

第5回演習

問題 5.1. Rouché の定理を用いて、代数学の基本定理を証明せよ.

問題 5.2. $R > 1$ に対し, g は $|z| < R$ 上で正則かつ $|z| \leq R$ 上で $|g(z)| \leq 1$ を満たすとき, 以下を示せ:

(a) $|t| < 1$ を満たす任意の $t \in \mathbb{C}$ に対し, 方程式

$$z = tg(z)$$

は $|z| < 1$ 内で唯一解 $z = s(t)$ を持つ.

(b) $t \mapsto s(t)$ は $|t| < 1$ で正則関数である.

問題 5.3. 以下の二つの関数 f_1, f_2 はその定義域の共通部分で一致することを示せ.

$$f_1(z) = -\frac{\pi i}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (z-1)^j, \quad |z-1| < 1,$$

$$f_2(z) = \frac{\pi i}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (z+1)^j, \quad |z+1| < 1.$$

問題 5.4. $R > 1$ のとき, $f(z)$ は $|z| < R$ で有理型で, $|z_0| = 1$ なる点 z_0 でのみ 1 位の極を持つとする. $f(z)$ の $|z| < 1$ での冪級数展開を

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

としたとき, $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j / a_{j+1} = z_0$ となることを示せ.

(Hint: Laurent 展開と冪級数展開を $z = z_0$ の近傍で比較する.)

問題 5.5. 二つの非定数整関数 f, g において, 合成関数 $f \circ g$ が多項式であるならば, f, g 共に多項式であることを証明せよ.

問題 5.6. $0 < |\alpha| < 1$ とする. このとき

$$\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-\alpha|^2} = \frac{2\pi}{1-|\alpha|^2}$$

を示せ.

問題 5.7. $a > e$ ならば方程式 $e^z = az^n$ は $|z| < 1$ で n 個の解を持つことを示せ.

問題 5.8. 方程式 $z + e^{-z} = c$ ($c > 1$) は右半平面 $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ でただ一つの実数解を持つことを示せ.

問題 5.9. $a, b \in \mathbb{C}$ で $|a|^2 - |b|^2 = 1$ であるとき,

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{bz + a}$$

は単位円板 Δ からそれ自身の上への写像であることを示せ. また, 逆写像 φ^{-1} を a, b を用いて表せ.

問題 5.10. f は単位円板 Δ 上正則で $f(\Delta) \subset \Delta$ であるとする. このとき, 異なる 2 点 $z_1, z_2 \in \Delta$ が存在して $f(z_j) = z_j$ ($j = 1, 2$) であるならば $f(z) \equiv z$ であることを示せ.

(Hint : 問題 5.9 & $z_1 = 0$ ならば Schwarz の補題である.)