2018 年 10 月 25 日 (2018 年 11 月 01 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 4

お知らせ

- 前回の講義資料 3 の冒頭に，提出物の様式に関するお知らせを載せましたが，今回は提出用紙を片面印刷し 2 枚をクリアファイルに入れて提出した方がいらっしゃいます．答案の整理に余計な時間を使うのはいやなので，無視することにします．再度申し上げます：提出物は指定の様式で提出してください．
- 次回 11 月 1 日の講義の際に**定期試験予告**を行います．皆様お誘い合わせの上ご出席ください．

前回までの訂正

- 講義資料 3, 1 ページ, 前回までの訂正の最後：テキスト 282 ページ，下から 7 行目 ⇒ テキスト 282 ページ，下から 8 行目
- 講義資料 3, 2 ページ, 質問 3 の下から 2 行目：なｒない ⇒ ならない
- 講義資料 3, 4 ページ，質問 29：の仰いで ⇒ のぞいて
- 講義資料 3, 5 ページ，5 行目：14 ページ (2.7) 式 ⇒ 13 ページ (2.7) 式

授業に関する御意見

- 金曜の 16:35 まで授業があるので提出を 18:00 までにしていただきたいです．
  山田のコメント： こちらの気が向けば 18 時くらいに回収しますが，スケジュールの関係上，お約束はできません．
- 問 3-3 (2) が分かりませんでした．$\kappa(s)$ は s によって変わるのに，A, $\boldsymbol{b}$ という s に関係ないものを κ で表すことは可能なのでしょうか． **山田のコメント：** はい．A や $\boldsymbol{b}$ が存在することは平面曲線の基本定理からわかる，ということはいいですね．
- 3-1 を愚直に $\dot\gamma$, $\ddot\gamma$, $|\dot\gamma|$ を計算したら爆発してしまったんですが，うまい方法があるのでしょうか．
  山田のコメント： 爆発せずに有界な関数になります．
- 例が多いので，新しい概念がのみ込みやすい．また誤解もしづらい． **山田のコメント：** よかった．
- 授業中での理解が結構難しい． **山田のコメント：** Sorry. それでは授業時間外に理解してくださいね．
- 先生が板書していらっしゃるとき，背中が我々から見えているわけですが，2 回ほど向かって右側のサスペンダーがねじれていてオシャレなアシンメトリーになっています．新しい定理や概念を習うので，色々とわけわからなくなってきました...
  山田のコメント： 自発的対称性の.../どの科目も新しいことを習うのでは?
- 毎週，質問と回答をパソコンで入力するのが大変そうだと思いました．回転数が面白いと思いました．
  山田のコメント： それほどでもないです（総計 2 時間くらい）/ 今回少し扱います．
- 今回はないです． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： “弧長とは限らない助変数で表された曲線” というのがどうもピンときません．それらは弧長パラメータに直すのが難しいとありましたが，つまり $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ の形に書くのが難しいということですか?

お答え： パラメータ変換 $s = s(t)$ を知っている関数で表せないこともある，ということを説明したつもり．

質問 2： s が γ の弧長であるということを $|\frac{d\gamma}{ds}| = 1$ であると定義しましたが，そのような弧長パラメータはたくさんとれますが，その際（t, s を弧長パラメータとすると）$\kappa_s(s) = \det(\frac{d}{ds}\gamma, \frac{d^2}{ds^2}\gamma) = \frac{1}{|\frac{d\gamma}{dt}}|^3 \det(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d^2\gamma}{dt}) = \kappa_t(t)$ となるので，曲率は弧長パラメータの表示によらず，曲線に応じて固有の値であるということでしょうか．

お答え： そうです．ご質問の状況で $\frac{dt}{ds} = 1$ というのはわかっていますね．

質問 3： 曲率を弧長パラメータ s と一般のパラメータ t で表すと $\kappa(s) = \cdots = \det(\gamma', \gamma'')$，$\kappa(t) = \det(\dot\gamma, \ddot\gamma)/|\dot\gamma|^3$ と

なりますが，$\kappa(t)$ に現れる $1/|\dot\gamma|^3$ は幾何的に何を表しているのでしょうか．パラメータ変換前後での方向ベクトルと法線ベクトル張る平行四辺形の面積（原文ママ）の拡大率を表していると思うのですが，その拡大率が $1/|\dot\gamma|$ となる直観的な理由を知りたいです．

お答え： 「方向ベクトルと法線ベクトル」は向きしか与えていないと思いますが，どういう平行四辺形を考えていますか？これらのベクトルは直交しますから，長方形になるはずですが（もちろんそれも平行四辺形です）．考えている平行四辺形を具体的に述べてくださいね．指数の 3 は $\det(\dot\gamma,\ddot\gamma)$ にある“ドット”の個数です．3 にすると，この値がパラメータによらなくなるのです．

質問 4： 曲率が無限大となる点が存在しますか？

お答え： 何の中にですか? 正則曲線の曲率の式をよくみて，正則曲線の曲率が無限大になる場合があるかどうか考えましょう．

質問 5： 曲率は曲率半径の逆数で定義すると常に正であり，講義中のように $\boldsymbol{e}'=\kappa\boldsymbol{n}$ で定義すると負になりえますが，やはり微分幾何で学ぶ上では後者の定義の方がより一般的ですか？

お答え： 文脈による．この講義では平面曲線の曲率は符号つきで考える．

質問 6： 問題 3-1 の曲率関数の積分の図形的意味は何なのか（あるのか）気になりました．

お答え： 速度ベクトルが x 軸の正の向きと成す角 $\theta=\theta(s)$ は曲率関数 $\kappa(s)$ の原始関数ですね．そのことから何がわかりますか？

質問 7： 今回の課題 3-1 のレムニスケートの方の曲率がとても煩雑になってしまい，計算できませんでした．曲率の計算を効率的に行う方法はありませんか?

お答え： 決して大変な計算とは思いません．まずは定義どおりにやってみよう．

質問 8： 計算し終えたあとに教科書を見たら意味が書いてあって感動しました．放物線 $(x,x^2/2)$ $(-\infty<x<\infty)$ で上記の値を計算したら $\pi/2$ となったのですが，この場合の解釈はありますか?

お答え： この場合 $\int\kappa(s)\,ds=\pi$ ですね．$x\to\pm\infty$ のとき，方向ベクトルはどういう挙動を示しますか?

質問 9： 3-2 で「円 C_t は $t\to 0$ とすると」とありますが，一般に（パラメータ付けされていない）曲線の属 C_t $(t\in\mathbb{R})$ に対して，この族の連続性のようなものが定義できるのですか．

お答え： 良い質問ですね．一般の曲線族の収束の概念にはさまざまなものがありそうです．しかし，ここでは円なので，C_t の中心 P_t と半径 R_t の極限を考えることができます．

質問 10： 正則にパラメータづけられた“平面曲線”の“正則に”が分かりません．

お答え： 10 月 11 日の講義内容.

質問 11： 弧長パラメータを用いた具体例を教えてください．

お答え： テキスト 27 ページの問題 5.

質問 12： $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ が与えられていたときに弧長関数 $s(t)$ を求める方法が良くわからなかった．(2.1) を使うのか.

お答え： はい．

質問 13： クロソイド曲線が高速道路のカーブに用いられているのは有名な話ですが，このように曲率は私達の私生活（原文ママ）に大きな利益をもたらしていると思います．高速道路やジェットコースター以外にも曲率の応用例はあるのでしょうか．

お答え： 曲線を「円」で近似するとき，もっとも良く近似する円は曲率円．ところで「私生活」という語の使い方がおかしいと思います．

質問 14： 曲率を日常的に使用している例はありますか?

お答え： 山田はこのように日常的に使用しています．あなたの日常はしらないので分かりません．

質問 15： 今回の講義で微分方程式の話がとてもおもしろかったです（sin-Gordon-equation（原文ママ：sine-Gordon. . . ?））今回の講義で微分方程式についてとても興味をもったのですが，有名でオススメな本等ありましたら教えてください！

お答え： たとえば，V. I. Arnol'd の本（翻訳もある）.

質問 16： ε-δ 論法を「コーシー流」と呼ぶのはなぜですか．

お答え： Cauchy がこういうことをいいだした，と言われているからだと思います．

質問 17： $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 写像としたとき，$\frac{\frac{F'}{2}}{\sin\frac{F}{2}}$ の原始関数の 1 つが $\log\tan\frac{F}{2}$ であることはどうやって発想すればよいのですか（原文ママ：$\log\tan\frac{F}{4}$ のはず）.

お答え： 発想も何も，こういうのって覚えてません？まず，置換積分法の公式から $(\int \frac{dx}{\sin x})|_{x=F/2}$ を求めればよいというのはよいですね．ここが駄目だとまずいので，時間をかけて良く考えてごらんなさい．したがって，$1/\sin x$ の原始関数 $\log\tan\frac{x}{2}$ の $x = F/2$ とおいたもの．この原始関数を覚えていないのなら，「三角関数の有理式は $s = \tan\frac{x}{2}$ と置換すれば有理関数の積分に帰着できる」という微積分の教科書に書いてあった定理を用いればよい．

質問 18： 曲線から曲面へ進んでいくときに特に気をつけるべきことを 1 つ教えていただけますか？

お答え： あなたがそのあたりでどれくらい経験を積んでいるかによって答えが変わります．全くの初心者ならあらゆる所に気をつけなければなりません．実は 10 月 18 日の講義で「曲面の場合はこうしない」ということを一言だけ口走ったんですが，覚えてます？

質問 19： 授業を聞いて思ったのですが，今やっていることは直観的な定義を数学的な定義に落とし込む作業なのでしょうか（正則なパラメータ表示されたものは少なくとも曲線と呼べるとか，曲線が同じ時は曲率が同じということだとか）．この場合，直観的には一致するが定義として一致しない例があるのではないでしょうか．つまり，グラフ =（その曲線の通る点の全体）は一致しても曲線として同じでない場合は別々のものとして扱いますか? 例として $\mathbb{R}^2$ を埋め尽くすような一致しない（原文ママ；何と一致しないのか）曲線があったらそれらを区別するのでしょうか．（空間充てん曲線というものを聞いたことがあるので聞いてみました）．

お答え： あなたが言っている「直観的定義」がなにを指しているかわからないのでご質問の意味がとれません．たとえば「曲線の直観的定義」とはなんですか？定義なので言葉で述べてもらう必要なのでは？こういう議論をさけるためにこの講義では曲線を定義「しない」のです．ちなみに空間充填曲線は正則にパラメータづけることはできないので，この講義で扱う対象からはずれています．（これは，その対象がつまらないものということではなく，ここで説明したい方法が適用できない，というだけのことです）．

質問 20： 計算力はやはり鍛えた方がよいですか?

お答え： あなたがいらないと思えばいらない．そういうものが必要のないところで生きていけばよろしい．

4 平面曲線の曲率

■曲率関数の性質

- パラメータのとり方によらない（標準的なパラメータに変換して定義しているから）.
- パラメータを s から $-s$ に変更する（曲線の向きを反転させる）と曲率は符号を変える.
- 曲線に回転と平行移動を施しても曲率は不変（テキスト 21 ページ，系 2.7；証明は後半）
- 曲線をある直線に関して折り返すと曲率は符号を変える（テキスト 27 ページ，問題 4).
- 半径 $a>0$ の左回り（右回り）の円の曲率は $1/a$ $(-1/a)$，直線の曲率は 0（テキスト 13 ページ，例 2.1).
- 曲率円は曲線と 2 次の接触（テキスト 16 ページ，定義 2.3）をする，すなわち曲線を最もよく近似する円（テキスト 17 ページ，定理 2.4).
- ガウス写像と曲率.

■フルネの公式

- フルネ枠（テキスト 22 ページの (2.15) 式に現れる $\mathcal{F}$）
- フルネの公式（テキスト 21 ページ，式 (2.14), 22 ページ (2.15)）
- 平面曲線の基本定理

■閉曲線 （概略のみを扱う）

- 回転数（テキスト 29 ページ）
- 単純閉曲線と回転数（テキスト 31 ページ，定理 3.2）
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数（テキスト 33 ページ，定理 3.3）

問題

4-1 s を弧長パラメータとし，曲率関数が $\kappa(s)=-\operatorname{sech} s$ となる[*1] ような曲線のパラメータ表示 $\gamma(s)$ を求めなさい.

4-2 正則にパラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の左向き単位法線ベクトル場を $\boldsymbol{n}(t)$ と書くとき，任意の実数 u に対して $\sigma_u(t)=\gamma(t)+u\boldsymbol{n}(t)$ であたえられる曲線 σ_u を $\gamma(t)$ の**平行曲線**とよぶ. $t=t_0$ における γ の曲率が 0 でないとき，t_0 が $\sigma_u(t)$ の特異点になるような u の値を求めなさい.

2018 年 10 月 25 日 (2018 年 11 月 01 日訂正)

[*1] $\operatorname{sech} s = 1/\cosh s$.