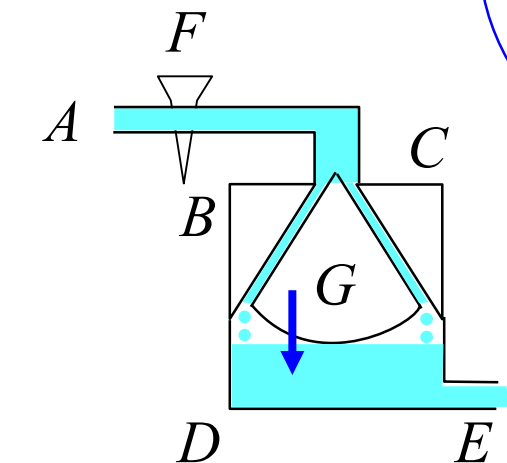


図 4.11 $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)}$
のときの根軌跡

古代の水時計



クテシビオスの水時計
(紀元前3世紀)

ワットの调速器(governor)ー 1788

中立状態

蒸気 エンジン 出力一定

蒸気
スロットル

出力軸
高速回転状態 フライトホイール

出力低下

閉まる

低速回転状態 蒸気が少なくなる

出力上昇

開く

蒸気が多くなる

James Watt
(1736～1819)

富岡製糸場の蒸気機関 — 1872

「自動制御とは何か」
示村悦二郎

明治村のレプリカ

2016年に復元された
蒸気機関

Click !

第 5 章 : 周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数

線形システム (安定な LTI システム)

(一定周波数の) 正弦波を入力として加え続けると, 定常状態ではその出力も入力と同じ周波数の正弦波になる.

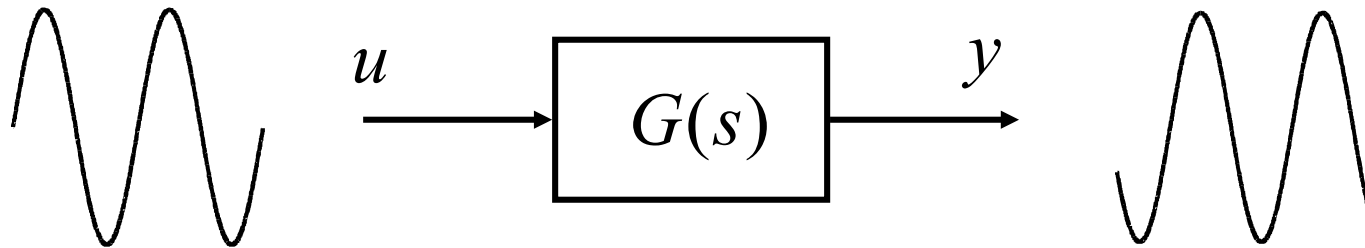


図 5.1 周波数応答

[例] $G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1} \quad u(t) = \sin \omega t, \omega = 1 \text{ rad/s}$

入力と出力は同じ周波数, 異なるのは振幅と位相だけ

(静的システム: 振幅だけ, 動的システム: 振幅と位相)

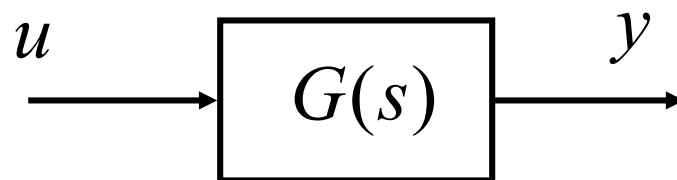
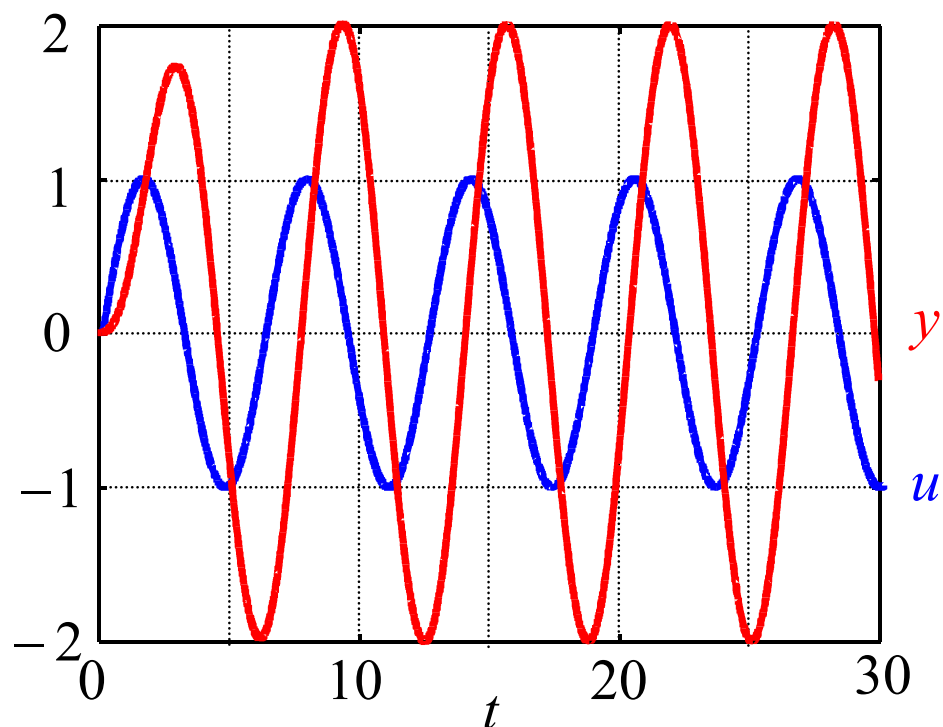
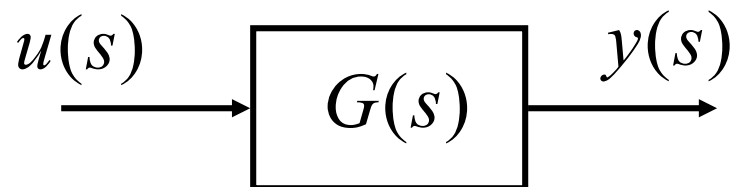


図 5.2 正弦波入力に対する応答例

周波数特性

入力の周波数を変化させた ($\omega: 0 \sim \infty$) とき
振幅と位相がどのように変化するか

伝達関数 $G(s)$



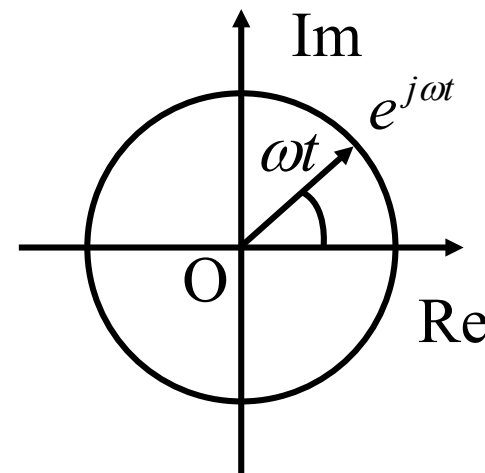
極 $p_i (i = 1 \sim n)$ は安定 ($\text{Re}[p_i] < 0$) , すべて異なる.

(仮想的な)複素数の入力 (複素正弦波)

$$u(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\left[\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s + a} \quad (\text{p. 192 参照}) \right]$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s - j\omega}$$

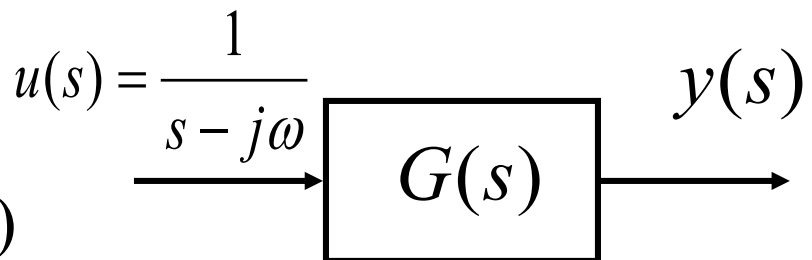


出力

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s - j\omega} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \right]$$

$$= K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

$G(s)$ の安定性より $e^{p_i t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$



$$Y(s) = \sum_i \frac{Y_i}{s - \alpha_i}$$

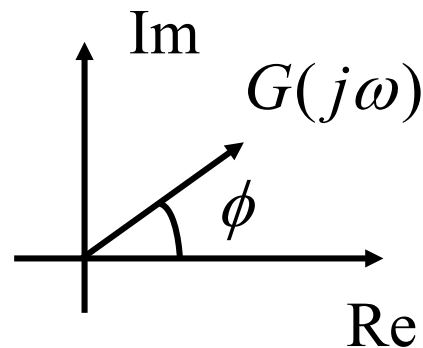
$$Y_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i) Y(s) \quad (\text{留数})$$

よって

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \left[G(s) \frac{1}{s - j\omega} \right]$$

$$= G(j\omega)$$

$$= |G(j\omega)| e^{j\phi} \quad \phi = \angle G(j\omega)$$



$$y(t) = \underbrace{K_0 e^{j\omega t}}_{G(j\omega)} + \sum_{i=1}^n K_i \underbrace{e^{p_i t}}_{e^{p_i t} \rightarrow 0}$$

$$y(t) = G(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$= |G(j\omega)| e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= |G(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi)$$

$$+ j |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\begin{cases} y(t) = K_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \\ e^{p_i t} \rightarrow 0 \\ K_0 = G(j\omega) \end{cases}$$

入力	出力
$\cos \omega t$	$ G(j\omega) \cos(\omega t + \phi)$
$\sin \omega t$	$ G(j\omega) \sin(\omega t + \phi)$

振幅の変化 $|G(j\omega)|$ ゲイン

位相の差 $\angle G(j\omega)$ 位相(位相差)

[例]

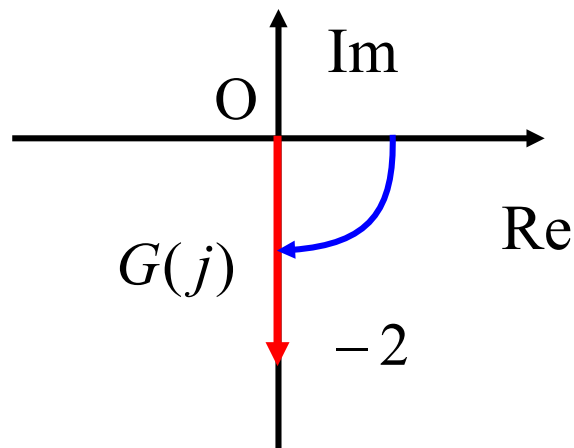
$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1} \quad u(t) = \sin t \quad (\omega = 1)$$

ゲイン

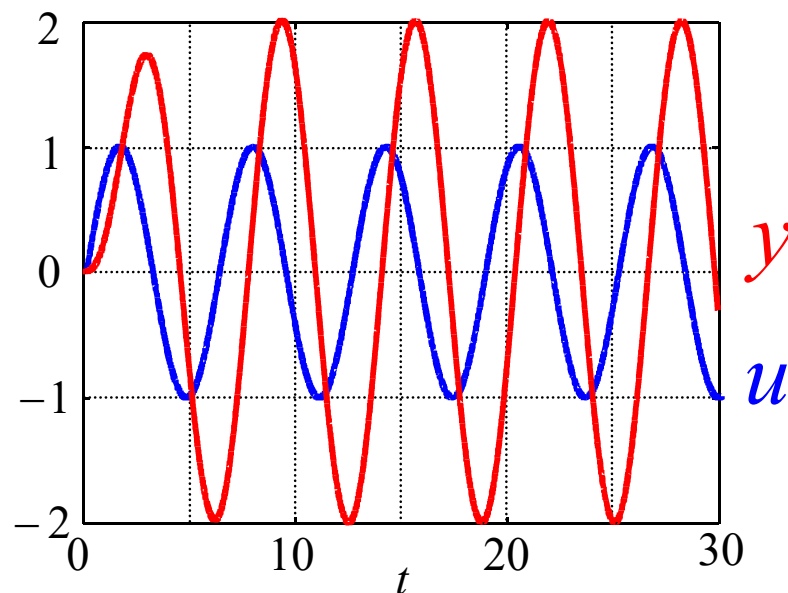
$$|G(j)| = \left| \frac{2}{j^2 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{-1 + j + 1} \right| = \left| \frac{2}{j} \right| = 2$$

位相

$$\angle G(j) = \angle \frac{2}{j} = \angle \frac{2}{j} \cdot \frac{j}{j} = \angle \frac{2j}{-1} = \angle -2j = -90^\circ$$



複素平面上のベクトル $G(j)$

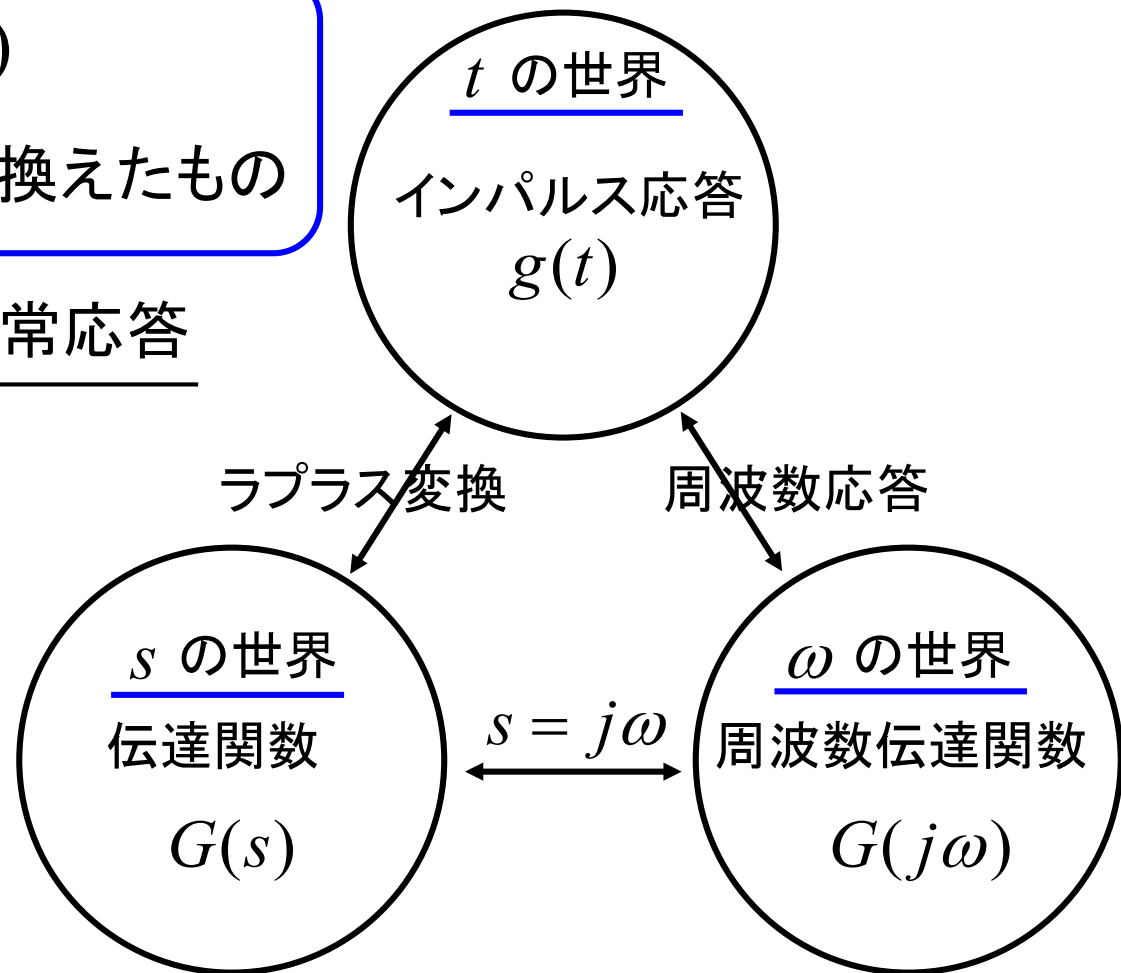


周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えたもの

$$G(j\omega) = \frac{e^{j\omega t} \text{ に対する定常応答}}{e^{j\omega t}}$$

$$y(j\omega) = G(j\omega)u(j\omega)$$



- 実用的な制御系の解析・設計に役立つ.
- 実験的に測定し, 求めることができる.
- 不安定系でも(形式的に)定義できる.

第4章：フィードバック制御系の特性



4.2 定常特性 (pp. 75～76)

キーワード： 定常偏差



4.3 根軌跡 (pp. 76～84)

キーワード： 特性方程式, 特性根, 根軌跡

第5章：周波数応答



5.1 周波数応答と伝達関数 (pp. 87～90)

キーワード： 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標：定常偏差について説明できる. 根軌跡の基礎について説明できる. システムの周波数応答特性を説明できる.

Reading Assignment #4

第 5 章 : 周波数応答

5.2 ベクトル軌跡 (pp. 90～94)

キーワード : ベクトル軌跡

5.3 ボード線図 (pp. 94～98)

キーワード : ボード線図, ゲイン曲線, 位相曲線

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができる.

ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができる.