フィードバック制御

2019年度　3Q

担当教員: 藤田政之　教授 (S5-303B)

第4回講義

10月7日（月）13:20～15:50，S224講義室

第 5 章 : 周波数応答

5.2　ベクトル軌跡（pp. 90～94）

キーワード : ベクトル軌跡

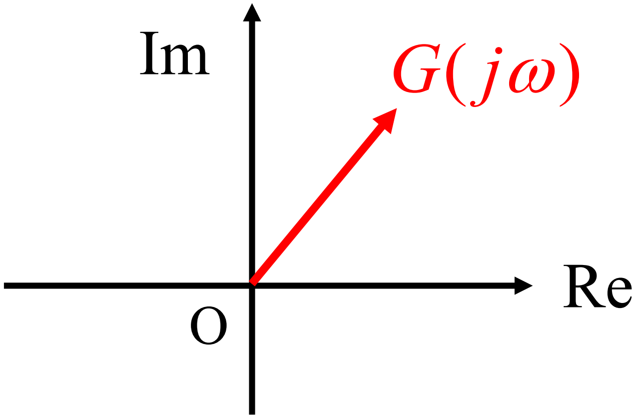
5.3　ボード線図（pp. 94～98）

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

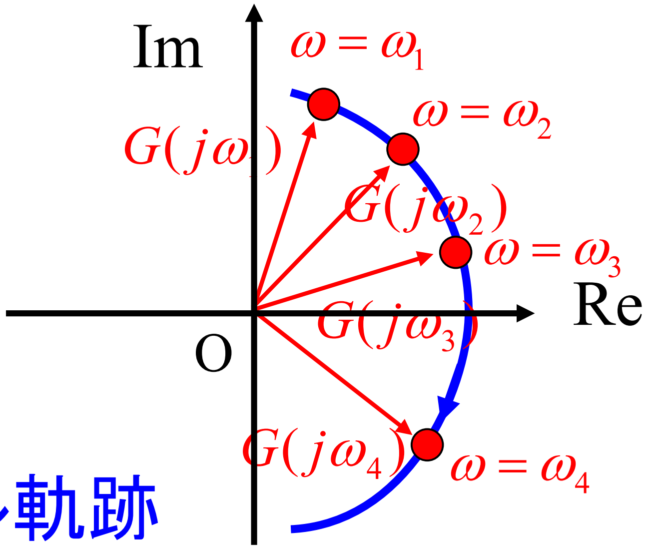
学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができる.
ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができる.

5.2 ベクトル軌跡

周波数 ω を一つ定めると，
$G(j\omega)$ はある複素平面上の
ベクトルとして表せる.



ω を $0 \sim +\infty$ と変化させると
$G(j\omega)$ は軌跡を描く



ベクトル軌跡

積分系 $G(s)=\dfrac{1}{s}$

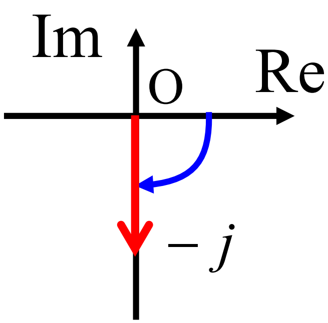
周波数伝達関数 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

ゲイン $|G(j\omega)|=\dfrac{1}{|j\omega|}=\dfrac{1}{|\omega|}$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j\omega}=\angle\frac{1}{j}=\angle\frac{j}{-1}$$

$$=\angle -j=-90^\circ$$



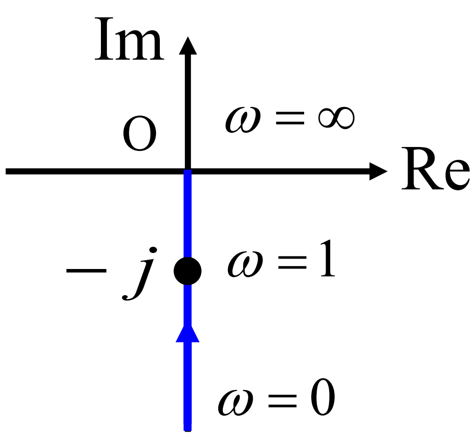


図 5.3 $G(s)=1/s$ のベクトル軌跡

2 重積分系 $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$

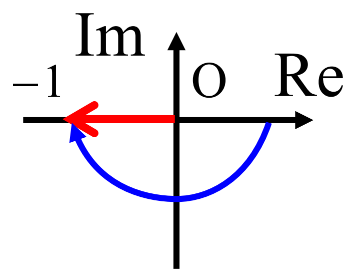
周波数伝達関数 $G(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン $|G(j\omega)|=\dfrac{1}{\omega^2}$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j^2}=\angle\frac{1}{-1}$$

$$=\angle -1=-180^\circ$$



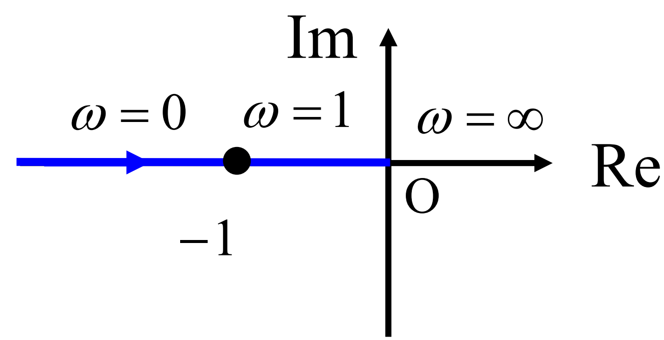


図 5.3 $G(s)=1/s^2$ のベクトル軌跡

積分系と位相遅れ

$\times \dfrac{1}{s}$ ： -90° 回転

90° 位相が遅れる

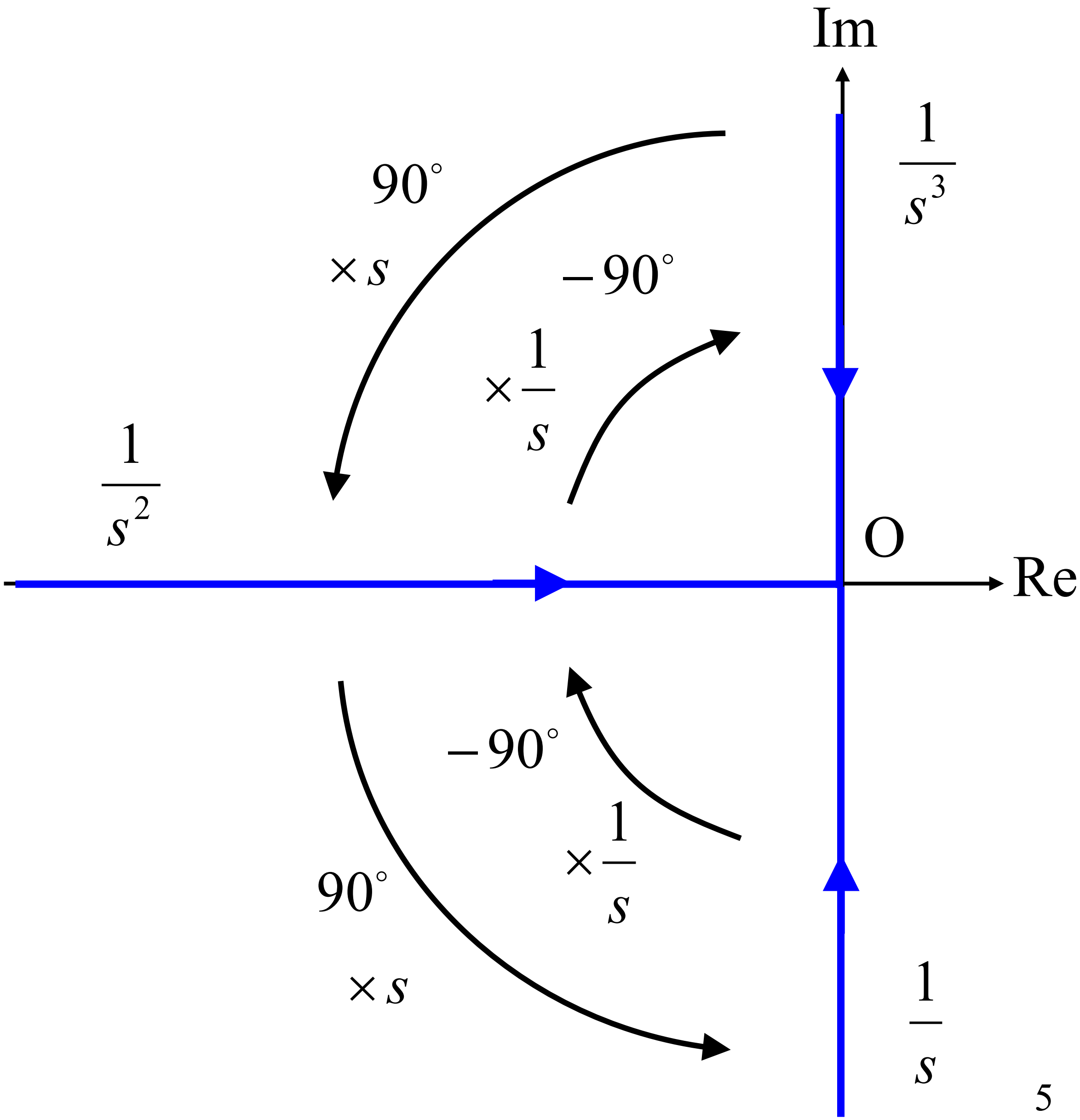
微分系と位相進み

$\times s$ ： 90° 回転

90° 位相が進む

動的システム

振幅と位相



1 次系　$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$　$(K=1)$

出発点 (1,0)

終点 (0,0) $-90°$

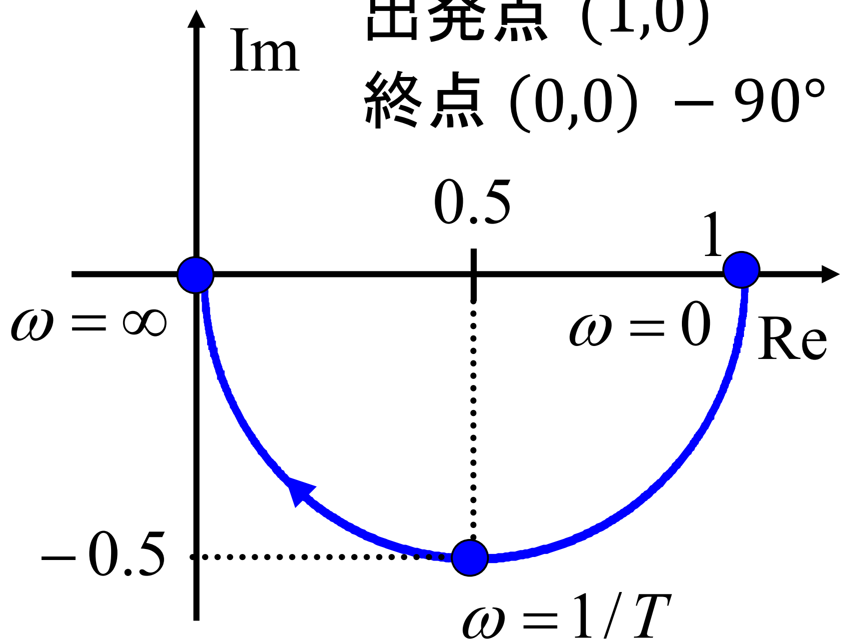


図 5.4　1 次系のベクトル軌跡

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{|1+j\omega T|}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{1+j\omega T}$$

$$=-\angle(1+j\omega T)$$

$$=-\tan^{-1}(\omega T)$$

$\omega T=0$	$\|G\|=1$	$\angle G=0^\circ$
$\omega T=1$	$\|G\|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\angle G=-45^\circ$
$\omega T\approx\infty$	$\|G\|\approx 0$	$\angle G\approx-90^\circ$

複素数の極形式

$$z=re^{-j\theta},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-j(-\theta)}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{0.5(1+j\omega T)+0.5(1-j\omega T)}{1+j\omega T}$$

$$=\underline{0.5}+\underline{0.5\cdot\frac{1-j\omega t}{1+j\omega t}}$$

実軸の正方向
に 0.5 平行移動

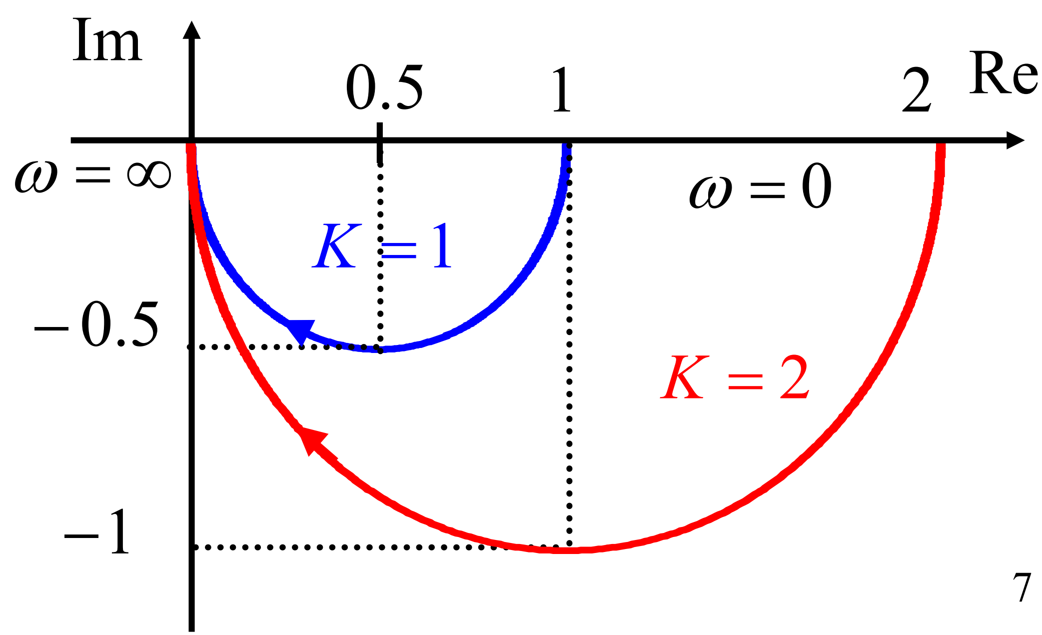
$$0.5\cdot\frac{|1-j\omega t|}{|1+j\omega t|}=0.5 \quad \forall\omega$$

半径 0.5 の円周

中心 (0.5,0)
半径 0.5 の
(半)円周上を動く

$$\frac{\boxed{K}}{Ts+1}$$ の場合

ゲイン K をかけると
原点を中心として K 倍に
拡大(縮小)される



2 次系 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ $(K=1)$

周波数伝達関数

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n\omega j+\omega_n^2}$$

$$=\frac{1}{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}j+1}$$

$$=\frac{1}{(j\Omega)^2+2\zeta\Omega j+1}\quad\left(\Omega=\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

ゲイン

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+(2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle([1-\Omega^2]+j[2\zeta\Omega])\ =-\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

ゲイン

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta\Omega)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$$

$\Omega = 0$	$\lvert G\rvert = 1$	$\angle G = (-0^\circ) = 0^\circ$
$\Omega = 1$	$\lvert G\rvert = \frac{1}{2\zeta}$	$\angle G = -90^\circ$
$\Omega \approx \infty$	$\lvert G\rvert \approx 0$	$\angle G \approx -180^\circ$

$$\left(\begin{aligned}\angle G(j\omega) &= -\angle([1-\Omega^2] + j[2\zeta\Omega]) \\ &\approx -\angle(-\Omega^2)\end{aligned}\right)$$

出発点 (1,0)
終点 (0,0) − 180°

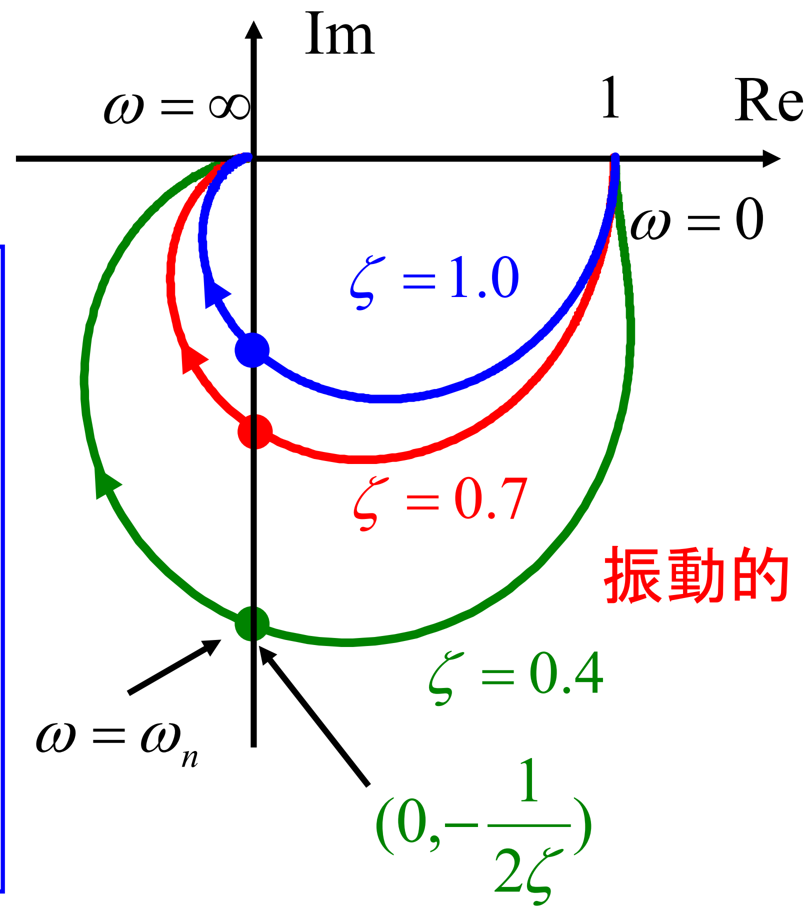
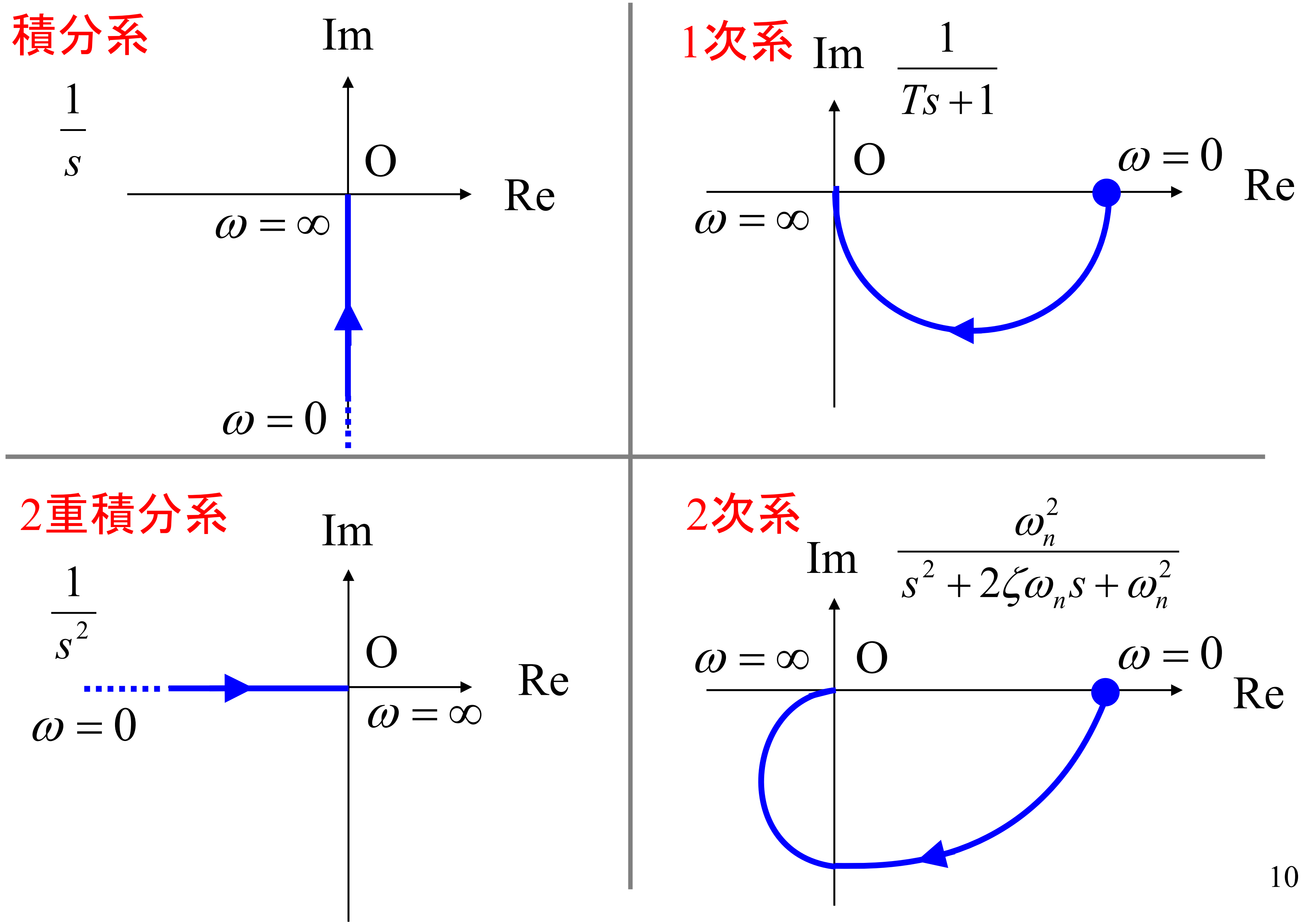


図 5.5 2 次系のベクトル軌跡

ベクトル軌跡の出発点と終点



高次系 $G(s)=\dfrac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$ $(n>m)$

出発点

原点 $(s=0)$ に極をもたないとき

$$G(0)=\frac{b_0}{a_0} \qquad (a\neq 0)$$

原点に l 位の極をもつとき

$\omega\to 0$ のとき $|G(j\omega)|\to\infty$

$$\angle G(j\omega)\to\angle\frac{b_0}{(j\omega)^l}=\angle\frac{1}{j^l}\cdot\frac{b_0}{\omega^l}$$

$$=l\times(-90^\circ)+\angle b_0 \qquad (5.24)$$

この方向の無限遠方から出発する

終点

終点 $\omega\to\infty$ のとき

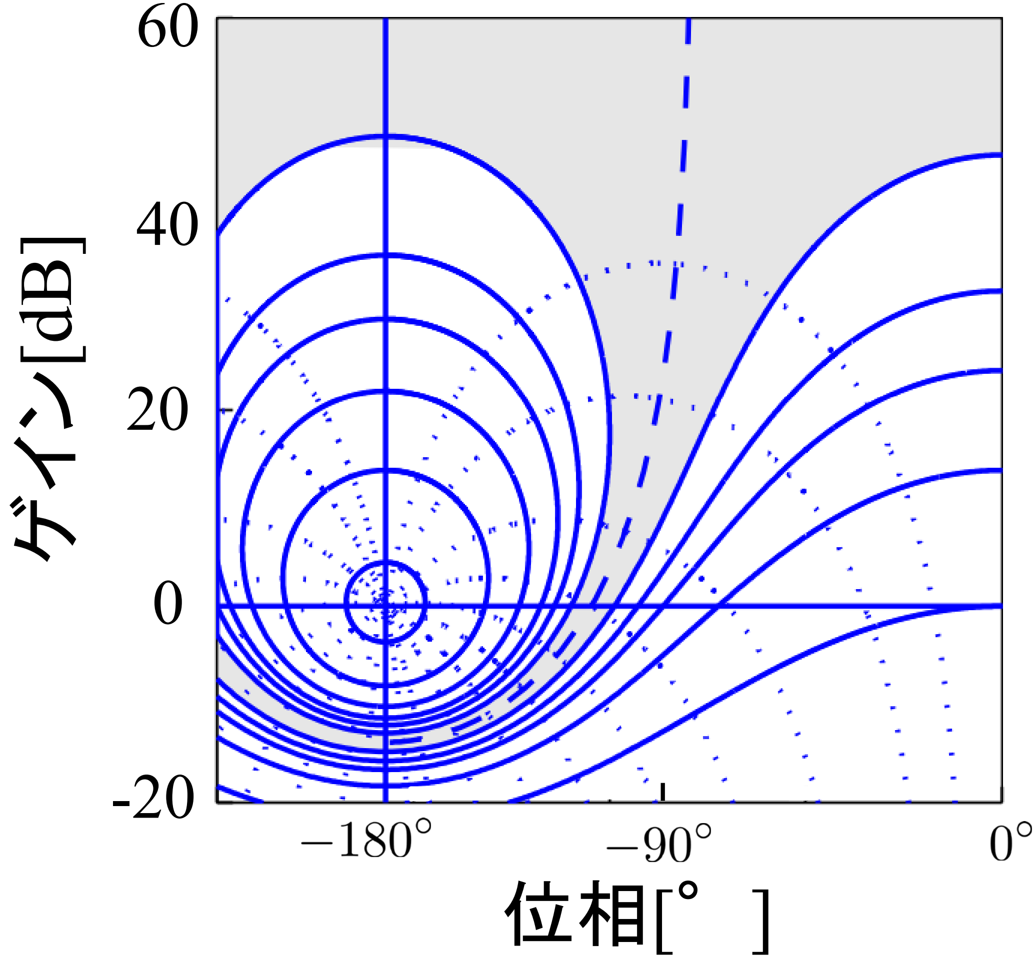
$$G(j\omega)=0 \quad (n>m)$$

$$\angle G(j\omega)\approx\angle\frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

$$=(n-m)\times(-90^\circ)+\angle b_m \qquad (5.25)$$

この方向から原点に向かう

ニコルス線図



$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

開ループ伝達関数の周波数応答 $L(j\omega)$ から、
閉ループ伝達関数のゲイン $|T(j\omega)|$ と位相 $\angle T(j\omega)$
の概略を図的に求めることができる

制御理論の芽生え

Edward John Routh
（1831～1907）

Adams Prize, 1877

James Clerk Maxwell
（1831～1879）

“On Governors”, 1868

5.3 ボード線図

周波数 ω に対し $\begin{cases} |G(j\omega)| \text{ の変化を表すゲイン曲線} \\ \angle G(j\omega) \text{ の変化を表す位相曲線} \end{cases}$

横軸:周波数 ω を対数目盛り　$\omega_2 = 10\omega_1$　1 デカード(dec)

縦軸:ゲイン曲線　$20\log_{10}|G(j\omega)|$　デシベル値(dB)

位相曲線　$(^\circ)$ 度

絶対値	0.1	1	$\sqrt{2}$	2	10	100
デシベル値	-20 dB	0 dB	3 dB	6 dB	20 dB	40 dB

積分系 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$

ゲイン（デシベル値）

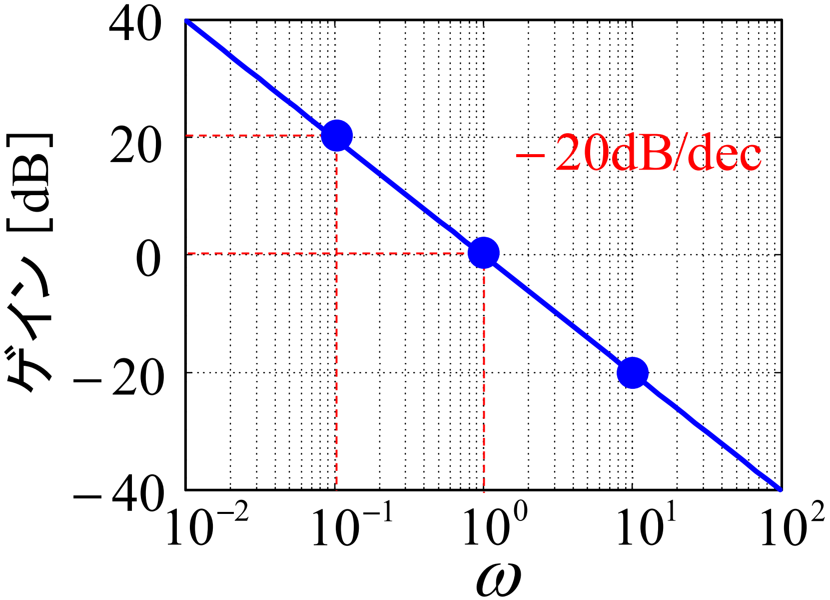
$$20\log|G(j\omega)|=20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right|$$

$$=20\log\frac{1}{|\omega|}=-20\log|\omega|$$

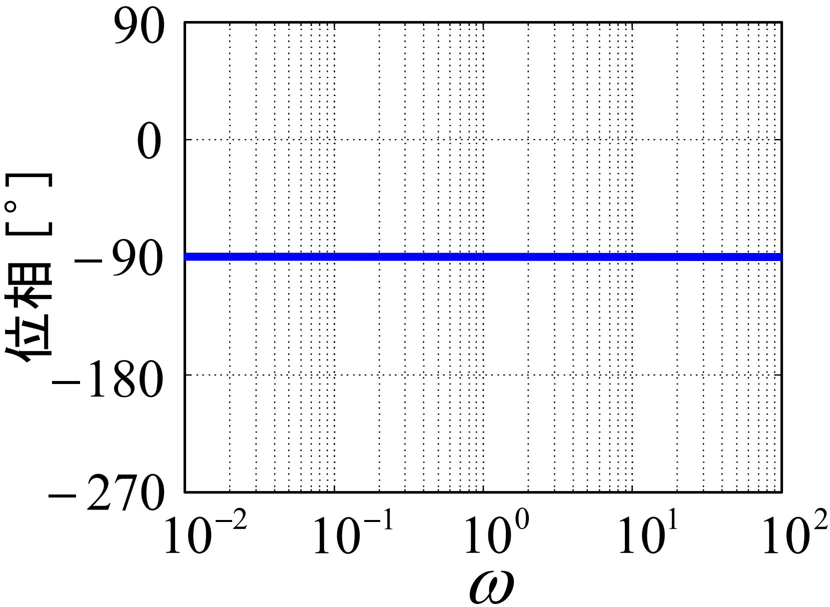
$$\begin{cases}\omega=0.1 \\ -20\log 0.1=-20\times(-1)=20\ \ \text{dB} \\ \omega=1 \\ -20\log 1=-20\times 0=0\ \ \text{dB} \\ \omega=10 \\ -20\log 10=-20\times 1=-20\ \ \text{dB}\end{cases}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j\omega}=\angle\frac{1}{j}=-\angle j=-90^\circ$$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

2 重積分系 $G(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)^2}$

ゲイン（デシベル値）

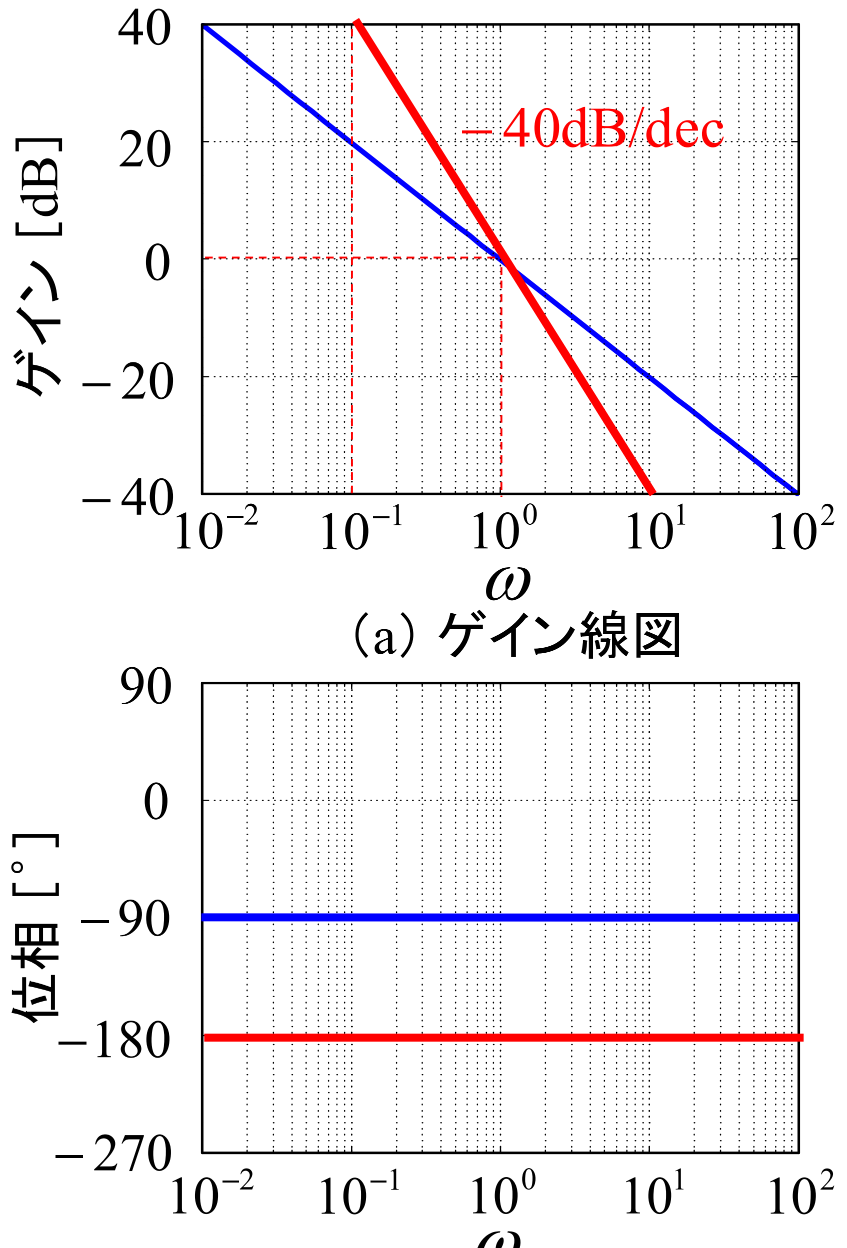
$$20\log\frac{1}{|(j\omega)^2|}=20\log\frac{1}{\omega^2}$$

$$=-40\log|\omega|$$

位相

$$\angle G(j\omega)=\angle\frac{1}{j^2}=\angle-1$$

$$=-180^\circ$$



(a) ゲイン線図

(b) 位相線図

図 5. 6 積分系のボード線図

1 次系　$G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$

ゲイン（デシベル値）

$$20\log|G(j\omega)|=20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

位相

$$\angle G(j\omega)=-\angle(1+j\omega T)=-\tan^{-1}(\omega T)$$

$$\omega T<<1 \qquad G(j\omega)\approx 1$$

$$\omega T>>1 \qquad G(j\omega)\approx\frac{1}{j\omega T}$$

$$\begin{cases} \omega T<<1 & 20\log|G|\approx 20\log 1=0\ \ \mathrm{dB} \\ & \angle G=0^\circ \\ \omega T=1 & 20\log|G|=20\log\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-3\ \mathrm{dB} \\ & \angle G=-45^\circ \\ \omega T>>1 & 20\log|G|\approx -20\log|\omega T|\ \ \mathrm{dB} \\ & \angle G\approx -90^\circ \end{cases}$$

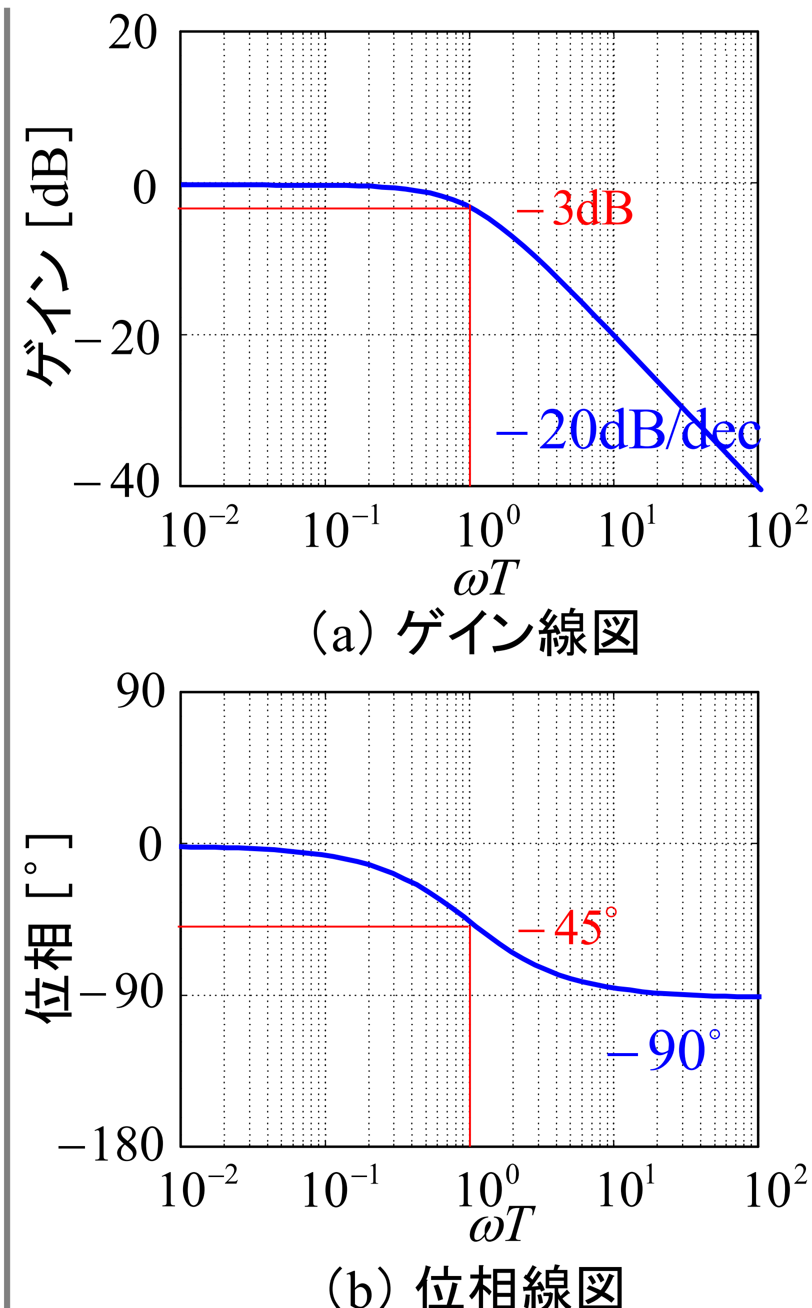


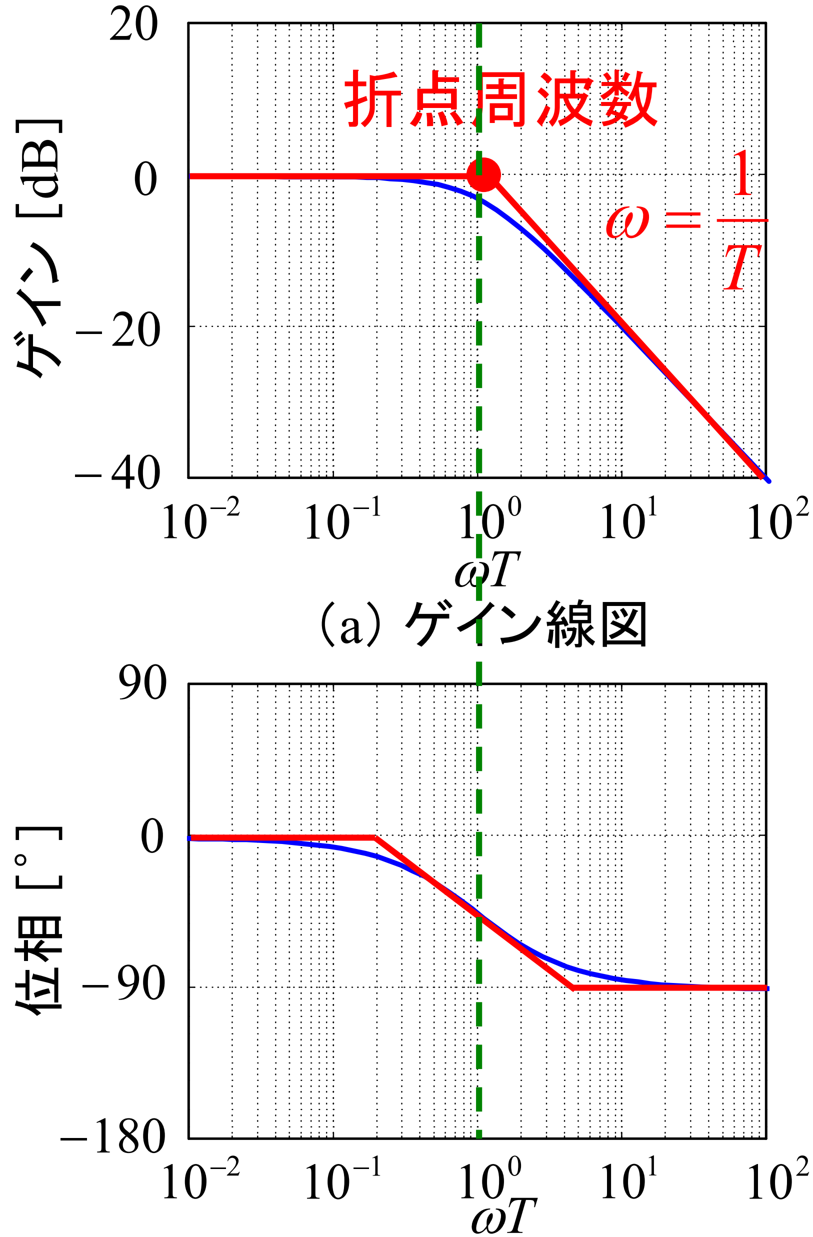
図 5. 7　1 次系のボード線図

折れ線近似

（ゲイン）0 dB と –20 dB/dec
の 2 本の直線

（位相） $\omega \leq \dfrac{0.2}{T}$ で 0°

$\omega \geq \dfrac{5}{T}$ で -90°

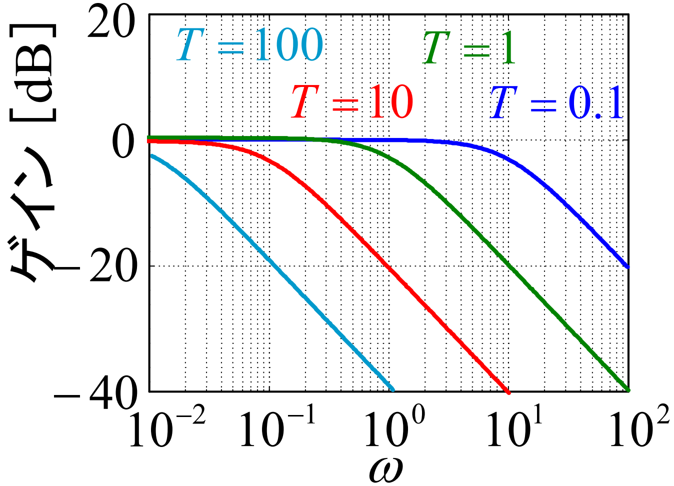


（a）ゲイン線図

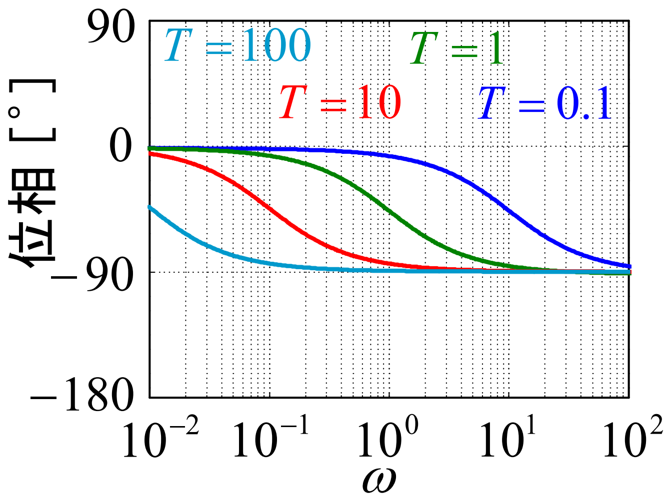
（b）位相線図

図 5. 7　1 次系のボード線図

T が変化しても（形を変えず）
横軸方向に平行移動



（a）ゲイン線図



（b）位相線図

図 5.8 種々の時定数に対する 1 次系のボード線図

ゲイン K 倍しても（形を変えず）
縦軸方向に平行移動（ゲインのみ）

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (T = 1)$$

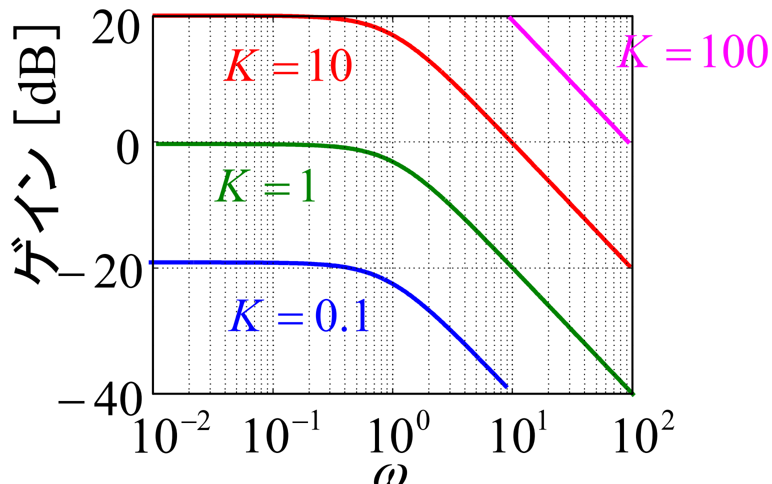
$K = 10$

$+40$ [dB]
$(\times 100)$

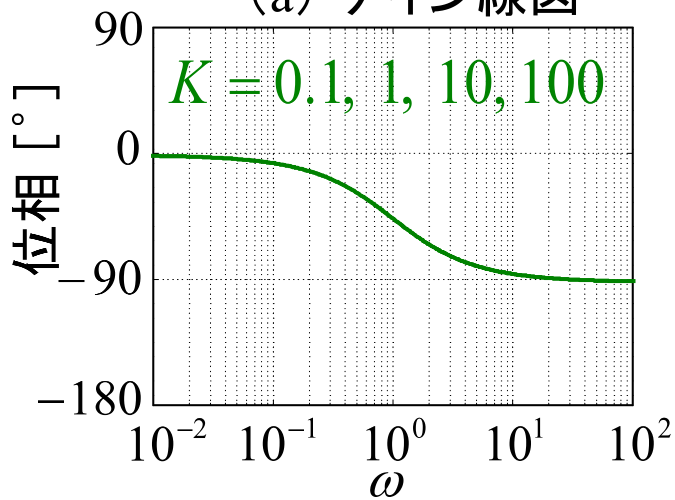
$K = 1$

$+20$ [dB]
$(\times 10)$

$K = 0.1$



(a) ゲイン線図



(b) 位相線図

1 次系 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ （復習　3章：P43～）

ステップ応答（時間応答）

$$y(t)=K(1-e^{-t/T})$$

定常値　$\displaystyle \lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty} K(1-e^{-t/T})=K$

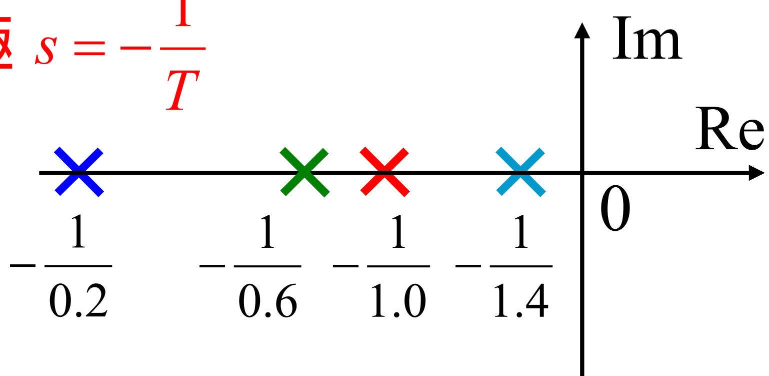
初期速度　$\displaystyle \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{K}{T}e^{-t/T}\right|_{t=0}=\frac{K}{T}$

- 時刻 $t=T$ において定常値の63.2 % になる.

$$y(t)=K(1-\underbrace{e^{-1}}_{0.368})=0.632\cdot K$$

- 初期速度のまま進めば, T 秒後に定常値 K に到達する.

極 $s=-\dfrac{1}{T}$



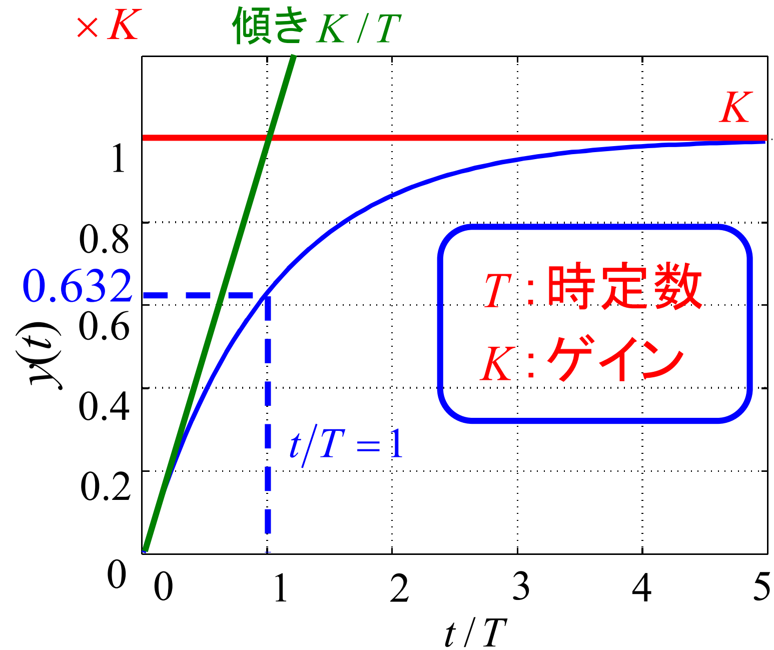


図3.3 ステップ応答（1 次系）

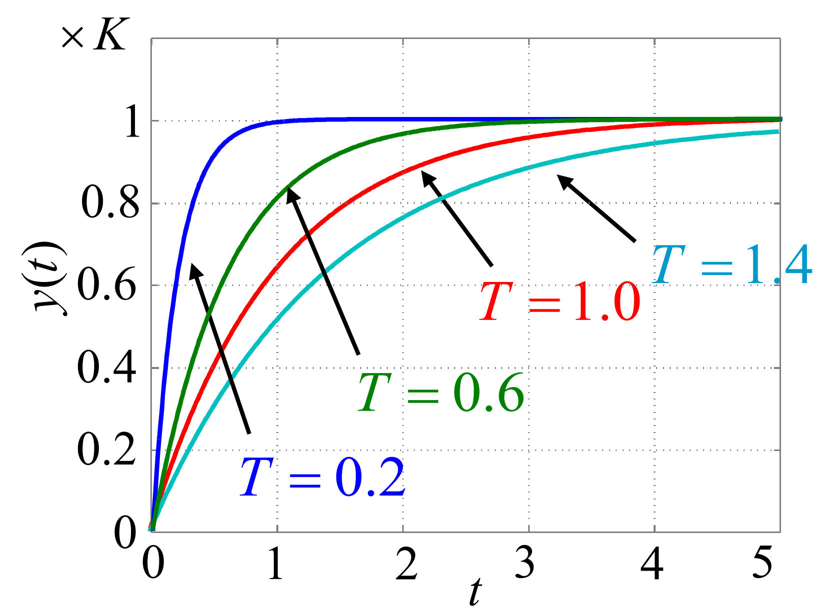


図3.4 種々の時定数 T に対する応答

第 5 章 : 周波数応答

✓ 5.2　ベクトル軌跡（pp. 90～94）

キーワード : ベクトル軌跡

✓ 5.3　ボード線図（pp. 94～98）

キーワード : ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

学習目標 : ベクトル軌跡による表示ができるようにする．
ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができるようにする．

Reading Assignment #5

第 5 章 : 周波数応答

5.3 ボード線図（pp. 94～98）

キーワード： ボード線図，ゲイン曲線，位相曲線

5.4 ボード線図の性質（pp. 98～104）

キーワード： 最小位相系，ゲイン－位相関係式

学習目標 : ボード線図を用いて周波数特性を図式的に表すことができる．最小位相系におけるゲインと位相の関係について説明できる．

[3] 示村悦二郎,「自動制御とは何か」 より

＜安定問題への挑戦＞

　理論の登場を待っていた最初のテーマは，蒸気機関の速度制御システムで経験した“がたがた”の問題，すなわちフィードバック制御システムの安定性の問題であった．
最初にこの問題に取り組んだのは，イギリスの物理学者エアリー(George Biddel Airy 1801-1892)であった．

⋮

(中略)

⋮

　しかし，エアリーの研究は今日に続く制御理論の源泉にはならなかった．その意味での制御理論の祖はさらに18年後のマクスウェル(James Clerk Maxwell 1831-1879)の登場まで待たなくてはならなかったのである．

＜マクスウェルとラウス＞

マクスウェルは19世紀後半に活躍したイギリスの物理学者で，電気磁気学の体系を確立した人として有名である．制御に関しては，彼はたった1つの論文を書いたのだが，それがラウス(Edward John Routh 1831-1907)の研究の引き金になり，制御理論の源流となったのである．

マクスウェルは蒸気機関の速度制御システムの安定性の解析をした．そして制御システムの安定性が，特性方程式と呼ばれるある代数方程式の根の性質で決まることを見いだした．

そこで，彼は特性方程式の根がそのような性質を持っているかどうかを，いちいち根を求めずに調べることができないかと考えた．

彼はこの問題をなんとかして一般的に解決しようとしたが，3次の代数方程式までしか，条件を求めることができなかった．マクスウェルは，5次方程式について条件の一部を示して，次のように述べた．

“私はこの条件が(安定のための)必要条件であることを証明することができたが，それが十分条件であることは証明できなかった．”

マクスウェルのこの一文がラウスの興味を引き，やがてラウスはマクスウェルの提起した問題に，一般的な解答を与えたのである．

＜学問の世界から出なかったマクスウェルとラウス＞

　マクスウェルの不成功にラウスが敏感に反応したのには訳がある．マクスウェルとラウスは実はケンブリッジ大学の同級生だったのである．それだけでなく，二人は常に1，2番を争うライバル同士であった．卒業の最終試験ではラウスが主席であったが，マクスウェルも当然自分が1番だと確信していた．彼の自信のほどを伺わせるエピソードが伝えられている．

　卒業の成績発表の日に，当然自分が1番だと信じていたマクスウェルは自分で発表を見に行かないで，召使に2番が誰かを見てくるように命じた．やがて帰って来た召使から，2番は“旦那さま貴方でした”と伝えられたマクスウェルの胸中はどんなだったろうか．ラウスが彼の名前とともに今日まで残る安定性の条件を発表したのは，アダムス賞という権威のある懸賞論文への応募作品の中であった．　このときの懸賞のテーマは「動的安定性の条件」というもので，1875年に告示され1877年に審査が行われた．これに応募したラウスは見事に賞を獲得したが，この時の審査員の一人にマクスウェルが名を連ねていた．