第 2Q 演習 3

2Q-3. 1. 次の各関数を指定された特異点を中心にして Laurent 展開せよ．またそれぞれの場合について，どのような特異点であるか述べ，収束領域を求めよ：

(a) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z=1$, **(b)** $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z=-2$, **(c)** $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$; $z=0$.

2Q-3. 2. 次の各関数を指定された特異点を中心にして Laurent 展開せよ．またそれぞれの場合について，どのような特異点であるか述べ，収束領域を求めよ：

(a) $(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$; $z=-2$, **(b)** $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z=3$.

2Q-3. 3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ を次の各領域において Laurent 展開せよ：

(a) $1<|z|<3$, **(b)** $|z|>3$, **(c)** $0<|z+1|<2$.

2Q-3. 4. 次の各関数を $z=0$ の回りで Laurent 展開し，$z=0$ がどのような特異点であるか答えよ：

(a) $\dfrac{1-\cos z}{z}$, **(b)** $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$.

2Q-3. 5. $\tan z$ を $z=\dfrac{\pi}{2}$ の回りで Laurent 展開をしたとき，以下を示せ：

(a) 主要部は $\dfrac{-1}{z-\pi/2}$ である．

(b) 級数は $0<\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<\dfrac{\pi}{2}$ において収束する．

(c) $z=\dfrac{\pi}{2}$ は 1 位の極である．

2Q-3. 6. $z=0$ から出る任意の半直線に沿って動いていけば，$|z+e^z|\to\infty$ であることを証明せよ．

2Q-3. 7. すべての非定数整関数（$=\mathbb{C}$ 全体で正則な関数）は無限遠点に特異点を持つことを証明せよ．またこの特異点の種類は何か．

2Q-3. 8. **(a)** $f(z)=e^{z/(z-2)}$ を $z=2$ の回りで Laurent 展開せよ．
(b) この級数の収束半径を決定せよ．
(c) $f(z)$ の特異点を分類せよ．

2Q-3. 9. $G(z)=\dfrac{\tan^{-1}z}{z^4}$ に対し，以下を答えよ：

(a) $G(z)$ の Laurent 展開を求めよ．

(b) この級数の収束領域を決定せよ．

(c) $2 \pm 2i$，$-2 \pm 2i$ に頂点を持つ正方形を C としたとき，$\displaystyle\int_C G(z)dz$ の値を求めよ．

2Q-3.10. $f(z)$ が 1 位の零点 $1-i, 1+i$ および 2 位の極 $-1+i, -1-i$ を持ち，この他に有限な特異点を持たないとする．さらに ∞ のある近傍で有界であるならば，この関数は任意の定数 κ に対し，

$$f(z) = \kappa \frac{z^2 - 2z + 2}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

で与えられることを証明せよ．

2Q-3.11. **(a)** $\dfrac{1}{\ln(1+z)}$ を $z = 0$ の回りで Laurent 展開せよ．

(b) 収束領域を決定せよ．

2Q-3.12. $f(z)$ を定数 0 でない $0 < |z - z_0| < R$ で正則であるとする．$\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$ ならば，ある適当な正整数 n に対して $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ とできることを証明せよ．但し $g(z)$ は z_0 で正則かつ $g(z_0) \neq 0$.

2Q-3.13. $z = 0$ に特異点に持つ関数 ze^{1/z^2}，$\dfrac{\sin^2 z}{z}$，$\dfrac{1}{z(4-z)}$ のおのおのについて以下を示せ：

(a) $z = 0$ の回りで Laurent 展開し，収束領域を決定せよ．

(b) $z = 0$ が除去可能特異点，真性特異点，または極であるか述べよ．

(c) 円 $|z| = 2$ に沿っての積分の値を求めよ．

2Q-3.14. $F(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則かつ周期 2π を持つとする（すなわち $F(z + 2\pi) = F(z)$）．このとき $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(z)e^{-inz}dz$ に対し，$F(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz}$ を証明せよ．この級数を $F(z)$ の **Fourier 級数**という．

2Q-3.15. 級数 $\sin\theta + \dfrac{1}{3}\sin 3\theta + \dfrac{1}{5}\sin 5\theta + \cdots$ は $0 < \theta < \pi$ のとき $\dfrac{\pi}{4}$ に等しく，$-\pi < \theta < 0$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}$ に等しいことを証明せよ．

2Q-3.16. $f(z)$ が，z_0 のある近傍から z_0 を取り除いた領域で正則かつ $\displaystyle\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ならば，$z = z_0$ は $f(z)$ の極であることを証明せよ．