フィードバック制御

2019年度　3Q

担当教員: 藤田政之　教授 (S5-303B)

第2回講義

9月30日（月）13:20〜15:50,　S224講義室

第４章：フィードバック制御系の特性

4.1 感度特性（pp. 67～71）

キーワード： 感度，感度関数

4.2 定常特性（pp. 71～75）

キーワード： 開ループ伝達関数（一巡伝達関数），定常偏差，l 型の制御系

学習目標：フィードバック制御系における感度関数について説明できる．定常偏差や偏差定数について理解し，フィードバック制御系の型について説明できる．

4.1 感度特性

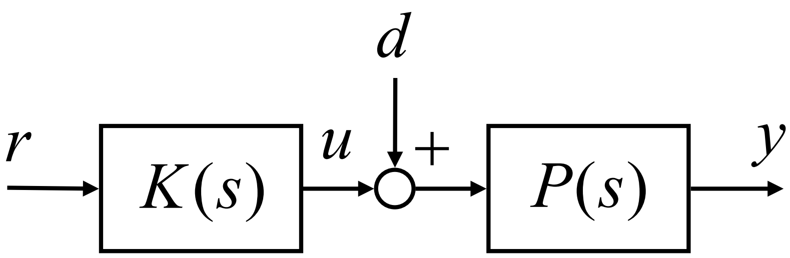
パラメータの変化に対する感度

フィードフォワード　vs　フィードバック

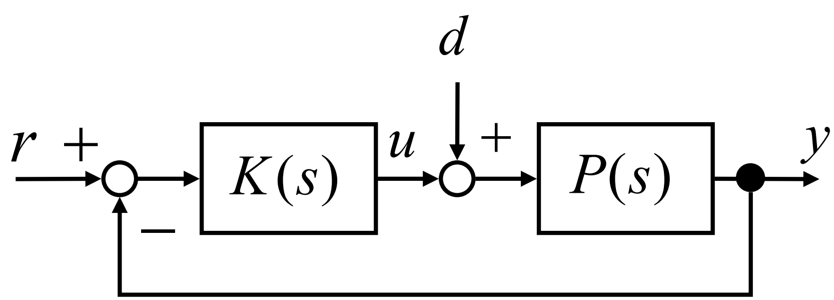
外乱なし $(d = 0)$

制御対象（1 次系）　$P(s) = \dfrac{A}{\tau s + 1}$

コントローラ（ゲイン）　$K(s) = K$



（a）フィードフォワード制御系

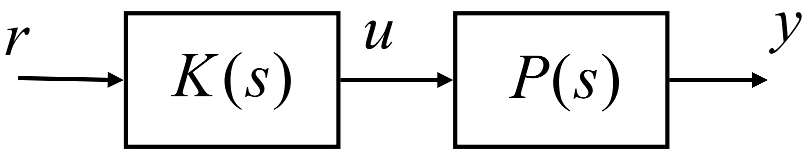


（b）フィードバック制御系

図 4.1　フィードフォワード制御系とフィードバック制御系

$r \to y$ への伝達関数

フィードフォワード

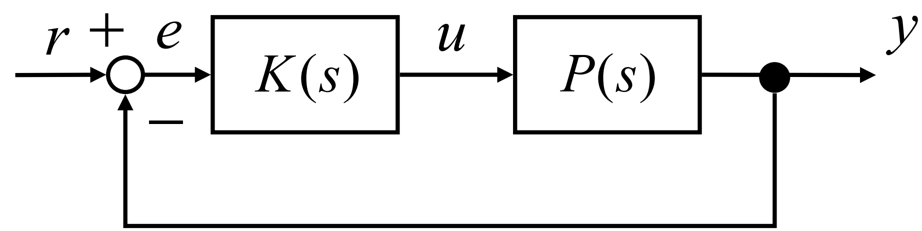


$$y(s) = P(s)K(s)r(s)$$

$$= \frac{A}{\tau s + 1} \cdot K \cdot r(s)$$

$$= \frac{AK}{\tau s + 1} r(s)$$

フィードバック



$$\begin{cases} y(s) = P(s)K(s)e(s) \\ e(s) = r(s) - y(s) \end{cases}$$

$$\left(1 + P(s)K(s)\right)y(s)$$

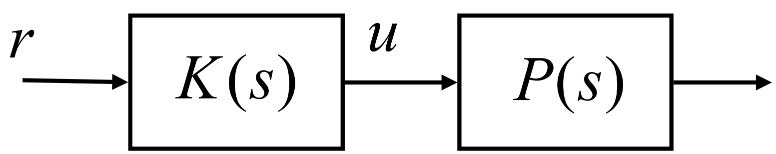
$$= P(s)K(s)r(s)$$

$$y(s) = \frac{P(s)K(s)}{1 + P(s)K(s)} r(s)$$

$$= \frac{AK}{\tau s + 1 + AK} r(s)$$

（閉ループ伝達関数）

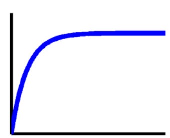
フィードフォワード



ゲイン $K = \dfrac{1}{A}$ とすると

$$y(s) = \frac{AK}{\tau s+1} r(s) = \frac{1}{\tau s+1} r(s)$$

1次系のステップ応答



$y(t) \approx r(t)$ $(t \to \infty)$

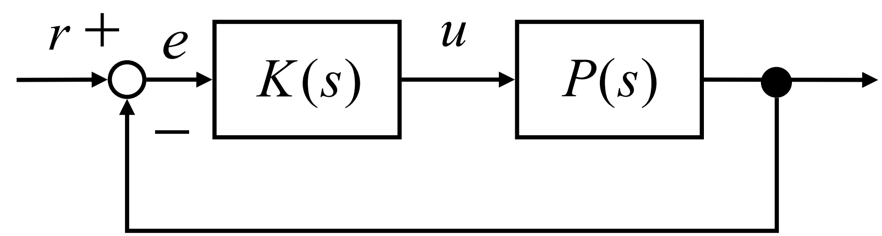
$\tilde{A} = 1.4A$ (特性変動)

40 % 変化

$$\tilde{y}(s) = \frac{\tilde{A}K}{\tau s+1} r(s) = \frac{1.4}{\tau s+1} r(s)$$

$$\tilde{y}(t) \approx 1.4 r(t) = (1.4 y(t))$$

フィードバック



$$y(s) = \frac{AK}{\tau s + 1 + AK} r(s)$$

ゲイン $K \to \infty$ とすると

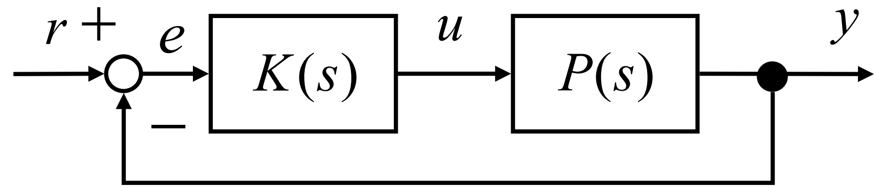
$$\frac{AK}{\tau s + 1 + AK} \approx \frac{AK}{AK} = 1$$

(A やτ に関係ない)

$\therefore$ $y(t) \approx r(t)$

特性変動による影響の抑制

[例 4.1]



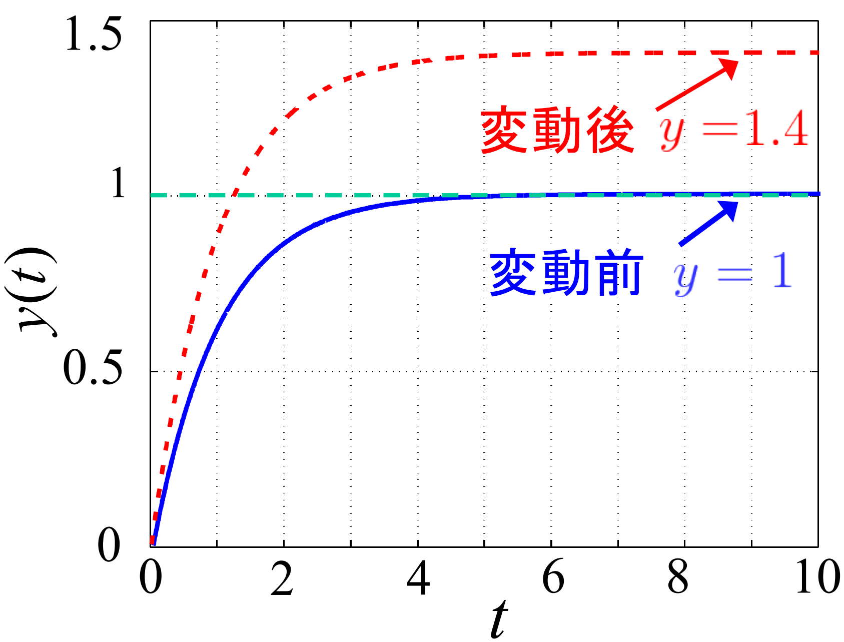
$$P(s)=\frac{A}{\tau s+1},\quad K(s)=K$$

$\tau=1,\ A=5$ とすると $P(s)=\dfrac{5}{s+1}$

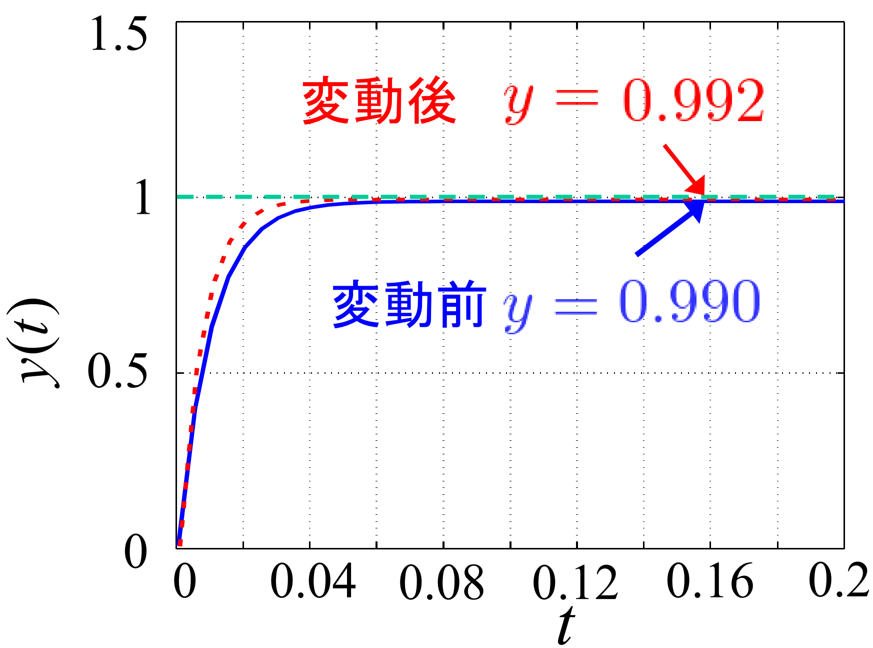
特性変化 $A \rightarrow \widetilde{A}=7$

フィードフォワード: $K=\dfrac{1}{A}=0.2$

フィードバック: $K=20$



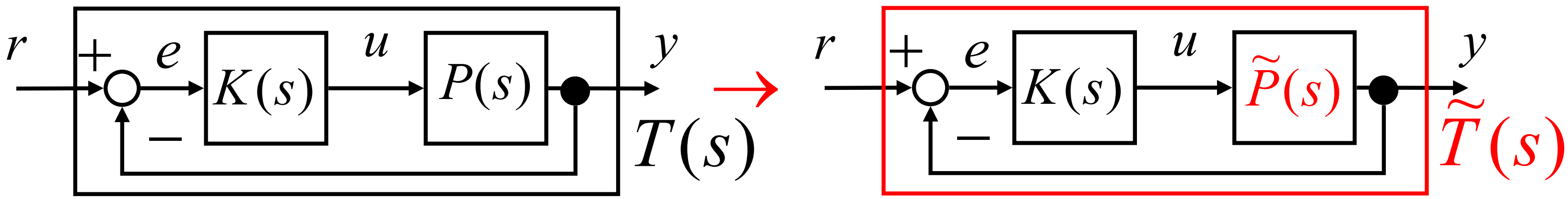
(a) フィードフォワード制御系



(b) フィードバック制御系

($t=0.05$ で収束, 安定化(速応性))

感度



制御対象 : $P(s) \to \tilde{P}(s)$ と変化

$r \to y$ への閉ループ伝達関数 $T(s) = \dfrac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)} \to \tilde{T}(s)$ へと変化

相対的な変動率

$$\Delta_P(s) = \frac{P(s)-\tilde{P}(s)}{\tilde{P}(s)} \qquad \Delta_T(s) = \frac{T(s)-\tilde{T}(s)}{\tilde{T}(s)}$$

$$\Delta_T(s) = \frac{\dfrac{PK}{1+PK} - \dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}}{\dfrac{\tilde{P}K}{1+\tilde{P}K}} = \frac{PK(1+\tilde{P}K)-\tilde{P}K(1+PK)}{\tilde{P}K(1+PK)}$$

$$\Delta_P(s)$$

$$= \frac{(P-\tilde{P})\cancel{K}}{\tilde{P}\cancel{K}(1+PK)} = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

$$\Delta_T(s) = \frac{1}{1+P(s)K(s)}\Delta_P(s)$$

開ループ系の変動が $\dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$ 倍になって

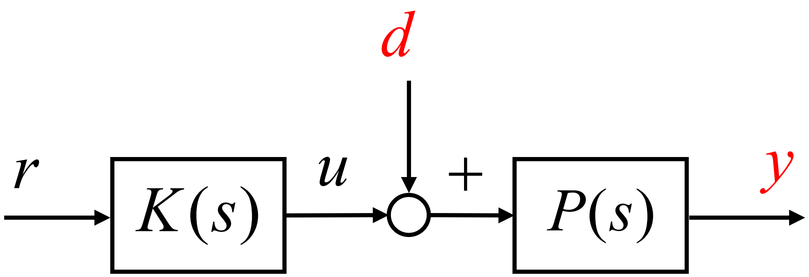
閉ループ系に影響する

$K(s)$ のゲイン大　$\rightarrow$ 低感度

感度関数　$S(s) = \dfrac{1}{1+P(s)K(s)}$

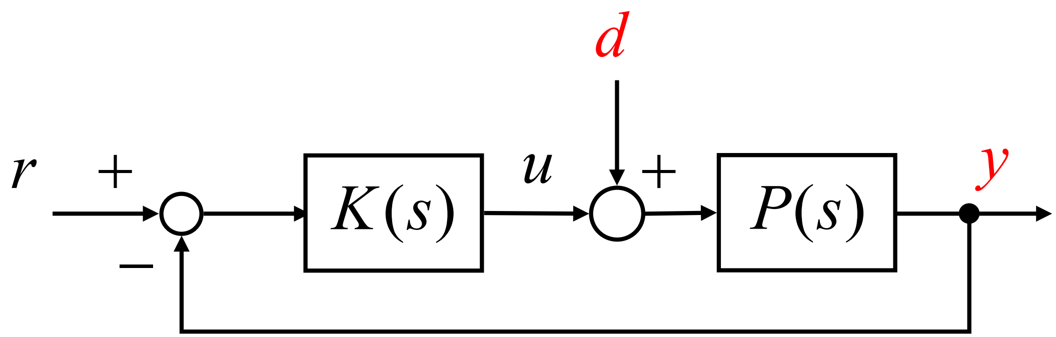
外乱に対する感度（目標値 $r=0$）

フィードフォワード



$$y(s)=P(s)d(s)$$

フィードバック



$$y(s)=\frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$

$$S(s)=\frac{1}{1+P(s)K(s)}$$ だけ低減

外乱の影響の抑制

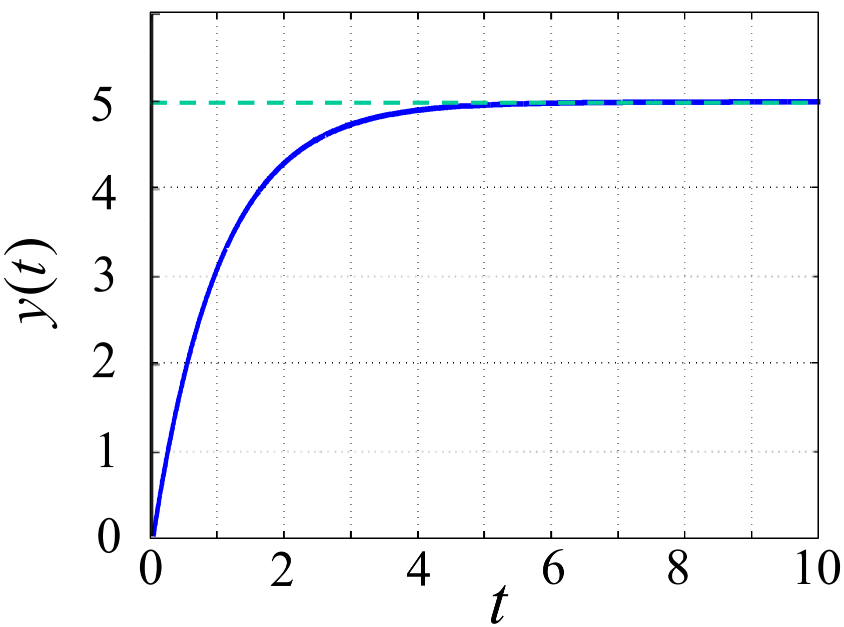
[例 4.1] ステップ外乱 $d(t)=1$（目標値 $r(t)=0$）

$$P(s)=\frac{A}{\tau s+1},\quad K(s)=K$$

$\tau=1,\quad A=5$ とすると $P(s)=\dfrac{5}{s+1}$

フィードフォワード：

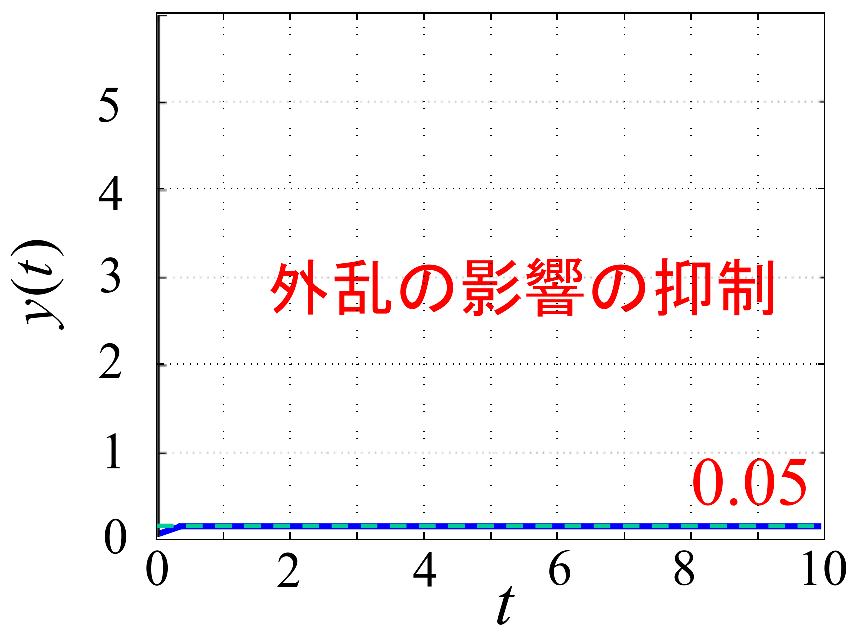
$$y(s)=P(s)d(s)$$



(a) フィードフォワード制御系

フィードバック： $K=20$

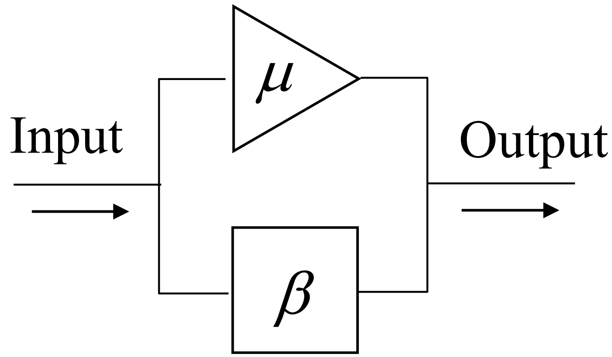
$$y(s)=\frac{P(s)}{1+P(s)K(s)}d(s)$$



(b) フィードバック制御系

Harold Stephen Black（1898～1983）

1927年ベル研究所への出勤途中のハドソン川の渡河フェリー上で，増幅器におけるnegative feedbackの着想を得て、書き込むものが無いのでニューヨークタイムズ紙にメモをした.



The New York Times
August 2, 1927
の紙面に描いた Black のメモ

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}} = A_F = \frac{\mu}{1-\beta\mu}$$

$$= \frac{1}{-\beta}\left[1 - \frac{1}{1-\mu\beta}\right]$$

負フィードバック増幅器
のブロック線図と式

IEEE CSS Video Clip Contest

2014Winner

Click

http://www.youtube.com/watch?v=XJLMW6I303g

4.2 定常特性

目標値に対する定常偏差（外乱 $d=0$ ）

［例 4.2 ］

制御対象：$P(s)=\dfrac{1}{s+1}$

コントローラ：$K(s)=K$

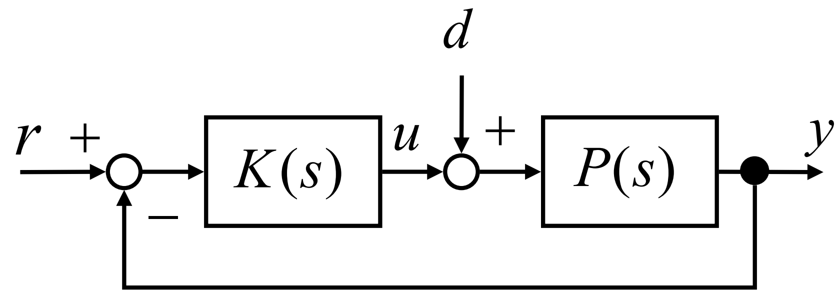
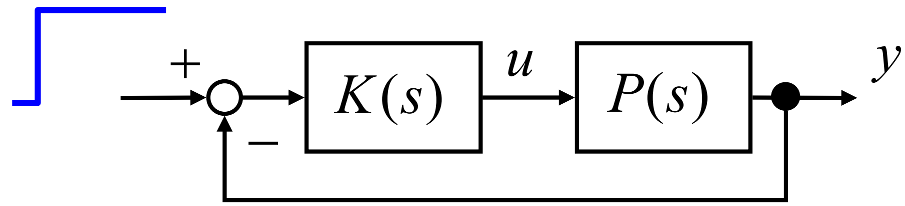


図4.1 （b）フィードバック制御系

$r \to y$ への閉ループ系の伝達関数

$$T(s)=\frac{P(s)K(s)}{1+P(s)K(s)}=\frac{\dfrac{K}{s+1}}{1+\dfrac{K}{s+1}}=\frac{K}{s+K+1}$$

$$y(s) = T(s)r(s) \quad \left[T(s) = \frac{K}{s+K+1} \qquad r(s) = \frac{1}{s} \quad （ステップ入力） \right]$$



$$y(s) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{K+1}{s+(K+1)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1+K} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+(K+1)} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{1+K}\left(1 - e^{-(K+1)t}\right)$$

ゲイン:大 ➡ （定常）偏差:減少

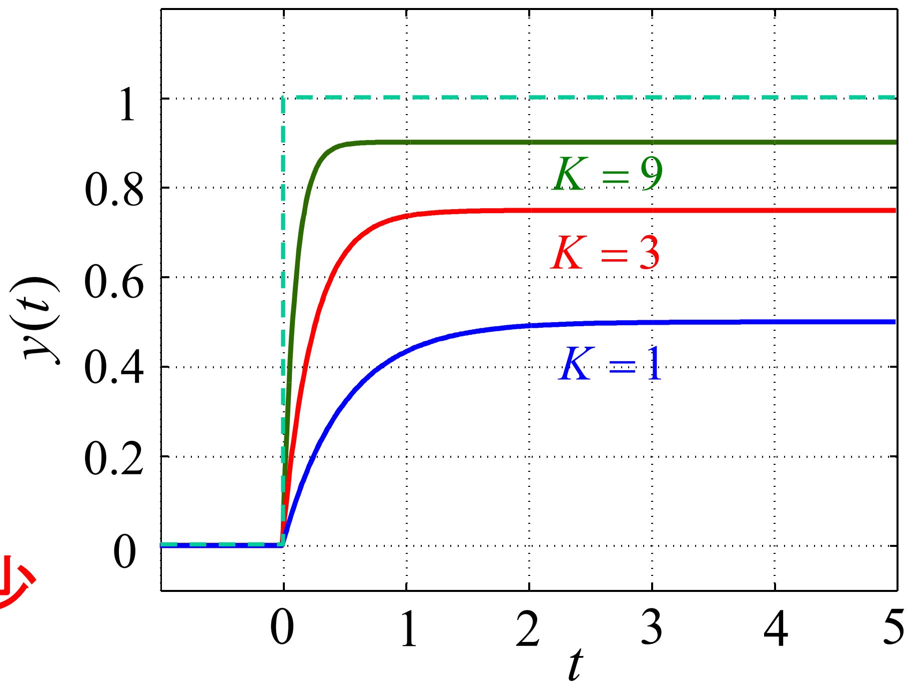
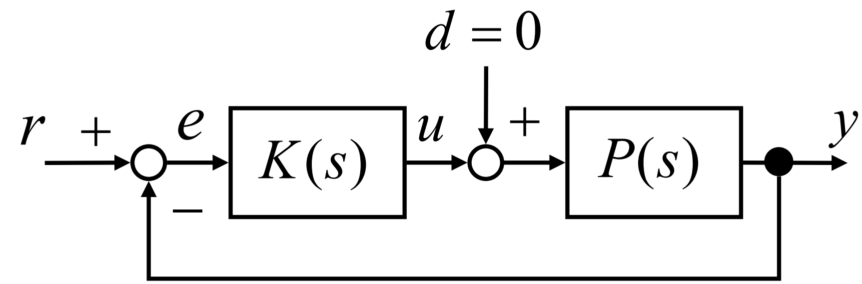


図4.3 ステップ応答例

偏差　$e(t) = r(t) - y(t)$



一巡伝達関数　$L(s) = P(s)K(s)$
（開ループ伝達関数）

$$e(s) = r(s) - y(s)$$

$$y(s) = L(s)e(s)$$

$$e(s) = r(s) - L(s)e(s)$$

$$(1 + L(s))e(s) = r(s)$$

$$e(s) = \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

$\underline{\frac{1}{1+L(s)}}$（感度関数）

定常偏差（安定なシステム）

$$e_s = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \cdot e(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s)$$

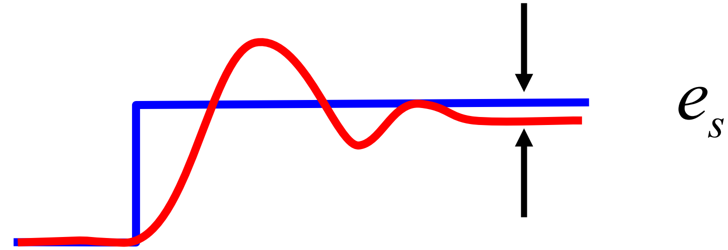
最終値定理（p. 190 付録（L7））

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

$$F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

[A] ステップ入力

$$r(t)=1 \quad \left(r(s)=\frac{1}{s} \right)$$

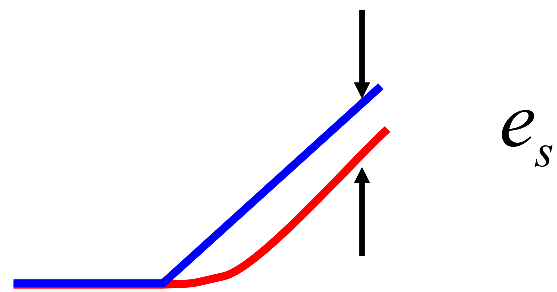


$$e_s=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}$$ 定常位置偏差

$$K_p=\lim_{s\to 0}L(s)=L(0)$$ 位置偏差定数

[B] ランプ入力

$$r(t)=t \quad \left[r(s)=\frac{1}{s^2} \right]$$

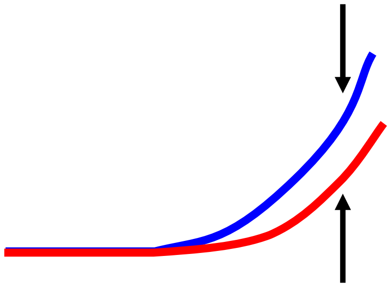


$$e_s=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sL(s)}$$ 定常速度偏差

$$K_v=\lim_{s\to 0}sL(s)$$ 速度偏差定数

[C] 一定加速度入力

$$r(t) = \frac{1}{2} t^2 \qquad \left(r(s) = \frac{1}{s^3} \right)$$



e_s

$$e_s = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$ 定常加速度偏差

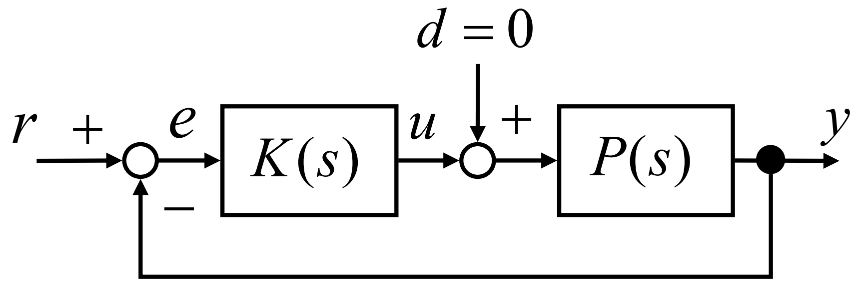
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s)$$ 加速度偏差定数

偏差定数

$K_p (= L(0))$, K_v, K_a : 大　　定常偏差 : 小

[例 4.3]

$$P(s)=\frac{1}{s},\quad K(s)=\frac{K_0}{s+1}\ (K_0>0)$$



$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$

位置偏差定数

$$K_p = L(0)=\infty$$

定常位置偏差

$$e_s=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}L(s)}=\frac{1}{1+L(0)}=\frac{1}{1+K_p}=0$$

（ K_0 の値に関係なく）

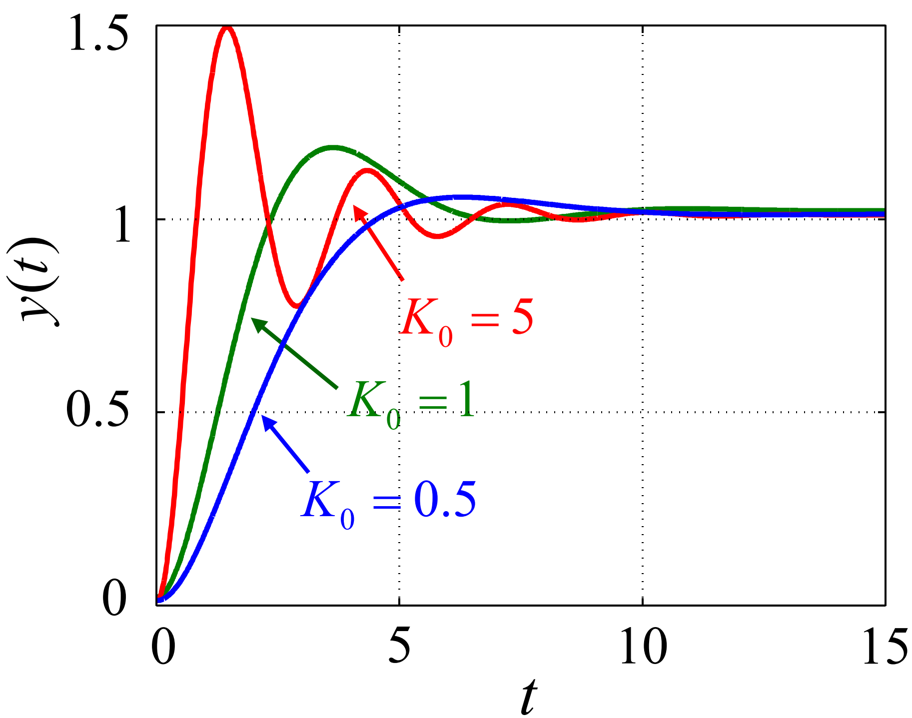


図4.4 (a) ステップ応答

$$L(s) = \frac{K_0}{s(s+1)}$$

速度偏差定数

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{K_0}{\cancel{s}(s+1)} = K_0$$

定常速度偏差

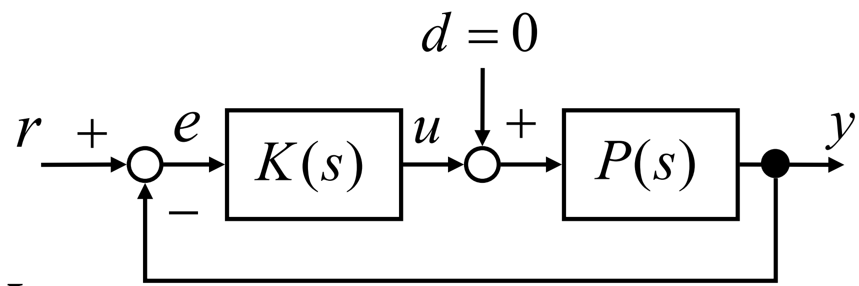
$$e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sL(s)} = \frac{1}{K_0}$$

加速度偏差定数

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 L(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot \frac{K_0}{s(s+1)} = 0$$

定常加速度偏差

$$e_s = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 L(s)} = \infty$$



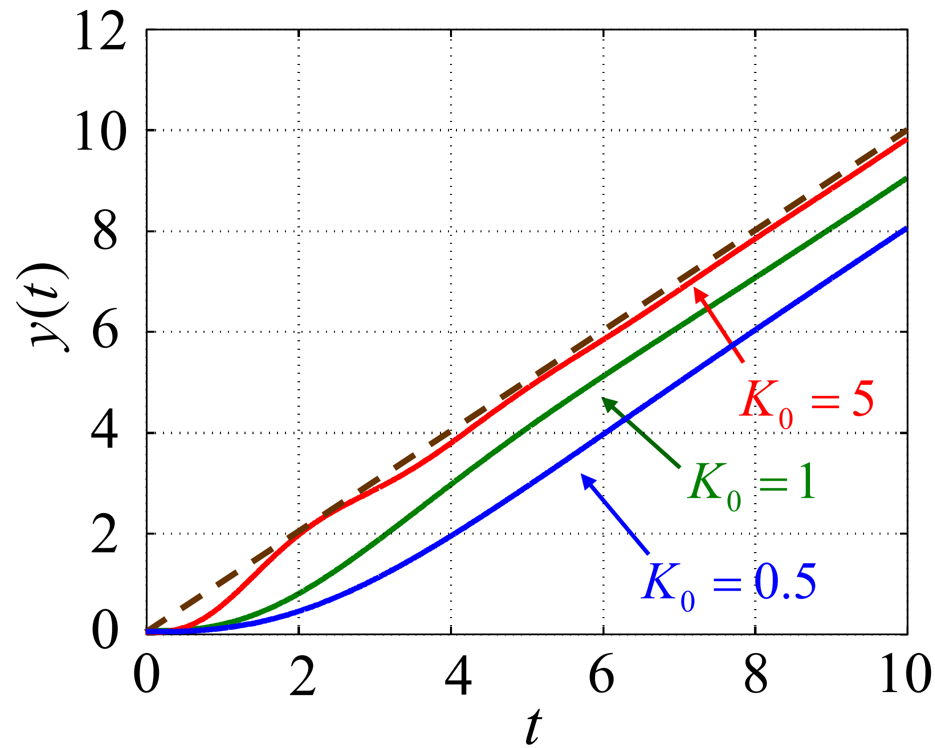


図4.4（b）ランプ入力応答

(一般に)一巡伝達関数 $L(s)=\dfrac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{s^l(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0)}$

$l=1$ のとき:

$L(s)$ は積分器 $\left(\dfrac{1}{s}\right)$ を 1 個含む

$$K_p = L(0) = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+K_p}=0$$

$l=2$ のとき:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot L(s) = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K_v}=0$$

$l=3$ のとき:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot L(s) = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K_a}=0$$

表4.1 制御系の型と定常偏差

制御系の型	$r(t)=1$	$r(t)=t$	$r(t)=\dfrac{t^2}{2}$
0 型	$\dfrac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1 型	0	$\dfrac{1}{K_v}$	∞
2 型	0	0	$\dfrac{1}{K_a}$

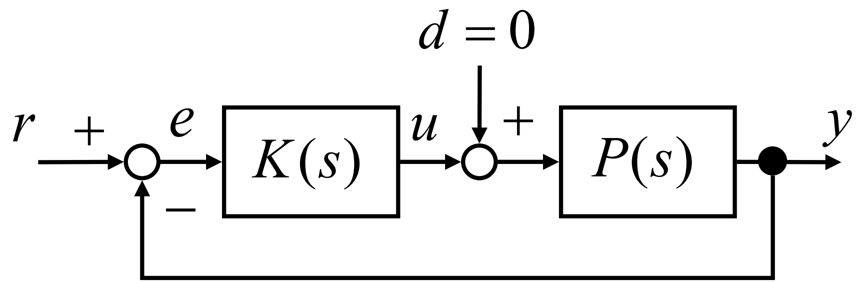
定常偏差をゼロにするためには

l 型(タイプ l)の制御系: $L(s)$ が l 個の積分器 $\left(\dfrac{1}{s}\right)^l$ をもつ

$\Rightarrow$ (係数の値に関係なく)常に, 定常偏差 $=0$

[例 4.3]（再考）

$$P(s)=\frac{1}{s},\ \ K(s)=\frac{K_0}{s+1}\ \ (K_0>0)$$



$$r(s)=\frac{1}{s}$$

$$L(s)=P(s)K(s)=\frac{K_0}{s(s+1)}$$ 1 型

K_0 の値に関係なく定常位置偏差 $=0$

$$L(0)=\infty \quad \left(\Leftrightarrow S(0)=\frac{1}{1+L(0)}=0\right)$$

目標値の周波数成分$(\omega=0)$に対して, ループゲインが無限大

第４章：フィードバック制御系の特性

4.1 感度特性（pp. 67～71）

キーワード： 感度，感度関数

4.2 定常特性（pp. 71～75）

キーワード：開ループ伝達関数（一巡伝達関数），定常偏差，l 型の制御系

学習目標：フィードバック制御系における感度関数について説明できる．定常偏差や偏差定数について理解し，フィードバック制御系の型について説明できる．

Reading Assignment #3

第 4 章 :フィードバック制御系の特性

4.2 定常特性(pp. 75～76)

キーワード: 定常偏差

(4.3 根軌跡(pp. 76～84)

キーワード: 特性方程式, 特性根, 根軌跡)

第 5 章 :周波数応答

5.1 周波数応答と伝達関数(pp. 87～90)

キーワード: 周波数伝達関数, ゲイン, 位相

学習目標: 定常偏差について説明できる. 根軌跡の基礎について説明できる. システムの周波数応答特性を説明できる.