2018 年 12 月 6 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 1

講義概要

■重要なポインタ

- `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2018/geom-2/` (この授業の公式ページ)
- `http://www.official.kotaroy.com/class/2018/geom-2/` (この授業のページ; ミラーサイト)
- `http://www.ocw.titech.ac.jp/` (東工大 OCW)
- 本館 2 階 231 (山田の部屋；提出物ポストはここ)
- 本館 3 階 332B (数学事務室；答案返却など)

■科目名など　幾何学概論第二 (MTH.B212)（第４四半学期・木曜日・3/4 時限・理学院数学系）

■担当者　山田光太郎（理学院数学系）kotaro@math.titech.ac.jp

■講義の概要　幾何学概論第一 (MTH.B211) に続き，主に以下の事項を学ぶ：正則曲面のパラメータ表示，第一基本形式・長さ・角度・面積, 第二基本形式・主曲率・ガウス曲率・平均曲率・測地線，ガウス-ボンネの定理，曲面論の基本定理の意味. 古典的な，ユークリッド空間の曲面の微分幾何学の基本事項を身につけるとともに，現代の微分幾何学を学ぶための準備を行う.

■到達目標　3 次元ユークリッド空間内の曲面の微分幾何学の基本的な事項，とくに曲面の曲率の概念と，その幾何学的な性質を学ぶ.

- 曲面のパラメータ表示とパラメータ変換，パラメータによらない量の概念を知る.
- 曲面の曲率と曲面の形状の関係を知る.
- 曲面の大域的性質と局所的性質の具体例を知る.
- 理論の具体例を計算によって確認する.

■教科書　梅原雅顕・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版（裳華房）

正誤表：`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html`

■成績評価の方法

- **授業日程**の項にある定期試験を**受験**することが単位を得るための必要条件です．(十分条件ではありません)．やむを得ない理由で試験を受けられない方は（可能な限り）事前に電子メイルにて講義担当者までご連絡ください．連絡なしに試験に欠席した方は，原則として単位を得る権利を失います.
- 成績は**主として定期試験**の得点で決めます．定期試験の成績が余りよくない場合（とくに定期試験だけでは不合格になってしまう場合）に以下の「提出物」の成績を考慮します.
- 授業後に (1) 講義資料にあげた**問題**のうち一つの解答 (2 点); (2) **前回までの授業内容に対する質問**あるいは**講義・講義資料の誤りの指摘** (3 点) を提出してください．これを 1 回 5 点満点で評価します.
  提出方法　所定の用紙に記入し，授業の翌日 **金曜日の 17 時 00 分**までに山田の部屋（本館 2 階 231）

の前のポストに提出してください．所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません．

キーワード　毎回，講義のあとに，OCW に登録したメイルアドレス（既定値は m アドレス）に**キーワード**を送信します．提出用紙の該当欄にキーワードを記入してください．

注意　いただいた質問にはできる限り回答します．なお，質問および回答の内容は**公開します**のでご了承下さい．とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので，誤字に気をつけてください．

おまけ　提出用紙には授業に関する感想，意見の記入欄を設けます．いただいた御意見は個人が特定できない形で公開いたします．なお，ご意見等の内容は成績に一切影響いたしません．

- いわゆる出席点はつけません．したがって出席もとりません．しかし，出席と関わりなく **授業時間中に連絡したことは伝わっている** とみなします．
- 試験後，答案を返却し，成績を確認していただきます．採点，成績に関する**クレイム・質問は期間を限って受付け**ます．なお，成績に関する議論は，提出されたものに**書かれたもののみを材料**とします．

■授業日程

		授業内容
11 月 29 日	休	休講
12 月 06 日	1	曲面のパラメータ表示；面積・長さと第一基本量 (§§6/7)
12 月 13 日	2	第一基本形式・第二基本形式 (§§7/8)
12 月 20 日	3	主曲率・ガウス曲率・平均曲率 (§8)
01 月 10 日	4	主方向・漸近方向 (§9)
01 月 17 日	5	測地線 (§10)
01 月 24 日	6	ガウス・ボンネの定理 (§§10–11)
01 月 31 日	試	**定期試験**
02 月 07 日	7	定期試験返却とコメント（補講日）

1 曲面のパラメータ表示；面積・長さと第一基本量

■曲面の表示

- なめらかな 2 変数関数のグラフ $z = f(x, y)$.
- 陰関数 $F(x, y, z) = 0$; 特異点：$\operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z) = \mathbf{0}$ となる点.
- パラメータ表示 $p(u, v) = \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr)$; 特異点：$p_u$ と p_v が 1 次従属となる点.
  曲面の正則なパラメータ表示（正則曲面）とは，各 (u, v) で $p_u(u, v)$, $p_v(u, v)$ が 1 次独立となること.

問 1.1.
- なめらかな 3 変数関数 $F(x, y, z)$ に対して，$S := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ を考える．$\mathrm{P} = (x_0, y_0, z_0) \in S$ において $F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ ならば，P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ と (x_0, y_0) の近傍 $D \subset \mathbb{R}^2$ およびなめらかな 2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ が存在して $S \cap U = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ となることを示しなさい．このことを「S は P の近傍でなめらかな関数のグラフで表される」という．
- $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義されたなめらかな写像 $p\colon U \ni (u, v) \mapsto \bigl(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$ を考える．点 (u_0, v_0) で $p_u(u_0, v_0)$, $p_v(u_0, v_0)$ が一次独立であるとき，
  - (u_0, v_0) において $\left(\det\begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right) \neq (0, 0, 0)$ であることを示しなさい.
  - 上の問のベクトルの第 3 成分が 0 でないとき，(u_0, v_0) の近傍 $V \subset U$，$\mathbb{R}^2$ の開集合 D となめらかな関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ が存在して，[1] $p|_V$ は単射，[2] $p(V) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ となる．

■パラメータ変換

定義 1.2. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$\varphi\colon D \ni (\xi, \eta) \longmapsto (u, v) = \bigl(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\bigr) \in U \tag{1.1}$$

が**微分同相写像** diffeomorphism であるとは，[1] φ は全単射．[2] φ と φ^{-1} はともに C^∞-級となること．

問 1.3.
- 式 (1.1) の φ が微分同相写像ならば，D の各点で次が成立することを示しなさい：

$$J := \det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列式 (Jacobian) という．}) \tag{1.2}$$

- 式 (1.1) の φ で，全射かつ D の各点で (1.2) を満たし，単射でないものの例を一つあげなさい.
- 式 (1.1) の φ で全単射，C^∞-級かつ φ^{-1} が C^∞-級でない例を一つあげなさい.

問 1.4. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，(1.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde{p}(\xi, \eta) := p\bigl(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\bigr)$ とおくと，$\tilde{p}\colon D \to \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい．この $\tilde{p}$ を「p からパラメータ変換 φ で得られる」という．誤解の恐れがないときは，$\tilde{p}(\xi, \eta)$ を $p(\xi, \eta)$ と書くことがある.

■長さ 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上でパラメータ表示された正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ において，平面上の領域 U は曲面を表す「地図」と考える．領域 U 上の曲線 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ に対して $\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t) = p(u(t), v(t))$ は地図上の道に対応する実際の曲面上の道を与える．この状況の下，チェイン・ルールから

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t) = \frac{\partial p}{\partial u}(u(t), v(t))\frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial p}{\partial v}(u(t), v(t))\frac{dv}{dt}(t)$$

2018 年 12 月 6 日

となるので，t の動く区間 $[a,b]$ に対応する曲線 $\hat{\gamma}$ の長さは

$$\mathcal{L}(\hat{\gamma}) = \int_a^b \left|\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1.3}$$

で与えられる．ただし

$$E := p_u\cdot p_u, \quad F := p_u\cdot p_v, \quad G := p_v\cdot p_v \quad \left(p_u := \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_v := \frac{\partial p}{\partial v}\right) \tag{1.4}$$

である．これらの (u,v) の関数 $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ を曲面 $p(u,v)$ の**第一基本量**という．

■面積　正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ ($U\subset\mathbb{R}^2$ は領域) に対して，有界閉集合 $\overline{V}\subset U$ をとるとき曲面の $\overline{V}$ に対応する部分の面積は，次で与えられる：

$$\mathcal{A}(\overline{V}) := \iint_{\overline{V}} |p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\, du\, dv.$$

問題

1-1 関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフ （回転放物面）の $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ に対応する部分の面積を求めなさい．

1-2 正則曲面のパラメータ表示 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ の第一基本量を E, F, G とする．ただし $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で，U の座標を (u,v) で表す．さらに (u,v) 平面上の曲線 $\gamma(t)=(t,0)$ の，区間 $[\varepsilon,1]$ （$\varepsilon\in(0,1)$）に対応する曲面上の曲線の長さを l_ε とおく

(1) 実数 m に対して $E=G=r^m$，$F=0$ が成り立っているとする．ただし $r=\sqrt{u^2+v^2}$．このとき $\lim_{\varepsilon\to+0} l_\varepsilon$ が発散するための条件を求めなさい．（このとき「$\gamma(t)$ $(0<t\leqq 1)$ の長さは正の無限大である」ということにする．）

(2) m を (1) の「発散する」条件を満たす実数とし，$F=0$ かつ

$$\frac{E(u,v)}{(u^2+v^2)^{m/2}}, \qquad \frac{G(u,v)}{(u^2+v^2)^{m/2}}$$

が原点の近傍で非有界であるとする．U 上の曲線 $\sigma(t)=(u(t),u(t))$ $(0<t\leqq 1)$ が $\lim_{t\to+0}\sigma(t)=(0,0)$ を満たすとき，対応する曲面上の曲線の長さは正の無限大に発散することを示しなさい．

1-3 パラメータ表示された正則曲面 $p\colon U\to\mathbb{R}^3$ の第一基本量を E, F, G とする．

(1) $EG-F^2>0$ であることを示しなさい．

(2) U に含まれる有界閉集合 $\overline{V}$ に対して，$\overline{V}$ に対応する曲面の部分の面積は

$$\iint_{\overline{V}} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

となることを示しなさい．

(3) 平面上の長さ $\mathcal{L}$ の閉曲線 $\gamma(s)$ （s は弧長）の重心とは，

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}} \gamma(s)\, ds$$

で与えられる平面上の点である．

xz 平面の上半平面 $\{(x,z)\,|\,z>0\}$ 上の閉曲線 $\gamma(s)$ を x 軸の回りに回転して得られる曲面の面積は，γ の重心が回転した道のりと γ の長さの積である．このことを示しなさい．