第 2Q 演習 2

2Q-2.1. P を多項式，$C = \left\{ z \;\middle|\; |z-a| = r \right\}$（但し向きは反時計回り）に対し，
$\displaystyle\int_C P(z)d\overline{z}$ を求めよ．

2Q-2.2. D, R を領域とし，かつ $\overline{R}$ は D 内でコンパクトで境界 ∂R は有限個の C^1 級の曲線からなるとする．このとき $f \in C^1(D)$ に対し，以下を示せ：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_R \frac{1}{\zeta - z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy.$$

Hint. Stokes の定理（又は Green の定理）を用いる．

2Q-2.3. $D = \left\{ z \;\middle|\; \alpha_1 < \arg z < \alpha_2,\ 0 < |z| < \infty \right\}$（但し $\alpha_2 - \alpha_1 < 2\pi$）で f は正則であり，かつ

$$|f(z)| < \begin{cases} M_1|z|^{-1+\delta_1} & (0 < |z| \leq 1,\ z \in D) \\ M_2|z|^{-1-\delta_2} & (1 < |z|,\ z \in D) \end{cases}$$

となる $\delta_j, M_j > 0\ (j = 1, 2)$ が存在するとき，$J_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty f(z)dz$（但し $\arg z = \alpha,\ \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ に沿った積分）は収束し，α に依らないことを証明せよ．

2Q-2.4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^3}$ （但し積分路は $\arg z = \alpha$ の半直線）に対し，以下を示せ：

(a) $\dfrac{\pi}{3}$ の奇数倍となっていない α に対して収束する．

(b) (a) の積分は 3 つの異なる値しかとらない．

(c) (b) の値の関係を求め，$\alpha = 0$ での値を求めよ．

2Q-2.5. f は $|z-a| < r_0$ で正則とする．$0 < r < r_0$ のとき，以下を示せ：

(a) $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$

(b) $f(a) = \dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\iint_{|z-a|<r} f(z)dxdy$

2Q-2.6. 領域 D と $a \in D$ に対し，f が $D\backslash\{a\}$ で正則かつ $\displaystyle\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ のとき，$\widetilde{f}\big|_{D\backslash\{a\}} = f$ となる D 上の正則関数 $\widetilde{f}$ が存在することを示せ．

2Q-2.7. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z-2}dz$ を以下の各曲線について求めよ：

(a) C:円 $|z| = 3$,　**(b)** C:円 $|z| = 1$.

2Q-2.8. C が円 $|z|=5$ のとき，$\displaystyle\int_C \frac{\sin 3z}{z+\frac{\pi}{2}}dz$ の値を求めよ．

2Q-2.9. $\displaystyle\int_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$ を以下の各曲線について求めよ：
(a) C:円 $|z-1|=4$,　**(b)** C:楕円 $|z-2|+|z+2|=6$.

2Q-2.10. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1}dz$ を以下を頂点とする各四角形に沿って計算せよ：
(a) $2\pm i,\ -2\pm i$,　**(b)** $\pm i,\ 2\pm i$.

2Q-2.11. C を円 $|z|=3$，t を実数とするとき，$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz=\sin t$ を示せ．

2Q-2.12. C を円 $|z|=3$，t を実数とするとき，$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}dz$ を計算せよ．

2Q-2.13. C を円 $|z|=2$ とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^3}dz$ を求めよ．

2Q-2.14. $\displaystyle\int_0^{\pi} \log\sin\theta d\theta=-\pi\log 2$ を証明せよ．
Hint. $f(z)=\log(1+z)$ を考えよ．