

第 2Q 演習 4

2Q-4.1. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$ を示せ .

2Q-4.2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ の値を求めよ .

2Q-4.3. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} = \frac{\pi}{4}$ を示せ .

2Q-4.4. 以下の積分の値を求めよ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx,$$

2Q-4.5. 以下の積分の値を求めよ :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} + \cos \theta}.$$

2Q-4.6. 以下の積分の値を求めよ :

$$\int_{|z|=1} \frac{z^6}{7z^7 - 1} dz,$$

2Q-4.7. 以下の積分の値を求めよ :

$$\int_{|z-100\pi|=\frac{199}{2}\pi} z \cot z dz.$$

2Q-4.8. 留数を用いて $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ の値を求めよ .

2Q-4.9. f を任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $f(n) = n^5$ かつ $f(-\frac{n}{2}) = n^7$ を満たす整関数とするとき , $g(z) = (f(z) - e)(f(z) - \pi)$ はいくつの零点を持つか .

2Q-4.10. $f(z) = 2 - 2z + z^2 + \frac{z^3}{81}$ に対し ,

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z) - 1} dz$$

の値を求めよ .

2Q-4.11. $|z| < 1$ 上の正則関数 f が $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{7}{n^3}$ (但し $n = 2, 3, 4, \dots$) を満たすとき , $f'''(0)$ を求めよ .

2Q-4. 12. 整関数 f が $|z| > 10$ 上で $|f(z)| \leq |z|^{23/3}$ を満たすとき, $f^{(8)}(10.0001)$ を計算せよ.

2Q-4. 13. $\int_{|z-\frac{\pi}{2}|=3.15} z \tan z dz$ の値を求めよ.

2Q-4. 14. 留数を用いて以下の積分の値を求めよ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

2Q-4. 15. 留数を用いて以下の積分の値を求めよ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

2Q-4. 16. 整関数 f が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Re} f(z) > -2$ かつ $f(i) = i + 2$ を満たすとき, $f(-i)$ を求めよ.

2Q-4. 17. $0 < |z| < 2$ 上の正則関数 f が, 任意の $z \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $f(\frac{1}{n}) = n^2$ かつ $f(-\frac{1}{n}) = n^3$ を満たすならば, f は 0 においてどのような特異点を持つか.

2Q-4. 18. $0 < |z| < 1$ 上の正則関数 f が $|w-1| < 2$ を満たす w を値として取らないとき, f の 0 での特異性について何が言えるか.