

# フィードバック制御

2019年度 3Q

担当教員: 藤田政之 教授 (S5-303B)

第6回講義

10月21日(月) 13:20~15:50, S224講義室

# 第6章：フィードバック制御系の安定性

## 6.1 フィードバック系の内部安定性 (pp. 106-110)

**キーワード**：内部安定性, 特性多項式

## 6.2 ナイキストの安定判別法 (pp. 110-115)

**キーワード**：ナイキストの安定判別法

**学習目標**：フィードバック制御系の内部安定性について説明できる。ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できる。

## 6.1 フィードバック系の内部安定性

$P(s)$  : 厳密にプロパー ( $P(\infty) = 0$ )

分母の次数が分子の次数より大きい

$K(s)$  : プロパー ( $|K(\infty)| < \infty$ )

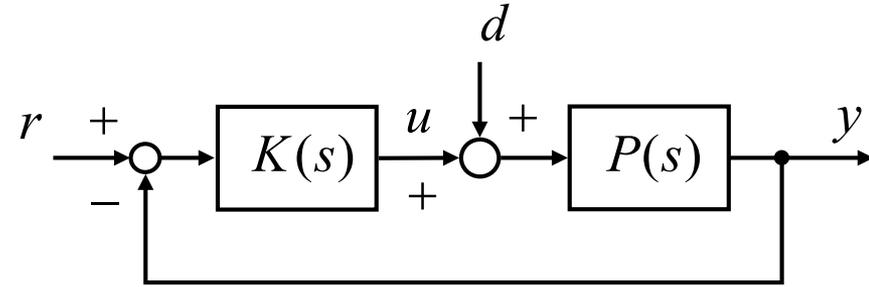


図 6.1 フィードバック制御系

[ 例 6.1 ] 不安定な極零相殺

$$P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad K(s) = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$$

$$P(s)K(s) = \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s} = \frac{1}{s}$$

$d = 0$  のとき

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \cdot r(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \cdot r(s) = \frac{1}{\underline{s+1}} \cdot r(s)$$

安定？

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow (s-1)y(s) = u(s)$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

初期値  $y_0 \neq 0$  を考慮

$$(sy(s) - y_0) - y(s) = u(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{s-1}u(s) + \frac{1}{s-1}y_0$$

$$u(s) = K(s)(r(s) - y(s)), \quad K(s) = \frac{s-1}{s} \text{ より}$$

$$y(s) = \frac{1}{\cancel{s-1}} \cdot \frac{\cancel{s-1}}{s} (r(s) - y(s)) + \frac{1}{s-1} y_0$$

$$(s+1)y(s) = r(s) + \frac{s}{s-1} y_0$$

$$y(s) = \frac{1}{s+1} r(s) + \frac{s}{(s+1)(s-1)} y_0$$

不安定

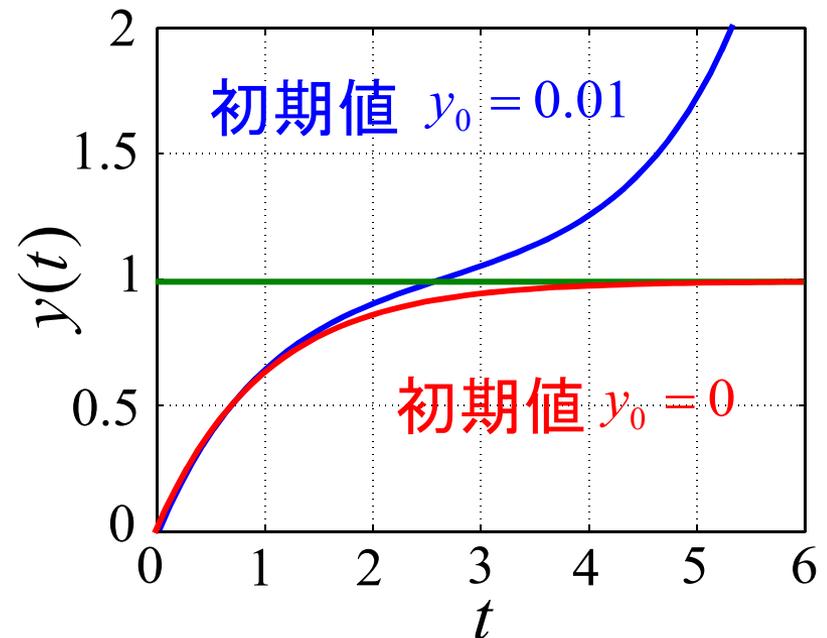
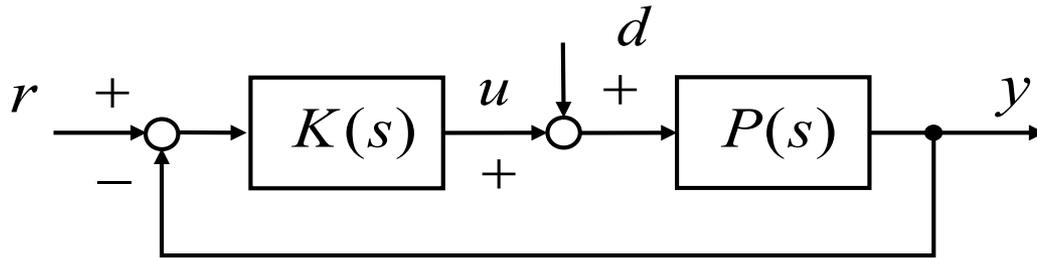


図 6.2 ステップ応答例

# 内部安定性

外部から加わる信号  $\{r(s), d(s)\}$  から各要素の  
出力  $\{u(s), y(s)\}$  への4つの伝達関数がすべて安定



$G_{yr}$  だけでは不十分

## Gang of Four

$$G_{ur}(s) = \frac{K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{ud}(s) = \frac{-P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)K(s)}$$

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \quad \text{既約}$$

$$G_{ur} = \frac{D_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \quad G_{ud} = \frac{-N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$$

$$G_{yr} = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)} \quad G_{yd} = \frac{N_P(s)D_K(s)}{\phi(s)}$$

$$\underline{\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}$$

特性多項式

[ 定理 ] (内部安定性の必要十分条件)

特性多項式

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s) = 0$$

のすべての根の実部が負

[ 例 6.1 ]

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$

$$P(s) = \frac{1}{s-1} \quad K(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$\phi(s) = (s-1) \cdot s + 1 \cdot (s-1) = \underline{(s-1)(s+1)} = 0$$

不安定

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = \frac{\cancel{s-1}}{(\cancel{s-1})(s+1)}$$

不安定な極零相殺が生じている

## [ 結果 1 ]

$P(s)$  と  $K(s)$  の間に不安定な極零相殺が存在するとき、フィードバック制御系は内部安定ではない。

## [ 結果 2 ]

$P(s)$  と  $K(s)$  の間に不安定な極零相殺が存在しないとき、以下の三つは等価である

(a) フィードバック制御系が内部安定

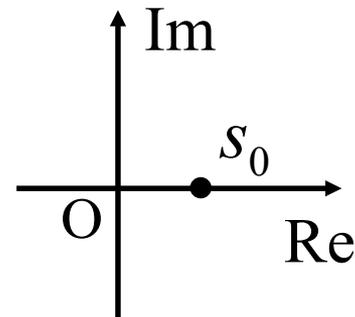
(b)  $G_{yr}(s)$  が安定  $\left[ G_{yr}(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} \right]$

(c)  $1 + P(s)K(s)$  の零点がすべて安定

## [ 結果 1 ] の証明

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}$$

$$\phi(s) := D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)$$



$s = s_0$  ( $\text{Re}[s_0] \geq 0$ ) で  $K(s)$  の極と  $P(s)$  の零点が相殺したとする.

不安定

$$D_K(s_0) = N_P(s_0) = 0$$



$$\phi(s_0) = 0 \quad (\text{Re}[s_0] \geq 0)$$

$\phi(s)$  の根の一つであるである  $s_0$  の実部は負ではない



フィードバック制御系が内部安定ではない

$K(s)$  の零点と  $P(s)$  の極が相殺したときも同様.

[ 結果 2 ] (b)  $\Leftrightarrow$  (c) の証明\* 6章演習問題 [3]

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} \quad \text{とおくと}$$

$$S(s) + G_{yr}(s) = \frac{1}{1 + P(s)K(s)} + \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} = 1 \quad \text{が成り立つ.}$$

(b)  $\Rightarrow$  (c)

$G_{yr}(s)$  が安定



$S(s) = 1 - G_{yr}(s)$  が安定



$S(s)$  の極がすべて安定



$1 + P(s)K(s)$  の零点がすべて安定

逆も成立するので

(c)  $\Rightarrow$  (b)

[ 結果 2 ] (a)  $\Leftrightarrow$  (b) の証明\* 6章演習問題 [3]

(b)  $\Rightarrow$  (a)

(a)  $\Rightarrow$  (b) は明らか

背理法

$P(s)$  と  $K(s)$  の間に不安定な極零相殺が存在しないとき,

$G_{yr}(s) = \frac{N_P(s)N_K(s)}{\phi(s)}$  が安定で, 内部安定ではない, と仮定

内部安定ではない

$\Downarrow$   
 $\text{Re}[s_0] \geq 0$  に対して  $\phi(s)$  は  $(s - s_0)$  を因子に持つ

$\Downarrow$   
 $G_{yr}(s)$  の分子も  $(s - s_0)$  でわり切れる

$\Downarrow$   
 $N_P(s_0)N_K(s_0) = 0$   $\longrightarrow$   $D_P(s_0)D_K(s_0) = 0$

$N_P(s_0) = 0$  の場合

$D_P(s_0) \neq 0$  かつ, 不安定な極零相殺がない

$\longrightarrow D_K(s_0) \neq 0 \longrightarrow D_P(s_0)D_K(s_0) = 0$  に矛盾

$N_K(s_0) = 0$  の場合も同様

# Well-posed (ウェルポーズド)

P124

$$P(s) = \frac{s}{s+1}, \quad K(s) = -1$$

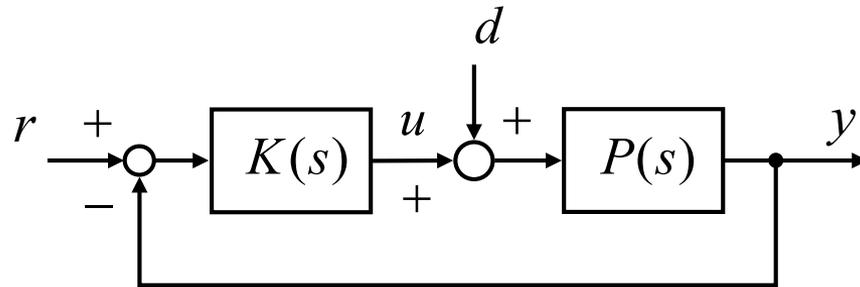


図 6.1 フィードバック制御系

$$G_{ur}(s) = -s - 1, \quad G_{ud}(s) = -G_{yr}(s) = G_{yd}(s) = s$$

プロパーではない

## Well-posed

$G_{ur}(s), G_{ud}(s), G_{yr}(s), G_{yd}(s)$  がすべて適切に定義され、かつプロパーになるとき、フィードバック系は well-posed であるといわれる。



必要十分条件

$$1 + P(\infty)K(\infty) \neq 0$$

Adolf Hurwitz  
(1859-1919)

Aurel Boleslaw Stodola  
(1859-1942)

# IEEE CSS Video Clip Contest 2014

2014  
Finalists

**Click !**

---

## 6.2 ナイキストの安定判別法

---

### フィードバック系の内部安定性

⇔ 特性多項式  $\phi(s) = 0$  の根を求める

因数分解などにより, 直接計算する  
実際的でない



ラウス=フルビッツの安定判別法を適用する  
高次系では手間がかかる

開ループ伝達関数の周波数応答に  
基づき図的に判別する

# ナイキストの安定判別法

## [1] 目的

$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  : 開ループ系  $P(s)K(s)$  の極

$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  : 閉ループ系 (制御系) の極

$$\begin{aligned} \frac{1 + P(s)K(s)}{\text{還送差}} &= 1 + \frac{N_P(s)}{D_P(s)} \cdot \frac{N_K(s)}{D_K(s)} = \frac{D_P(s)D_K(s) + N_P(s)N_K(s)}{D_P(s)D_K(s)} \\ &= \frac{(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{\text{(閉ループ系の極)}}{\text{(開ループ系の極)}} \end{aligned}$$

$\Pi = (\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  の中で) 開ループ系の不安定極の数

知っている

$Z = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  の中で) 閉ループ系の不安定極の数

知りたい

## [2] 方法

閉曲線  $C$  (このなかにすべての不安定な極がある)

$P$  = 閉曲線  $C$  の内部にある開ループ系の極の数

$Z$  = 閉曲線  $C$  の内部にある閉ループ系の極の数

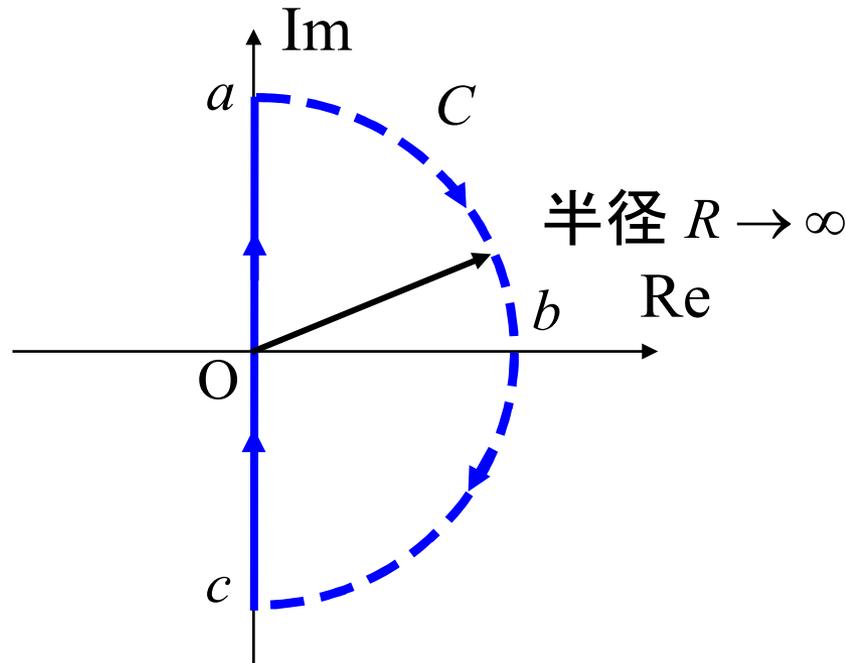


図 6.3 (a) 右半平面全体を囲む閉曲線  $C$

写像  $w = 1 + P(s)K(s)$

複素数  $s$  を決めると, 対応する複素数  $w$  が定まる.

$s$  : (閉曲線  $C$  に沿って)

$O \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow O$  と時計方向に 1 回転

このとき, 対応する  $w$  が描く軌跡:  $\Gamma_1$

$N = \Gamma_1$  が原点を時計方向にまわる回転数

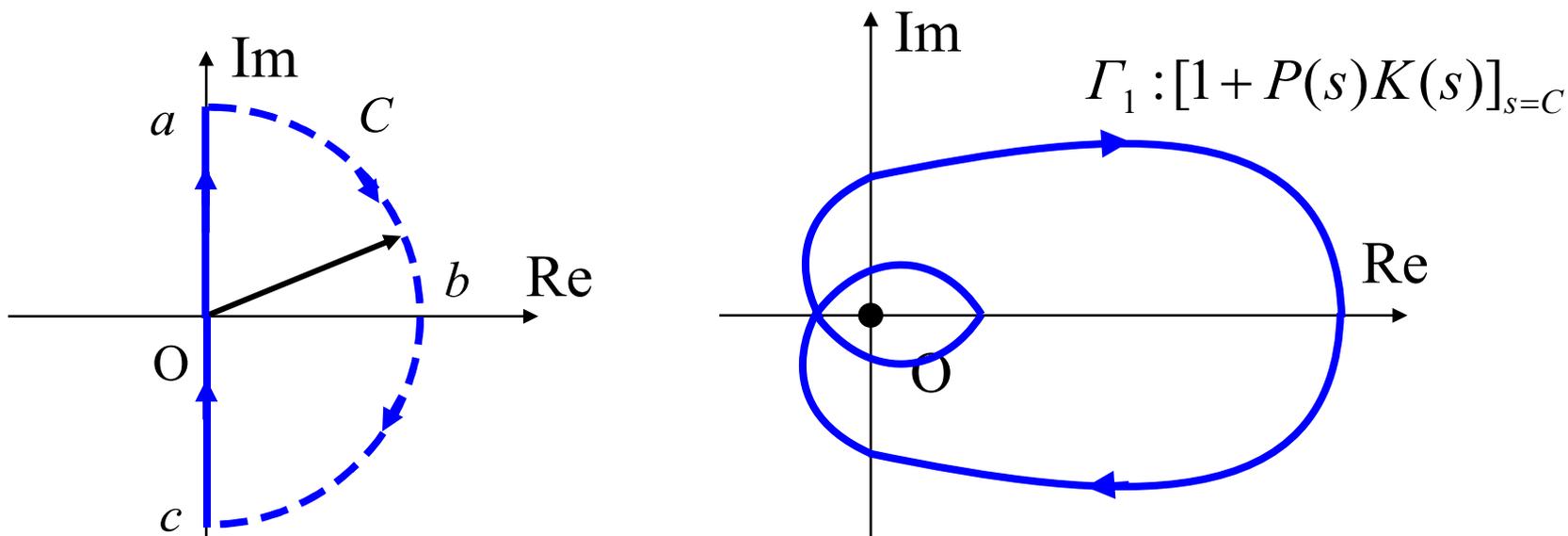


図 6.3 閉曲線  $C$  とその  $1 + P(s)K(s)$  による像  $\Gamma_1$

$$Z = N + \Pi$$

$\Pi$ : 既知

$N$ : 図的に調べる



$Z$ : 知ることができる

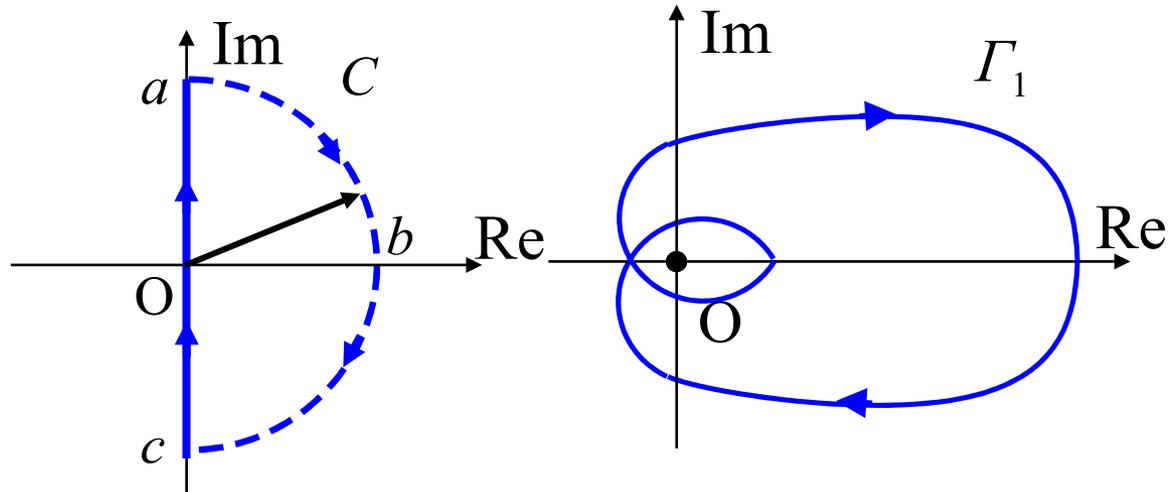
$Z = 0$  ならば安定

$Z \neq 0$  ならば不安定

$\Pi$ : 閉曲線  $C$  の内部にある  
開ループ系の極の数

$Z$ : 閉曲線  $C$  の内部にある  
閉ループ系の極の数

$N$ :  $\Gamma_1$  が原点を時計方向に  
まわる回転数



### [3] 証明

$$w = 1 + P(s)K(s) = \frac{(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

$$\angle w = \sum_{i=1}^n \angle(s - r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i)$$

ベクトル  $\vec{a}_i$   $r_i$  が  $C$  の内部にあるとき: 正味 1 回転 ( $-360^\circ$ )  
 $r_i$  が  $C$  の外部にあるとき: 正味の回転数は 0

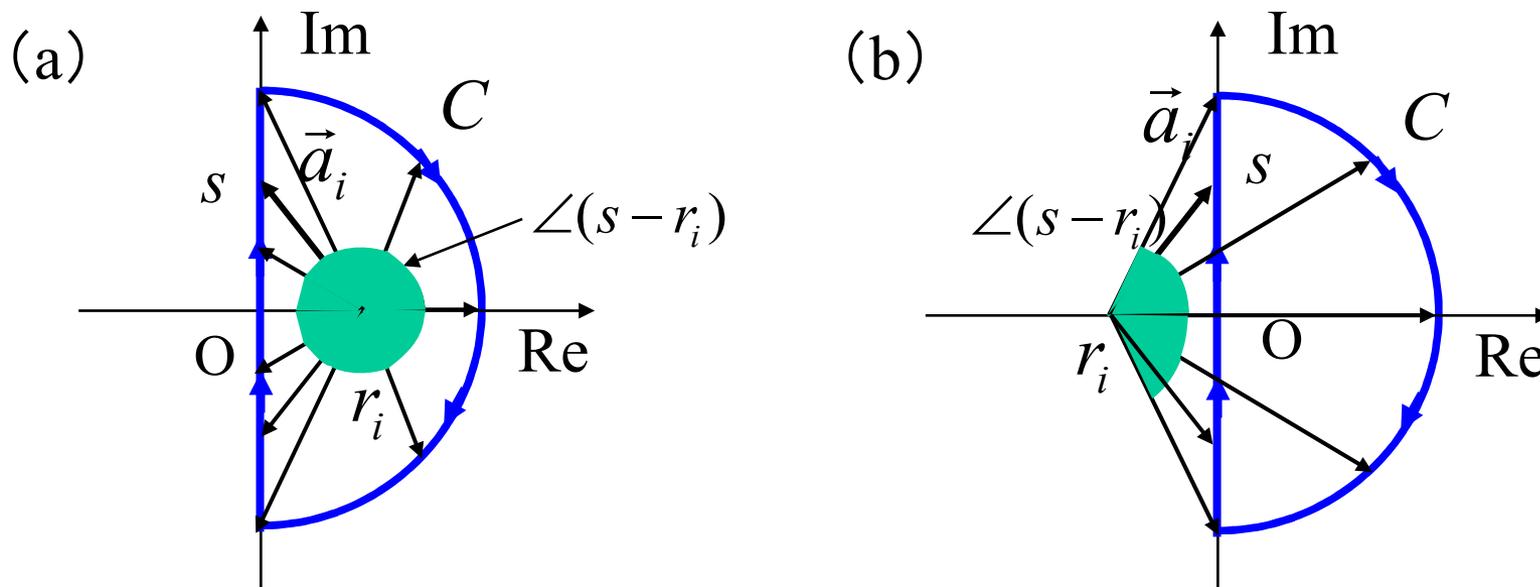


図 6.4  $(s - r_i)$  の偏角の変化

$$\angle W = \sum_{i=1}^n \angle(s - r_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - r_i) \text{ の総変化量} = -360^\circ \times Z$$

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) \text{ の総変化量} = -360^\circ \times \Pi$$

$$\angle W \text{ の総変化量} = -360^\circ \times (Z - \Pi)$$

$$\therefore N = Z - \Pi$$

$$\text{よって } Z = N + \Pi$$

# [4] ベクトル軌跡の利用

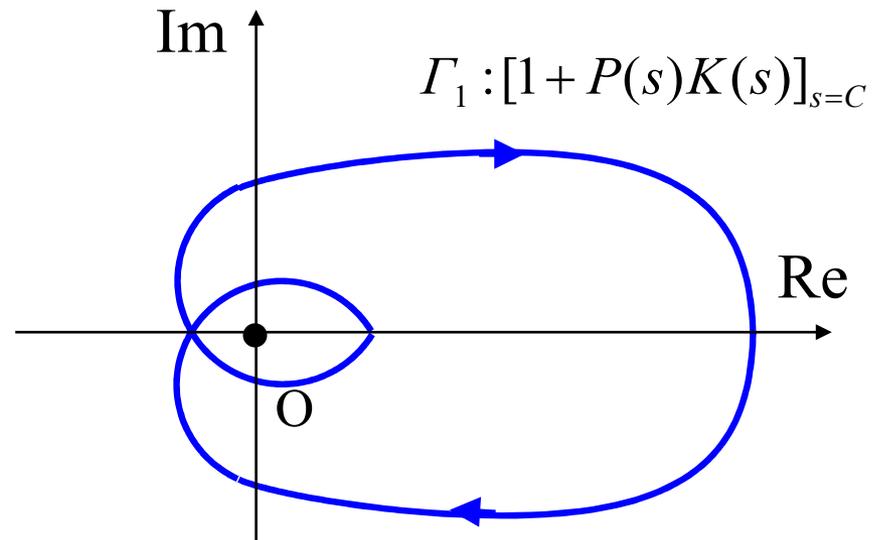
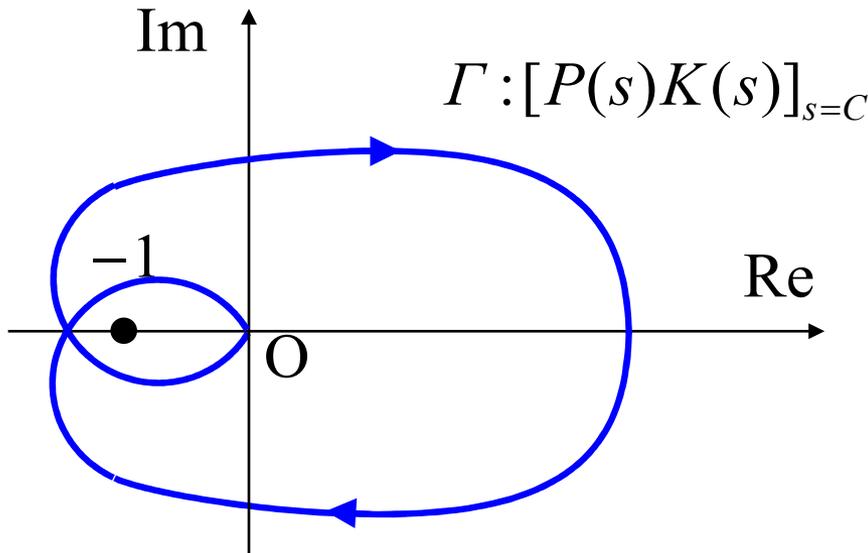
$$v = P(s)K(s) \xrightarrow{\text{右に 1 だけ移動}} w = 1 + P(s)K(s)$$

$\Gamma$  : ナイキスト軌跡

$\Gamma_1$

$\Gamma$  が点  $(-1,0)$  を  
 $N$  回まわる

$\Gamma_1$  が原点を  
 $N$  回まわる





# ナイキストの安定判別法

- [ステップ 1] 開ループ伝達関数のベクトル軌跡  $P(j\omega)K(j\omega)$  を、角周波数  $\omega = 0 \sim +\infty$  の範囲で描く。さらにこれを実軸に関して上下対称に描き、ナイキスト軌跡  $\Gamma$  を得る。
- [ステップ 2] ナイキスト軌跡  $\Gamma$  が点  $(-1, 0)$  のまわりを時計方向にまわる回数を調べ、これを  $N$  とする。
- [ステップ 3] 開ループ伝達関数  $P(s)K(s)$  の極の中で実部が正であるものの個数を調べ、これを  $\Pi$  とする。
- [ステップ 4] 閉ループ系の不安定な極の数は  $Z = N + \Pi$  となる。したがって、 $Z = 0$  ならばフィードバック制御系は安定、 $Z \neq 0$  ならば系は不安定である。

$$\text{安定} \Leftrightarrow Z = 0 \Leftrightarrow -N = P$$

ナイキスト軌跡が点  $(-1,0)$  のまわりを反時計方向にまわる回数が、開ループ伝達関数の不安定極の個数に等しいならば、制御系は安定である。

## ナイキストの安定判別法の利点

- ループを閉じる前の開ループ伝達関数の周波数応答によって、図的に制御系(閉ループ系)の安定性を判別できる
- 計算の必要がなく、次数の高い系やむだ時間系にも容易に適用できる
- 実測データに基づいて判定できる
- 直感的に分かりやすく、さらに安定余裕も調べられる

## 第6章：フィードバック制御系の安定性

✓ 6.1 フィードバック系の内部安定性 (pp. 106-110)

キーワード：内部安定性, 特性多項式

✓ 6.2 ナイキストの安定判別法 (pp. 110-115)

キーワード：ナイキストの安定判別法

学習目標：フィードバック制御系の内部安定性について説明できる。ナイキストの安定判別法を理解し、フィードバック制御系の安定性を判定できる。

# Reading Assignment #7

## 第6章：フィードバック制御系の安定性

### 6.2 ナイキストの安定判別法 (pp. 115-120)

**キーワード**： 単純化されたナイキストの安定判別法

### 6.3 ゲイン余裕, 位相余裕 (pp. 120-125)

**キーワード**： 位相交差周波数, ゲイン交差周波数,  
位相余裕, ゲイン余裕

**学習目標**： 単純化されたナイキストの安定判別法について説明できる. 安定性の程度を評価するゲイン余裕や位相余裕について説明できる.

## <ストドラとフルヴィッツ 1>

速度制御システムの動作を徹底的に解明した人がスイスにいた。その人は、**ストドラ**(Aurel Boleslaw Stodola 1895-1942)といて、チューリッヒのポリテクニクムの機械の教授であった。この学校は現在のスイス連邦立工科大学(ETH)の前身である。ここで彼はタービンの速度制御システムの研究をしていた。

実際に機械を扱っているだけあって、**ストドラ**の研究は実験的検証も含めて詳細を極め、システムの安定性からコントローラ的设计に至る広範な問題に対して、解析と設計の理論を繰り広げた。彼はその研究の中で、今日でも使われている。制御に関するいくつかの概念やパラメータを提唱している。

**ストドラ**はその膨大な研究成果を1893年から1894年にかけて次々と発表し、制御理論の骨組みの基礎を与えた。しかし、彼の研究は同時に制御理論の歴史にとって、もう1つの大きな貢献をしたのである。それは**ストドラ**の研究が**フルヴィッツ**の研究を促したからである。

## <ストドラとフルヴィッツ 2>

フルヴィッツ(Adolf Hurwitz 1859-1919)はストドラと同じ学校の数学の教授であった。ストドラは速度制御システムの研究を進める過程で、フィードバック制御システムが安定であるためには、特性方程式の根の実部が負でなくてはならないことを見いだした。20数年前にマクスウェルが到達したのと同じ結論である。

ところが、ストドラはマクスウェルの研究も、またその問題がすでに10数年も前にラウスによって一般的に解決されていたことも知らなかった。

そこで、ストドラは同僚の数学者フルヴィッツに教えを請うた。フルヴィッツはその問題に数学的興味を抱いたが、彼もラウスの結果を知らなかった。そこで、独自の方法を考えて、一般的な解答を導き出した。フルヴィッツはその理論を論文にまとめる一方でストドラに教え、ストドラは早速フルヴィッツの方法を使って、おりから研究中だったタービンの速度制御システムの安定性の問題を解決することができたのである。

## <ストドラとフルヴィッツ 3>

ストドラの論文の中にはフルヴィッツへの感謝の言葉が記されており、またフルヴィッツの論文にも、問題がストドラによって提起されたこと、そしてこの研究の結果を用いて、ストドラがダボスのタービンを成功裏に完成させたことが述べられている。

フルヴィッツの示した条件はラウスの条件とともに今日の制御理論の重要な一部となっている。後になってラウスの導いた条件とフルヴィッツの与えた条件が、形は違うが同じ内容であることが別の研究者によって証明された。