

2019.5.10 力学基礎 1 (クラス N) 小問題 3

1. デカルト座標系 (x, y) を原点を中心に反時計回りに角度 θ だけ回転したデカルト座標系を (X, Y) とする。 (x, y) と (X, Y) の間の関係式は以下で与えられることを示せ。

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad Y = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

また、これを (x, y) について解くと

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

となることを示せ。

2. (x, y) 平面上の曲線

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1, \quad \text{ただし, } A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0 \quad (1)$$

は楕円を表わすことを示そう。そのための方針は、問 1 で求めた新しい座標系 (X, Y) では、曲線の方程式が

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

という明らかに楕円を表わす方程式で表わされることを示すことである。

(i) (1) 式を問 1 で求めた X, Y を使って表わせ。

(ii) (i) で求めた式で XY の係数がゼロとなるには θ が

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A - C}$$

という方程式の解であれば良いことを示せ。

(iii) (i) で求めた式の X^2 と Y^2 の係数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha &= A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta, \\ \beta &= A \sin^2 \theta - 2B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta \end{aligned}$$

となることを示せ。

(iv) (ii) で求めた θ で決まる新しいデカルト座標系 (X, Y) では、曲線の方程式は

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$$

となる。よって対応する曲線が楕円であるためには、 $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ でなければならない。この条件は

$$A + C > 0, \quad AC - B^2 > 0$$

と書かれることを示せ。