

第7回

光ファイバのモード特性 (波動方程式)

講義スケジュール(1)

植之原	日付	教科書	内容
第1回	11/29	OCW-i掲載資料(第1回)の精読と理解	光通信システム(基礎的なこと)
第2回	12/ 3	OCW-i掲載資料(第2回)の精読と理解	光通信システム (長距離海底系, コア・メトロ系)
第3回	12/ 6	OCW-i掲載資料(第3回)の精読と理解	光通信システム (アクセス系・データセンタネットワーク系)
第4回	12/10	OCW-i掲載資料(第4回)の精読・PN符号の説明	光変調符号
第5回	12/13	OCW-i掲載資料(第5回)の精読・信号の数式・スペクトル表現	光変復調技術(強度変調・位相変調)
第6回	12/17	OCW-i掲載資料(第6回)の精読・機能ブロックの理解	光変復調技術 (デジタル・コヒーレント関連技術)
第7回	12/20	OCW-i掲載資料(第7回)の精読・波動方程式の解法・モードの理解	光ファイバのモード特性(波動方程式)
第8回	12/24	OCW-i掲載資料(第8回)の精読・分散と帯域の関係式	ファイバの伝送特性(分散・分散伝送限界)

講義スケジュール(2)

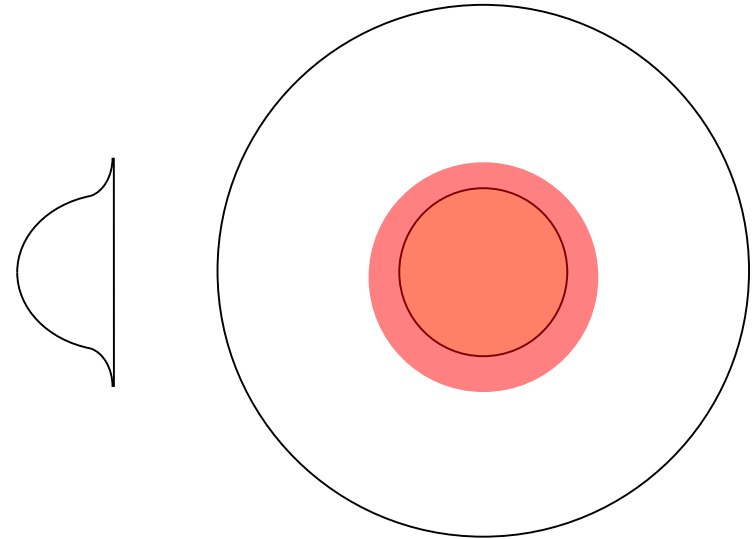
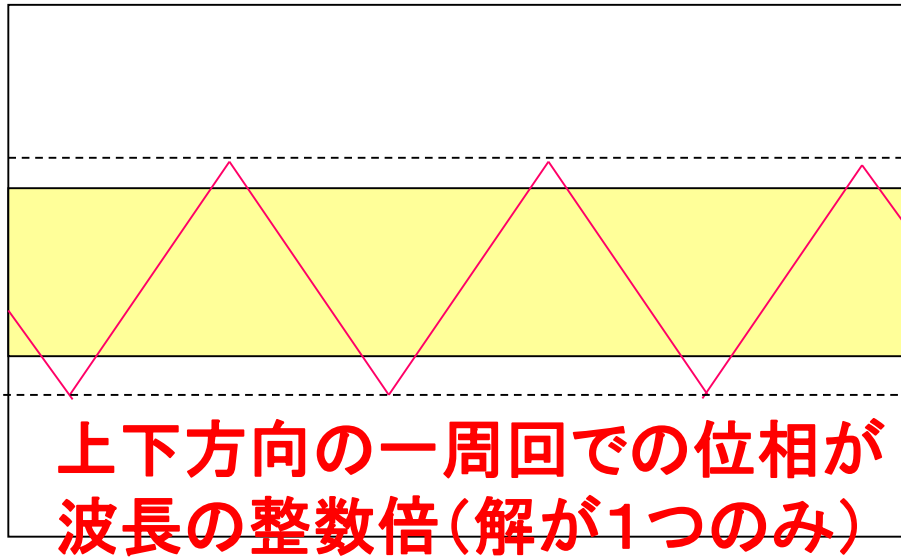
小山	日付	教科書	内容
第9回	1/7	OCW-i掲載資料(第9回)の精読・分散補償の概念の理解	ファイバの伝送特性(分散補償技術)
第10回	1/10	OCW-i掲載資料(第10回)の精読・動作原理の説明	光増幅器
第11回	1/17	OCW-i掲載資料(第11回)の精読・ビット誤り率の計算	ビット誤り率(強度変調・直接検波)
第12回	1/21	OCW-i掲載資料(第12回)の精読・ビット誤り率の相対比較	ビット誤り率 (コヒーレント、多値変調、光増幅)
第13回	1/24	OCW-i掲載資料(第13回)の精読・WDMの性能的課題	波長多重(WDM)伝送 (分散マネジメント技術)
第14回	1/28	OCW-i掲載資料(第14回)の精読・WDMの変調方式による性能差の理解	波長多重(WDM)伝送(変調技術)
第15回	1/31	OCW-i掲載資料(第15回)の精読・理解	光スイッチング技術・ 最新の光通信関連技術

光ファイバケーブル



シングルモードファイバ・マルチモードファイバ とは？(1)

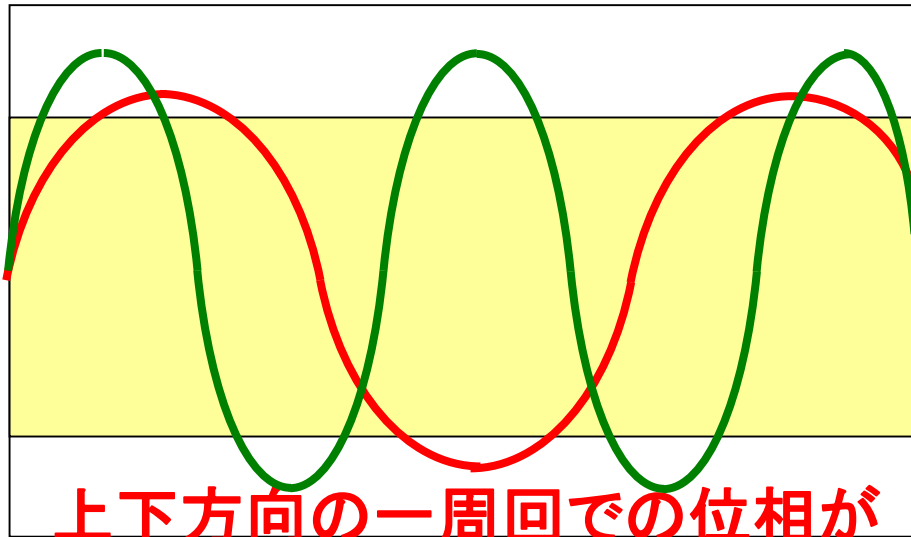
シングルモードファイバ(コア径約 $9\mu\text{m}$)



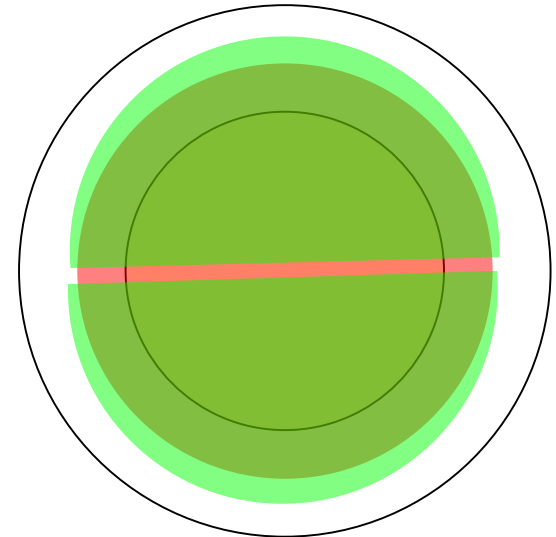
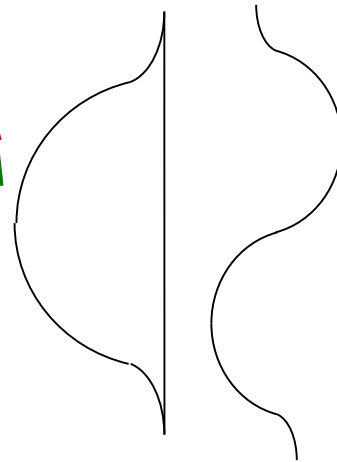
- ・一つの伝送モードのみ → 異なるモード間の時間の影響なし
- ・長距離伝送向き

シングルモードファイバ・マルチモードファイバ とは？(2)

マルチモードファイバ(コア径50/62.5 μm)



上下方向の一周回での位相が
波長の整数倍(解が複数)



- ・複数の伝送モードが許される → 異なるモード間の時間差
- ・短距離／低コスト用途向き

波動方程式の導出

マクスウェルの方程式(1)

$$\text{マクスウェルの方程式} \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (7.1) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & (7.2) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 & (7.3) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & (7.4) \end{array} \right.$$

仮定

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_0 n_i^2 \quad (i=1,2) \quad (n_i : \text{屈折率}) \\ \mu = \mu_0 \quad (\text{非磁性体}) \\ \sigma = 0 \quad (\text{絶縁体, } J=0) \end{array} \right\} \quad (7.5)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{電界と磁界の時間依存性} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^0(x, y, z)e^{j\omega t} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

マクスウェルの方程式(2)

式(7.5), (7.6)を式(7.1), (7.2)に代入

$$\nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 H^0 \quad (7.7)$$

$$\nabla \times H^0 = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 \quad (7.8)$$

電界の式

式(7.7)の両辺に $\nabla \times$ を作用させると、

$$\nabla \times \nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 \nabla \times H^0 \quad (7.9)$$

$$\text{左辺} = \nabla(\nabla \cdot E^0) - \nabla^2 E^0$$

式(7.3)より $\nabla \cdot D = \nabla \cdot (\varepsilon E) = \varepsilon \nabla \cdot E + (\nabla \varepsilon) \cdot E = 0$ だから、

$$\nabla \cdot E = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot E \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot E^0 = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot E^0$$

(時間項削除)

マクスウェルの方程式(3)

$$\text{よって左辺} = -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^2}{n_i^2} \cdot E^0\right) - \nabla^2 E^0$$

式(7.9)の右辺に式(7.8)を代入すると、

$$\text{右辺} = -j\omega\mu_0 \cdot j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0$$

よって、

$$\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0 = -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^2}{n_i^2} \cdot E^0\right) \quad (\text{波動方程式}) \quad (7.10)$$

右辺は屈折率の空間依存性の項なので、屈折率の一樣な媒質あるいは屈折率差が数%と小さい媒質については $\nabla n_i^2 = 0$ より

$$\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0 = 0 \quad (7.11)$$

マクスウェルの方程式(4)

磁界の式

電界の式の導出と同様に式(7.8)の両辺に $\nabla \times$ を作用させると、

$$\nabla \times \nabla \times H^0 = j\omega \varepsilon_0 \nabla \times (n_i^2 E^0)$$

$$\text{左辺} = \nabla(\nabla \cdot H^0) - \nabla^2 H^0 = \nabla\left(\frac{\nabla \cdot B^0}{\mu_0}\right) - \nabla^2 H^0 = -\nabla^2 H^0$$

($\nabla \cdot B = 0$ を使用)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= j\omega \varepsilon_0 n_i^2 (\nabla \times E^0) + \nabla n_i^2 \times j\omega \varepsilon_0 E^0 \quad (\text{ベクトル公式より}) \\ &= \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 H^0 + \frac{\nabla n_i^2}{n_i^2} \times (\nabla \times H^0) \cong \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 H^0 \end{aligned}$$

よって、

$$\nabla^2 H^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 H^0 = 0 \quad (7.12)$$

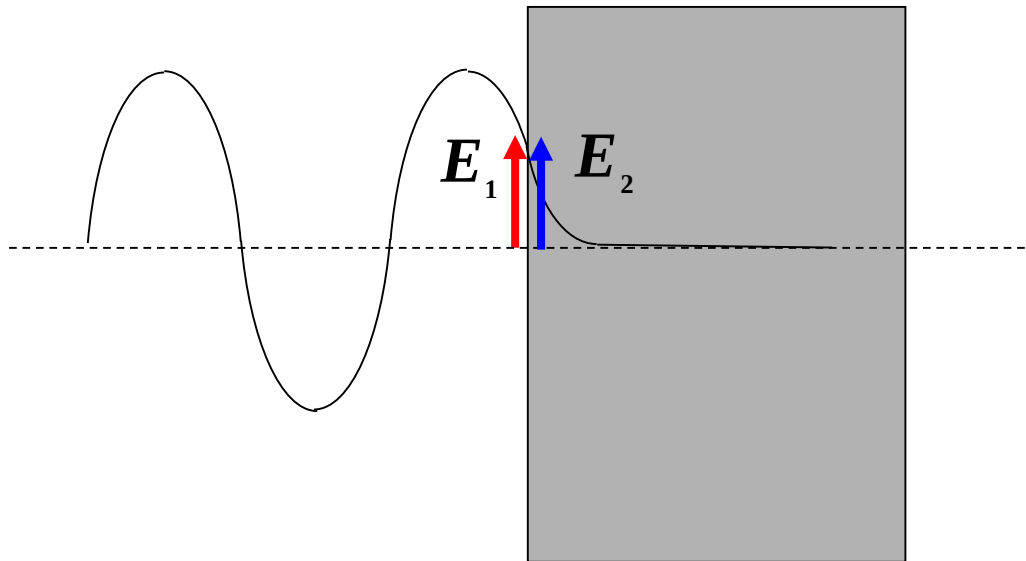
※時間依存の項は場所依存の解に $e^{j\omega t}$ を加えればよい。₀₁

解法(1):スラブ導波路

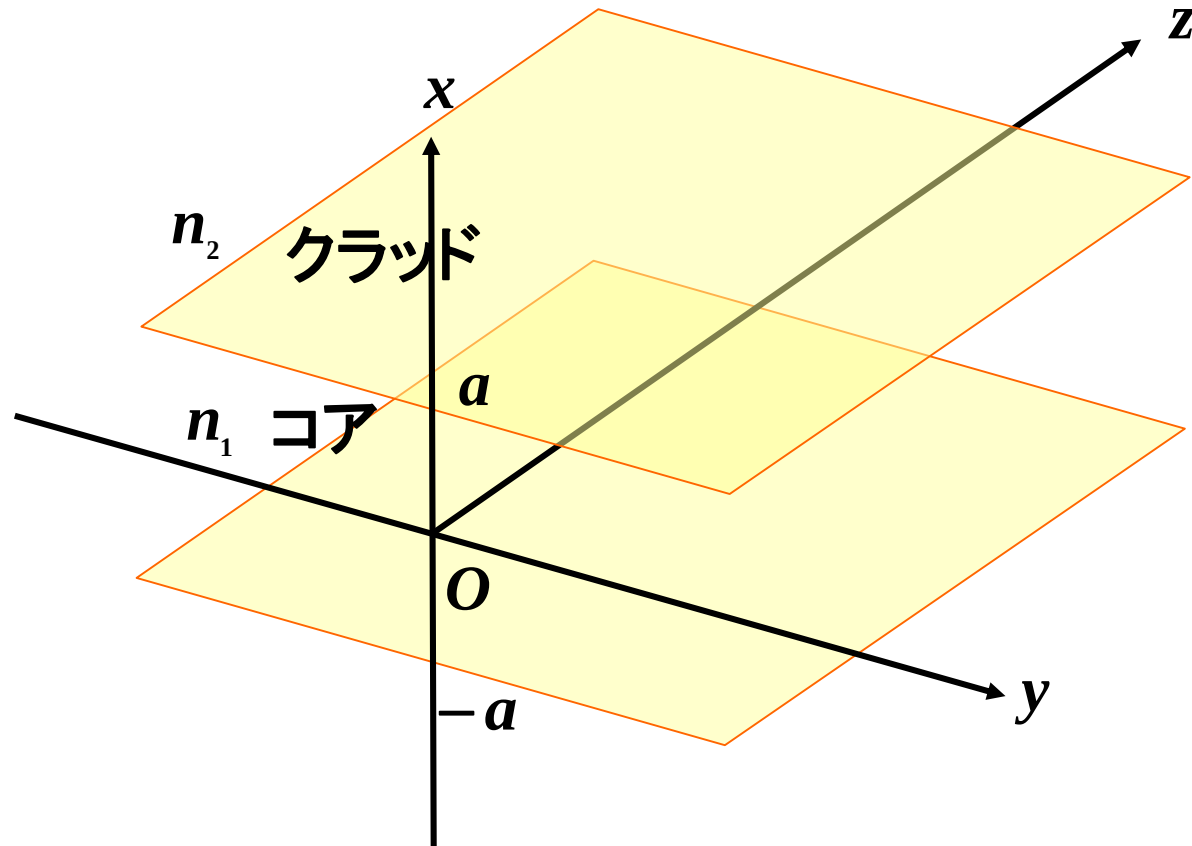
不連続部での境界条件

n を境界面に対する単位法線ベクトルとすると、

$$\begin{cases} (E_1 - E_2) \times n = 0 & : \text{電界の接線成分が等しい} \\ (H_1 - H_2) \times n = 0 & : \text{磁界の接線成分が等しい} \end{cases}$$



(例題) 3層スラブ構造



スラブ構造: コアが y 方向、 z 方向に無限に広がる構造。
 x 方向にのみ境界が存在。

※コア幅: $2a$ として以下計算していることに注意。
core thickness = $2a$

伝搬定数を β とにおいて電磁界の z 方向依存性を $e^{-j\beta z}$ と仮定。

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$$

⇒ 最終解は以下の解に $e^{j(\omega t - \beta z)}$ を補足したものとなる。

スラブ構造の条件

光は y 方向に一様であり、 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

⇒ 式(7.7), (7.8)の再掲

$$\nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 H^0 \quad (7.7)$$

$$\nabla \times H^0 = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 \quad (7.8)$$

TEモードとTMモード(2)

成分	式(7.7)	式(7.8)
x	$j\beta \boxed{E_y} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_x}$	$j\beta \boxed{H_y} = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 \boxed{E_x}$
y	$-j\beta \boxed{E_x} - \frac{d\boxed{E_z}}{dx} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_y}$	$-j\beta \boxed{H_x} - \frac{d\boxed{H_z}}{dx} = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 \boxed{E_y}$
z	$\frac{d\boxed{E_y}}{dx} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_z}$	$\frac{d\boxed{H_y}}{dx} = j\omega\varepsilon_0 n_i^2 \boxed{E_z}$

E_y, H_x, H_z を有する解: $E(0, E_y, 0), H(H_x, 0, H_z)$

TE (Transverse Electric) モード

E_x, E_z, H_y を有する解: $E(E_x, 0, E_z), H(0, H_y, 0)$

TM (Transverse Magnetic) モード

TEモードの解(1)

式(7.11)に $E(0, E_y, 0)$ を代入して、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \underbrace{\frac{d^2 E_y}{dy^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{d^2 E_y}{dz^2}}_{\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta, \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (-j\beta)^2 = -\beta^2} \right) + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E_y = 0 \\ & \frac{d^2 E_y}{dx^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 - \beta^2) E_y = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

更に $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ においてコア内($n=n_1$)とクラッド内($n=n_2$)について表現すると、

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \underbrace{(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)}_{>0} E_y = 0 \quad (\text{コア内}) \quad (7.14) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 E_y}{dx^2} - \underbrace{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)}_{>0} E_y = 0 \quad (\text{クラッド内}) \quad (7.15) \end{aligned} \right.$$

TEモードの解(2)

式(7.14), (7.15)に電界の接線成分の境界条件を適用する。

$$E_y(x \rightarrow \pm a_{+0}) = E_y(x \rightarrow \pm a_{-0}) \quad (7.16)$$

ただし複合同順、 a_{+0} , a_{-0} はそれぞれコア側、クラッド側から近づけることを意味する。

磁界の接線成分に対しても同様にして、

$$H_z(x \rightarrow \pm a_{+0}) = H_z(x \rightarrow \pm a_{-0}) \quad (7.17)$$

$\frac{\partial E_y}{\partial x}$ の連続の式

クラッド内では

$$\left. \begin{aligned} E(x \rightarrow \pm\infty) &= 0 \\ H(x \rightarrow \pm\infty) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

の条件が適用される。

電界について

導波モードは $k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1$ を満足する。
式(7.14)、(7.15)について以下の変数をおく。

$$\begin{cases} \kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \end{cases}$$

式(7.14)、(7.15)は以下のように変形される。 (Δ : 比屈折率差)

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \kappa^2 E_y = 0 & \text{(コア内)} & (7.19) \\ \frac{d^2 E_y}{dx^2} - \gamma^2 E_y = 0 & \text{(クラッド内)} & (7.20) \end{cases}$$

TEモードの解(4)

式(7.19)、(7.20)の一般解は以下の式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_y = Ae^{-j\kappa x} + Be^{j\kappa x} & \text{(コア内)} \end{array} \right. \quad (7.21) \quad \text{Oscillation}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_y = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} & \text{(クラッド内)} \end{array} \right. \quad (7.22) \quad \text{Attenuation}$$

まず式(7.18)の条件より、

$$\left\{ \begin{array}{ll} D = 0(x > a) & (7.23) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C = 0(x < -a) & (7.24) \end{array} \right.$$

また式(7.16)より、

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a} = Ce^{-\gamma a} & (x \rightarrow a) \end{array} \right. \quad (7.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a} = De^{-\gamma a} & (x \rightarrow -a) \end{array} \right. \quad (7.26)$$

TEモードの解(5)

次に $x = \pm a$ において磁界の接線成分 H_z が連続である条件(7.17)を用いる。

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \frac{dE_y}{dx} \quad \text{だから}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_y}{dx} = -j\kappa A e^{-j\kappa x} + j\kappa B e^{j\kappa x} \end{array} \right. \quad (7.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_y}{dx} = -\gamma C e^{-\gamma x} + \gamma D e^{\gamma x} \end{array} \right. \quad (7.28)$$

より、

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\kappa A e^{-j\kappa a} + j\kappa B e^{j\kappa a} = -\gamma C e^{-\gamma a} \quad (x = a) \\ -j\kappa A e^{j\kappa a} + j\kappa B e^{-j\kappa a} = \gamma D e^{-\gamma a} \quad (x = -a) \end{array} \right.$$

TEモードの解(6)

変形して、

$$\left\{ \begin{array}{l} Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a} = -\frac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} \quad (x = a) \end{array} \right. \quad (7.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a} = \frac{j\gamma D}{\kappa} e^{-\gamma a} \quad (x = -a) \end{array} \right. \quad (7.30)$$

AとBの関係を求めるため、CおよびDを消去する。

$$(7.29) \div (7.25) \text{より、} \quad \frac{Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a}}{Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a}} = -\frac{j\gamma}{\kappa} \quad (7.31)$$

$$(7.30) \div (7.26) \text{より、} \quad \frac{Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a}}{Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a}} = \frac{j\gamma}{\kappa} \quad (7.32)$$

さらに(7.31)÷(7.32)を計算して右辺の変数を消去

TEモードの解(7)

$$\frac{(Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a})}{(Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a})} = -1$$

変形して、 $A^2=B^2$ を得る。

① $A=B$ の場合

式(7.25)より $A(e^{j\kappa a} + e^{-j\kappa a}) = Ce^{-\gamma a}$

$$2A\cos(\kappa a) = Ce^{-\gamma a} \quad (7.33)$$

式(7.29)より $A(e^{-j\kappa a} - e^{j\kappa a}) = -\frac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a}$

$$2A\sin(\kappa a) = \frac{\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} \quad (7.34)$$

(7.34)÷(7.33)より、 $\tan(\kappa a) = \frac{\gamma}{\kappa} = \frac{\gamma a}{\kappa a}$ (7.35)

TEモードの偶数次モード

TEモードの解(8)

① $A = -B$ の場合

式(7.25)より $A(e^{j\kappa a} - e^{-j\kappa a}) = -Ce^{-\gamma a}$

$$2A \sin(\kappa a) = jCe^{-\gamma a} \quad (7.36)$$

式(7.29)より $A(e^{j\kappa a} + e^{-j\kappa a}) = jCe^{-\gamma a}$

$$2A \cos(\kappa a) = -\frac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} \quad (7.37)$$

(7.37) ÷ (7.36)より、 $\cot(\kappa a) = -\frac{\gamma}{\kappa} = -\frac{\gamma a}{\kappa a}$ (7.38)

TEモードの奇数次モード

(7.35)と(7.38)を一つの式にまとめると、

$$\tan\left(\kappa a + \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\gamma a}{\kappa a} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.39)$$

n : 横モードの次数

order of transverse (lateral) mode

対称3層スラブ導波路のモード電磁界式

モード	モード電磁界式		固有値方程式
	$ x \leq a$	$ x > a$	
TE偶数次	$E_y = A_e \cos(\kappa x)$	$E_y = A_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(x -a)}$	$\tan(\kappa a) = \frac{\gamma a}{\kappa a}$
TE奇数次	$E_y = A_o \sin(\kappa x)$	$E_y = \frac{x}{ x } A_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(x -a)}$	$\cot(\kappa a) = -\frac{\gamma a}{\kappa a}$
TM偶数次	$H_y = B_e \cos(\kappa x)$	$H_y = B_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(x -a)}$	$\tan(\kappa a) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\gamma a}{\kappa a}$
TM奇数次	$H_y = B_o \sin(\kappa x)$	$H_y = \frac{x}{ x } B_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(x -a)}$	$\cot(\kappa a) = -\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\gamma a}{\kappa a}$

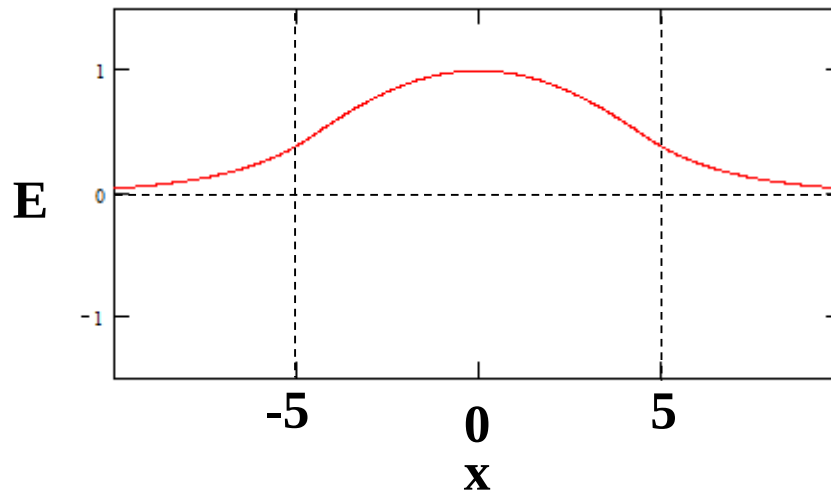
複屈折性

birefringence

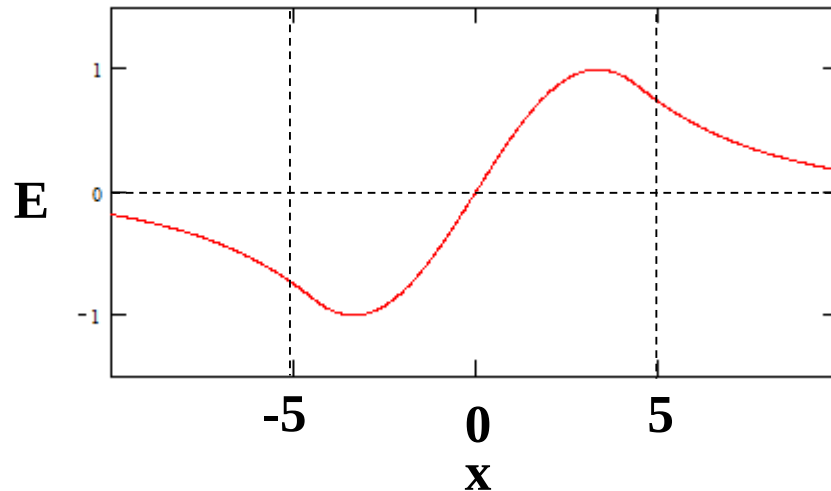
スラブ導波路の電界分布(1)

$$n_1 = 1.485, n_2 = 1.48, \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 0.3\%, 2d = 10.0\mu\text{m}$$

n = 0 (基本モード)



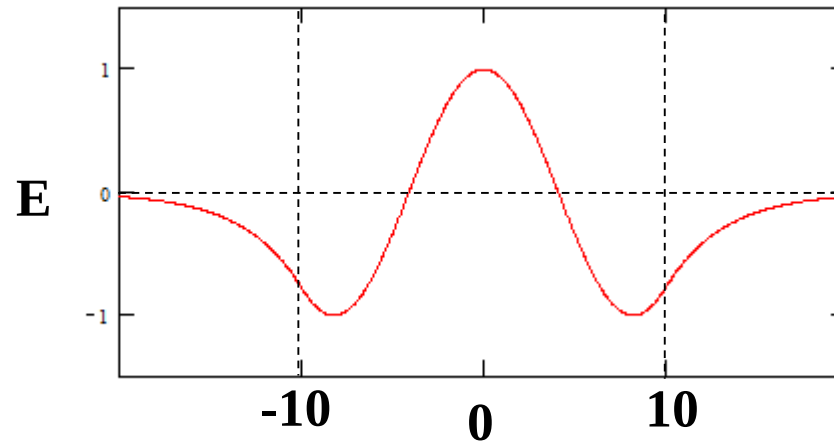
n = 1



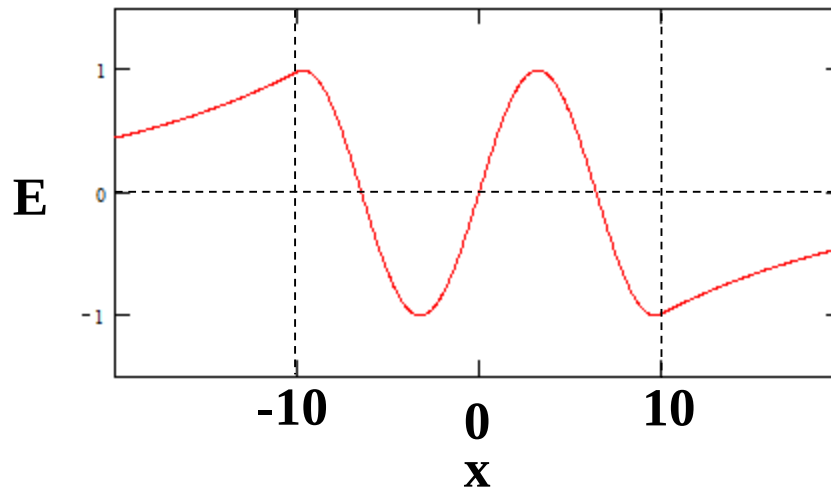
スラブ導波路の電界分布(2)

$$n_1 = 1.49, n_2 = 1.48, \Delta = 0.7\%, 2d = 20.0\mu\text{m}$$

$n = 2$



$n = 3$



固有値(特性)方程式(1)

式(7.39)を規格化した変数で表現する。

⇒ 構造パラメータの変化に対する伝搬定数の変化の特性を一般化できる。

V: Vパラメータ(規格化周波数)

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2$$

半径(V/a)、中心Oの κ - γ 座標の円

ただし

$$V = k_0 n_1 a \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}} = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta}$$

Δ : 比屈折率差

規格化伝搬定数 **b**

以下の式で**規格化伝搬定数 **b**** を定義する。

$$b = \frac{(\beta / k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

$$b = \frac{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2}{(k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2} = \left(\frac{\gamma a}{V} \right)^2 \quad (7.40)$$

$$\text{よって、} \quad \gamma a = V \sqrt{b} \quad (7.41)$$

固有値方程式(3)

式(7.40)を変形して、

$$\kappa a = \sqrt{\left(\frac{1}{b} - 1\right)(\gamma a)^2} = V \sqrt{1-b} \quad (7.42)$$

(7.41), (7.42)を(7.39)に代入して変形し、以下の式を得る。

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}} \left\{ \tan^{-1} \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \frac{n\pi}{2} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.43)$$

**TEモードの
固有値方程式**

TMモードについても同様にして以下の式を得ることができる。

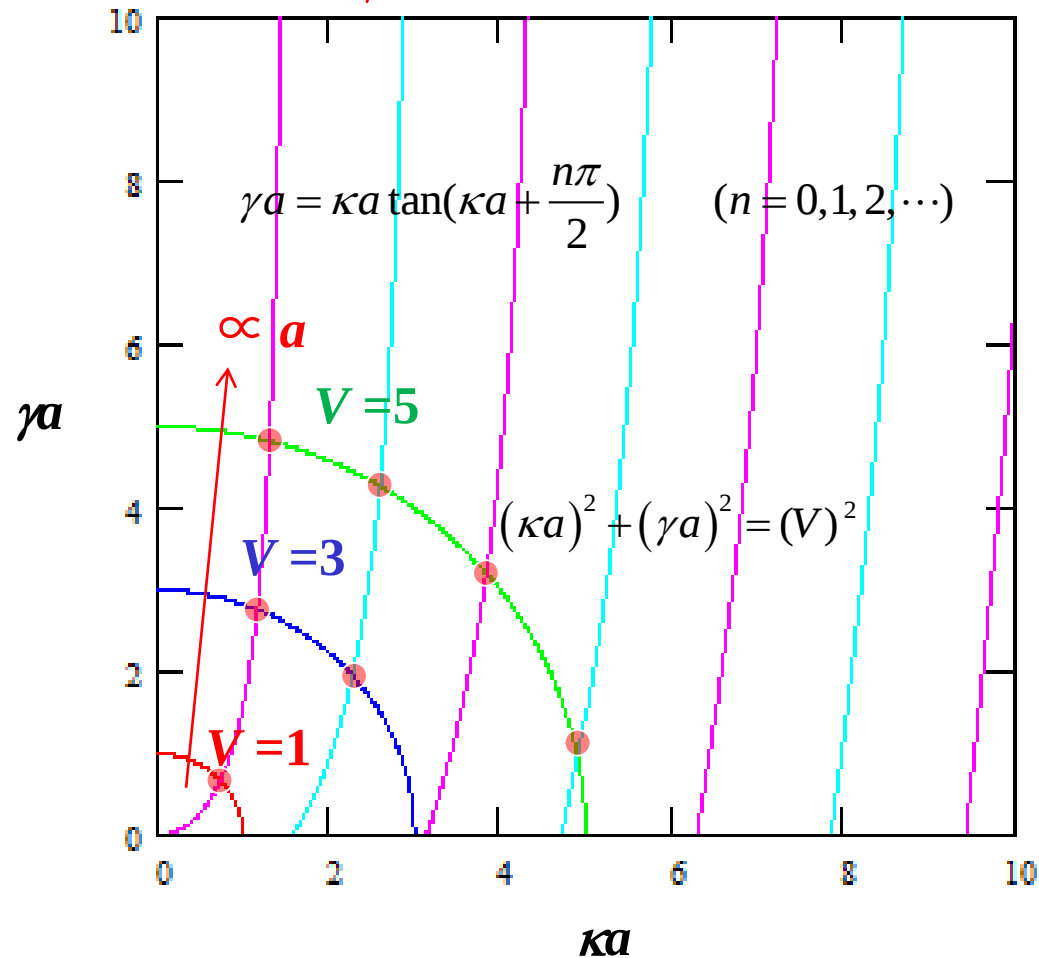
$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}} \left[\tan^{-1} \left\{ \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sqrt{\frac{b}{1-b}} \right\} + \frac{n\pi}{2} \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.44)$$

**TMモードの
固有値方程式**

固有値方程式の解の図示

$$\gamma a = \kappa a \tan\left(\kappa a + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

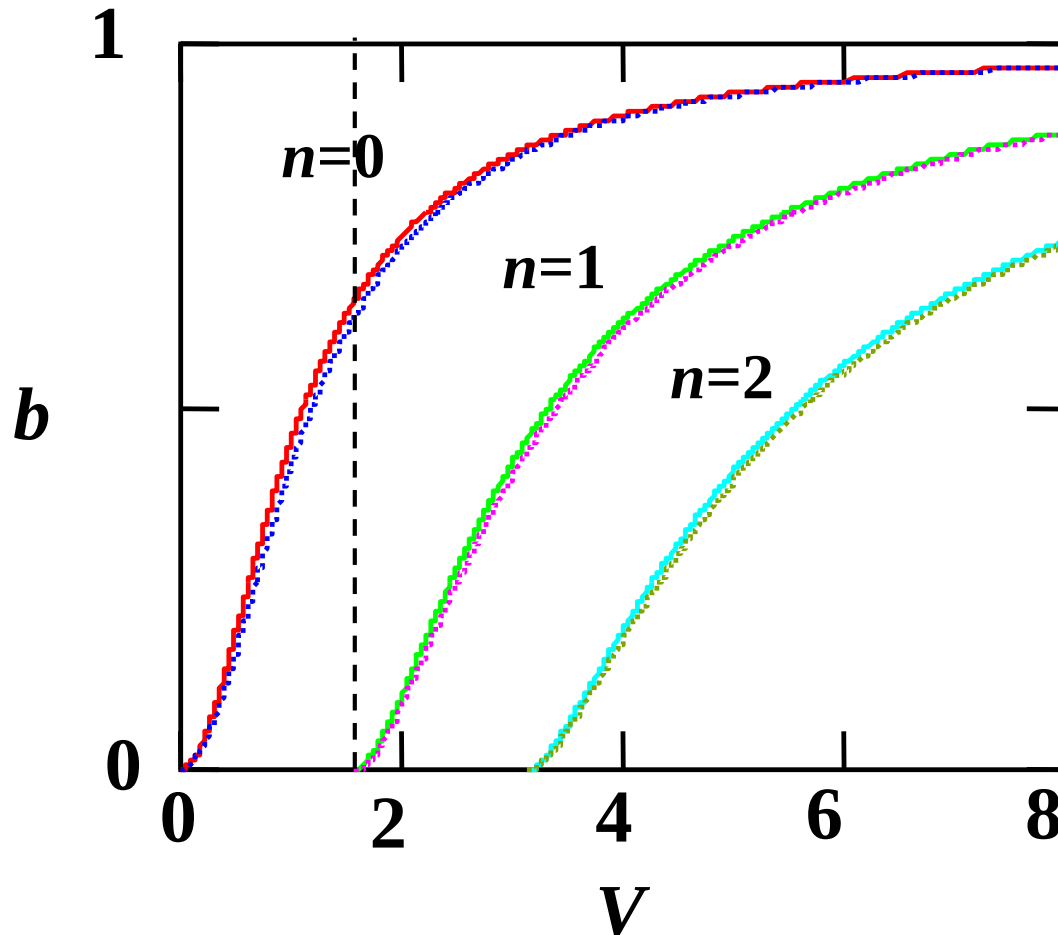
$$(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (V)^2 \text{ の交点が解}$$



固有値方程式の数値解析結果

$n_1=1.63, n_2=1.45, \Delta=0.104$ の条件の解析結果

実線:TE, 点線:TM



●解析方法:

式(7.43), (7.44)を b を
パラメータに V を求め、
 b 軸- V 軸を入れ替える。

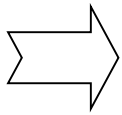
●ある構造が与えられると
 V が決まる
→ 横モードごとの b が求まる

単一(シングル)モード条件

$n=1, b=0$ のときの V を求めると、固有値方程式より、

$$V = \frac{\pi}{2}$$

解析のグラフより、 $V < \frac{\pi}{2}$ の範囲では $n=0$ の解しかないことがわかる。



単一(シングル)モード条件

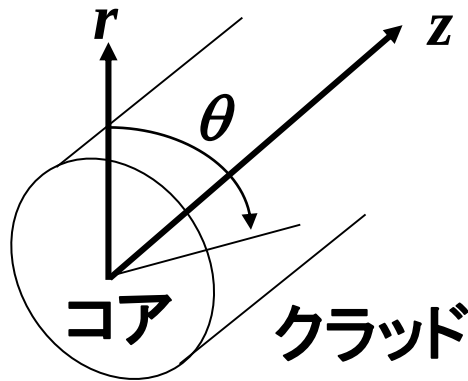
光ファイバ・光導波路・半導体レーザなど各種デバイスの設計で必須

光ファイバのモード解析

光ファイバのモード(1)

光ファイバの波動方程式

界分布の z 方向依存性を $\exp(-j\beta z)$ と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。



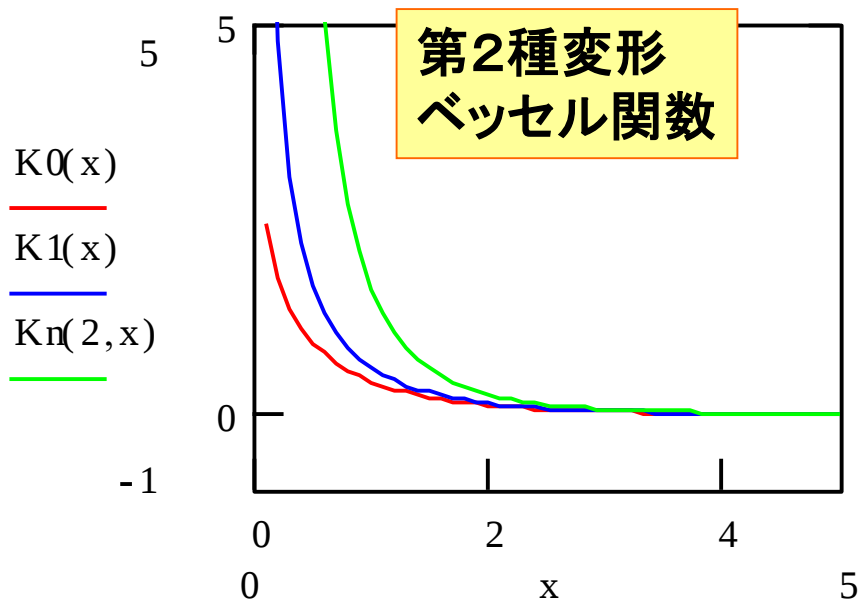
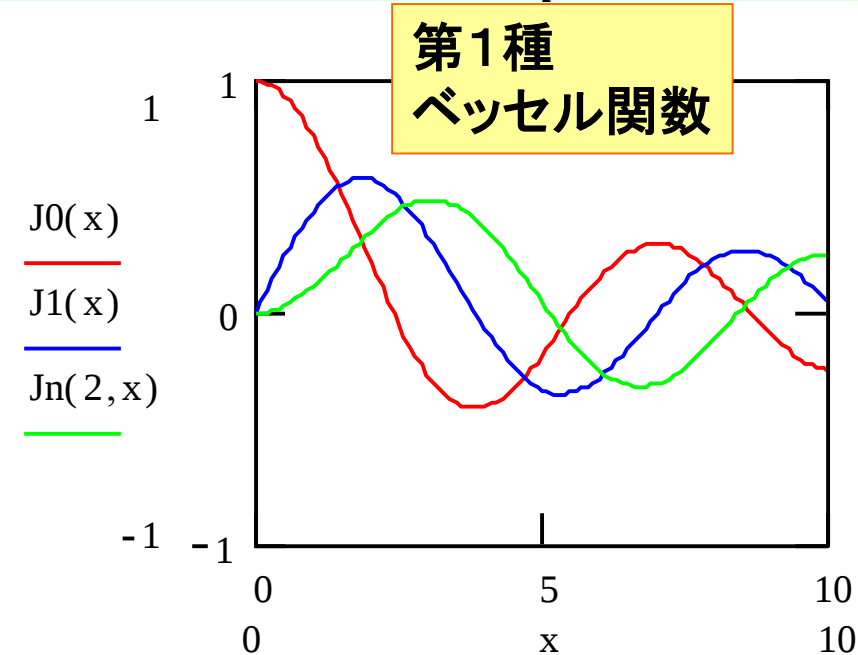
$$\text{屈折率分布 } n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \leq a) \\ n_2^2 = n_1^2(1 - 2\Delta) & (r > a) \end{cases} \quad (7.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_z = 0 \end{array} \right\} \quad (7.46)$$

本微分方程式はベッセルの微分方程式であり、基本解は
第一種変形ベッセル関数と第二種変形ベッセル関数である³⁵

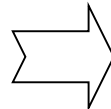
光ファイバのモード(2)

第1種ベッセル関数 $J_l(x)$, 第2種変形ベッセル関数 $K_l(x)$



光ファイバのモード(3)

式(7.45)を(7.46)に代入



変数分離法により角度 θ 依存性は三角関数

半径 r 依存性はコア内振動解: 第1種ベッセル関数 $J_l(x)$

クラッド内は減衰解:

第2種変形ベッセル関数 $K_l(x)$

コア内

$(r \leq a)$

同じ l : 角度 θ 方向のモード番号

$$E_z = A_l J_l(\kappa r) \cos(l\theta + \phi_l) \quad (7.47)$$

$$H_z = B_l J_l(\kappa r) \cos(l\theta + \psi_l) \quad (7.48)$$

クラッド内

$(r > a)$

$$E_z = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r) \cos(l\theta + \phi_l) \quad (7.49)$$

$$H_z = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r) \cos(l\theta + \psi_l) \quad (7.50)$$

E_z, H_z がそれぞれ
 $r=a$ において連続
となるように係数を
考慮

l : 角度 θ 方向のモード番号

光ファイバのモード(4)

θ 方向(接線成分)が $r=a$ で連続となる条件

$$E_{\theta}(r \rightarrow a + 0) = E_{\theta}(r \rightarrow a - 0) \quad (7.51)$$

$$H_{\theta}(r \rightarrow a + 0) = H_{\theta}(r \rightarrow a - 0) \quad (7.52)$$

ここで式(3.7), (3.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_{\theta} = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (7.53)$$

$$H_{\theta} = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2} \left(\omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) \quad (7.54)$$

式(7.51), (7.52)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

光ファイバのモード(5)

$$\begin{aligned}
 & \frac{k_0^2 \left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] \left[n_1^2 \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + n_2^2 \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right]}{l^2 \beta^2 \left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)^2} \\
 &= - \frac{\sin(l\theta + \phi_l) \sin(l\theta + \psi_l)}{\cos(l\theta + \phi_l) \cos(l\theta + \psi_l)} \\
 &= \frac{\cos(2l\theta + \phi_l + \psi_l) - \cos(\phi_l - \psi_l)}{\cos(2l\theta + \phi_l + \psi_l) + \cos(\phi_l - \psi_l)} \quad (7.55)
 \end{aligned}$$

式(7.55)は $r=a$ の至るところで成立しなければいけないので、 θ に無依存。

$$\cos(\phi_l - \psi_l) = 0 \quad \text{ならば右辺}=1$$

$$\therefore \phi_l - \psi_l = \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad E_z \text{と} H_z \text{の角度依存性は} \pi/2 \text{ずれている} = \text{直交}$$

式(7.55)は次式となる。

$$\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] \left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + (1 - 2\Delta) \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] \\ = \left(\frac{l\beta}{k_0 n_1} \right)^2 \left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \quad (7.56)$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

式(7.56)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1$$

が成り立つ場合には $\beta \cong k_0 n_1$ と近似して(弱導波近似)、

$$\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} \right] = \chi l \left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \quad (7.57)$$

(ただし $\chi = +1$ または -1)

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\ \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\gamma a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\gamma a)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

$\chi = -1$ の場合 (HEモード)

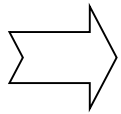
$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \quad (7.59)$$

$\chi = +1$ の場合 (EHモード)

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \quad (7.60)$$

光ファイバのモードの分類(1)

光ファイバの一般解は6つの電磁界($E_r, E_\theta, E_z, H_r, H_\theta, H_z$)をすべて持ったモードである。



ハイブリッドモード

① HEモード

$\chi = -1$ で $l \geq 1$ の場合、モード番号を新たに $v = l - 1$ と振ると、式(7.59)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{v-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_v(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_v(\sqrt{b}V)}{K_{v-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (7.61)$$

光ファイバのモードの分類(2)

ただし

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} & (\text{Vパラメータ or 規格化周波数}) \\ \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} & (\text{比屈折率差}) \\ b = \frac{\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & (\text{規格化伝搬定数}) \end{array} \right.$$

解の固有値 b を値の大きいものから順に $m = 1, 2, 3, \dots$ と振り、 HE_{lm} モードと呼ぶ。

l : 角度 θ 方向のモード番号

v : 角度 θ 方向の節の数の半分

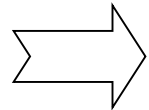
m : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

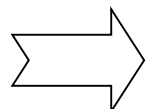
光ファイバのモードの分類(3)

② TEモード、TMモード

$l = 0$ の場合(ファイバの回転方向に一様な界分布)、

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (7.62)$$

式(7.47)～(7.50)において $\phi_l = \frac{\pi}{2}$ とすると $E_z = 0$  **TEモード**

$\phi_l = 0$ とすると $H_z = 0$  **TMモード**

③ EHモード

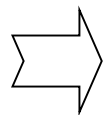
$\chi = +1$ で $l \geq 1$ の場合、モード番号を新たに $\nu = l + 1$ と振ると、式(7.60)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (7.63)$$

式(7.61)～(7.63)はすべて同じ形である。
方位角 θ 方向のモード番号 l を変換して

$$v = \begin{cases} l-1: HE_{l,m} \text{モード} \\ l+1: TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m} \text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じ v を持つ $HE_{v+1,m}$ モードと $EH_{v-1,m}$ モードは伝搬定数が同じである。

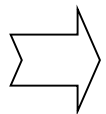


縮退

※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では
若干差あり

Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

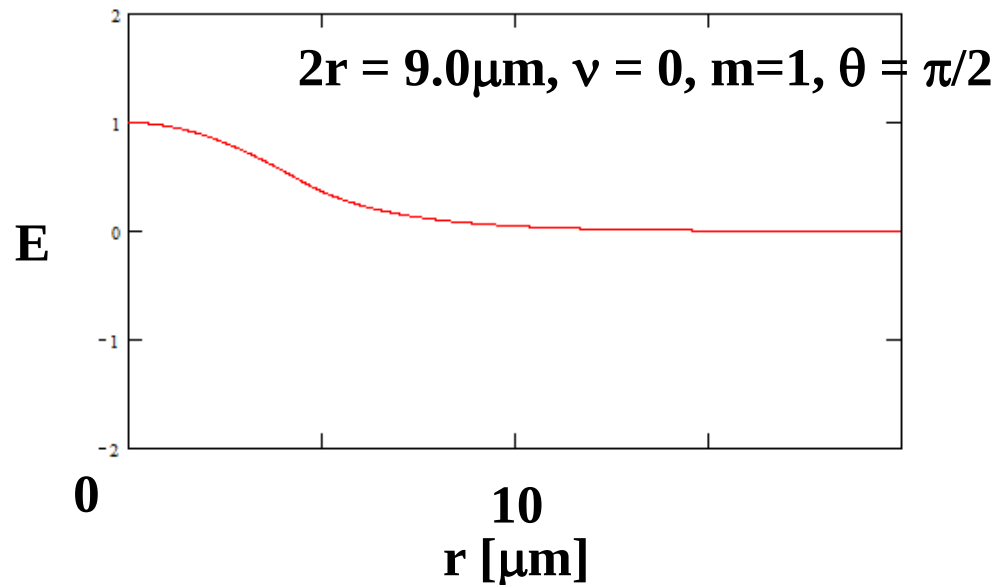
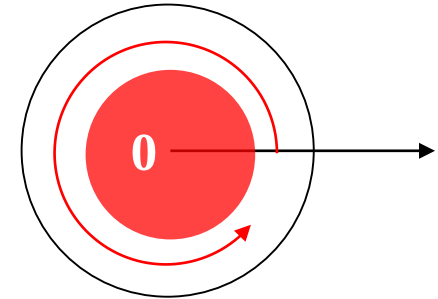
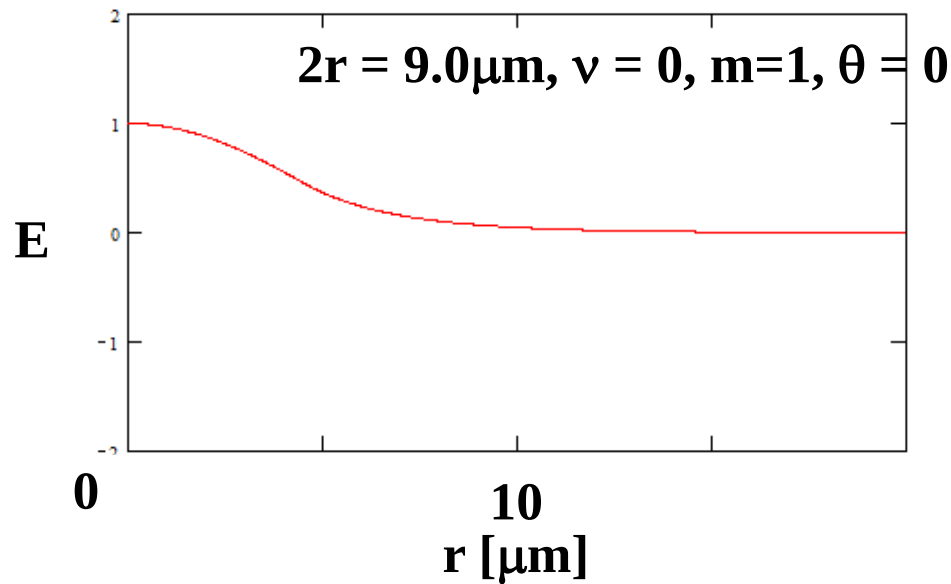
互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの
組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。



LP (Linearly Polarized) モード: $LP_{v,m}$

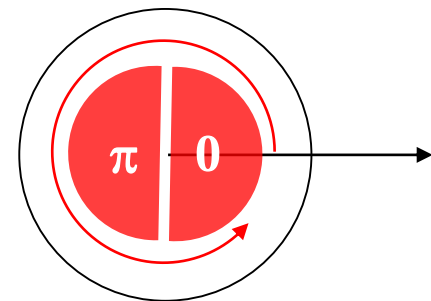
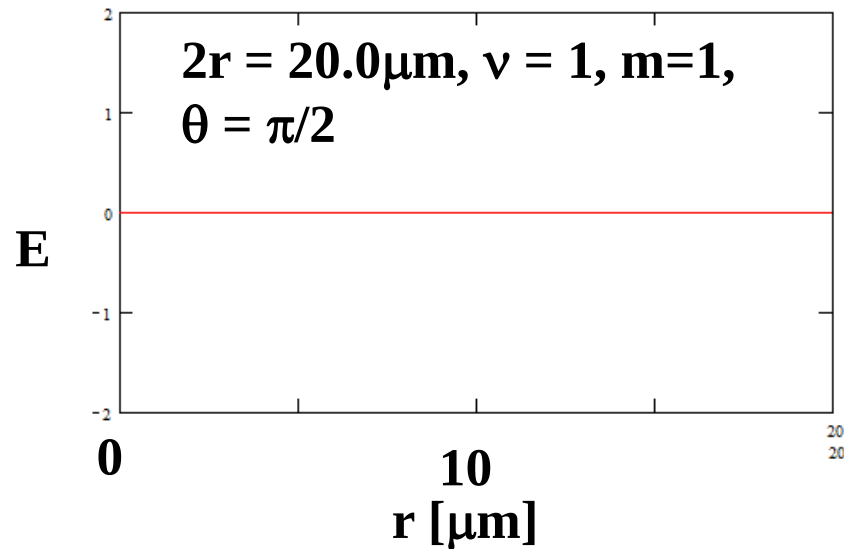
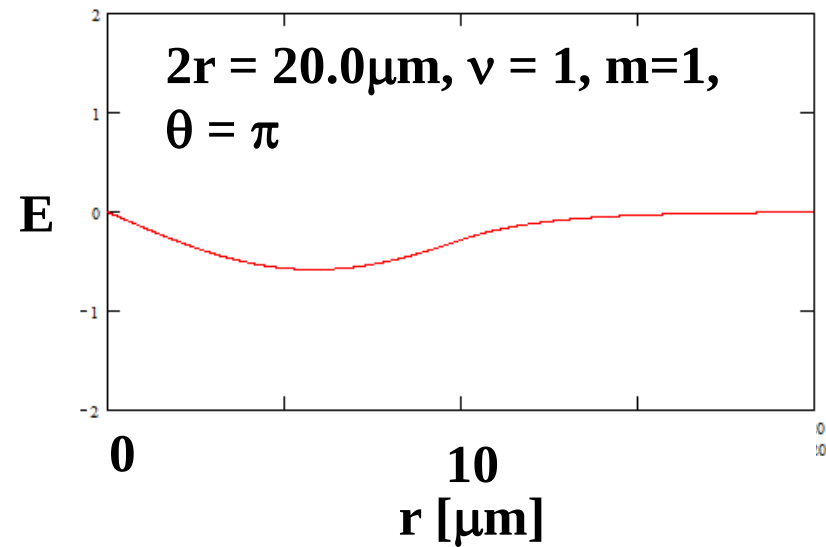
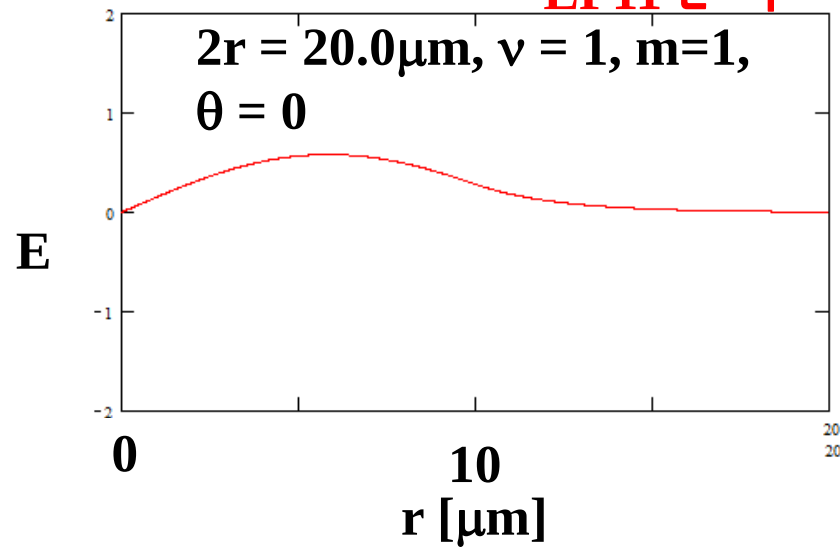
光ファイバの電界分布(1)

LP01モード



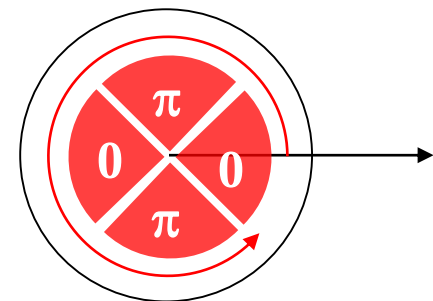
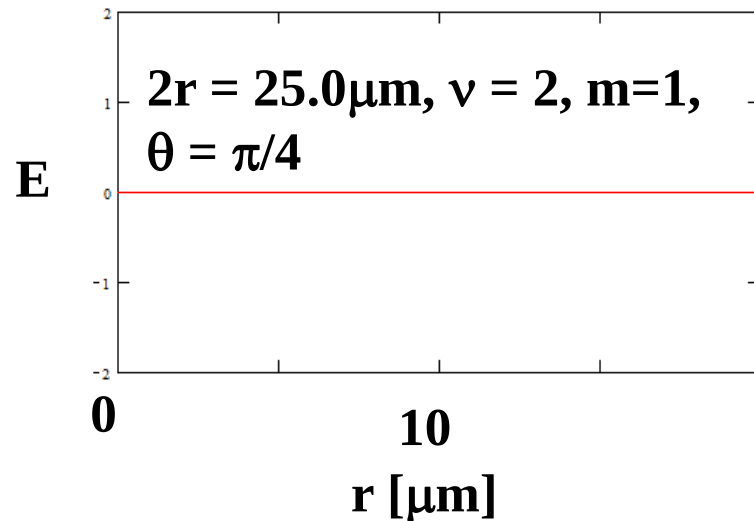
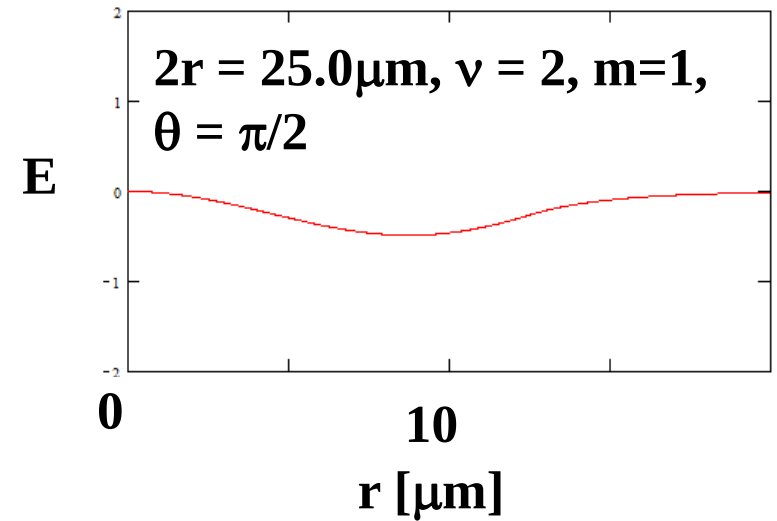
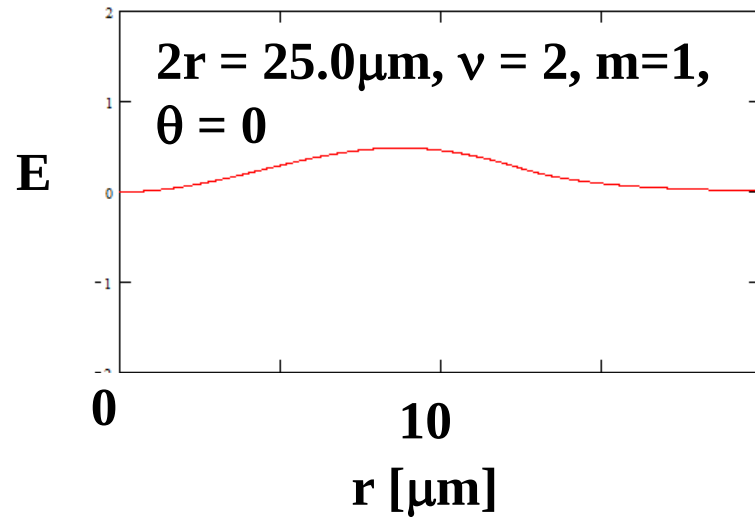
光ファイバの電界分布(2)

LP11モード



光ファイバの電界分布(3)

LP21モード



光ファイバの電磁界(3)

岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.63 図3.2

LPモード 命名法	従来の命名法	電界分布	E_z の強度分布
LP_{01}	HE_{11}		
LP_{11}	TE_{01}		
	TM_{01}		
	HE_{21}		
LP_{21}	EH_{11}		
	HE_{31}		

光ファイバの分散曲線(1)

基本モード $v=0$ について考える。式(7.61)に $v=1$ を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、 $b=0$ とにおいて $J_0(V)=0$ の第一番目の解なので、

$$V \leq 2.405$$

$$V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} \text{ より}$$

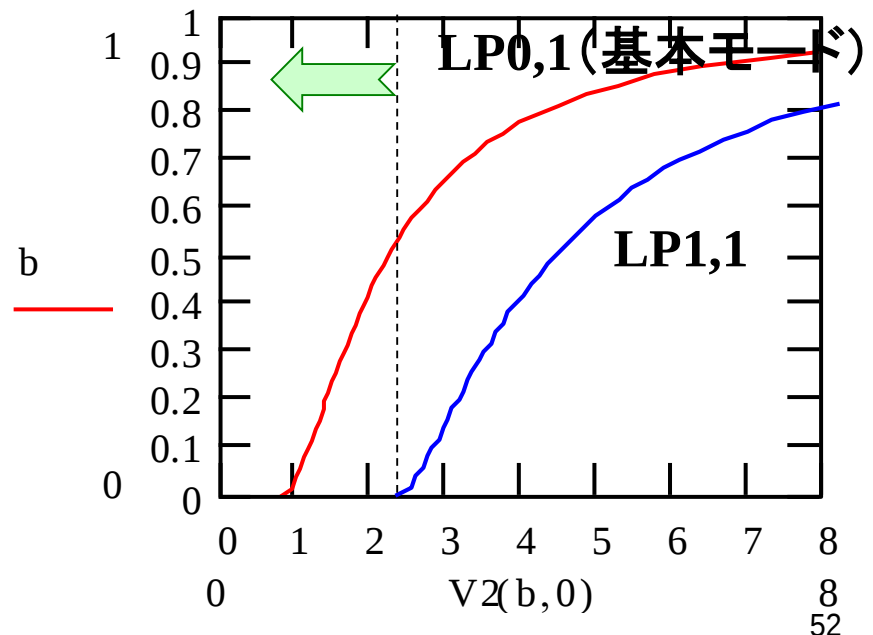
$$a < \frac{2.405}{k_0 n_1 \sqrt{2\Delta}}$$

$\Delta = 0.003$, $n_1 = 1.46$ のとき、

$$a < \frac{2.405 \times 1.55}{2\pi \times 1.46 \times \sqrt{2 \times 0.003}} = 5.25 \mu\text{m}$$

(直径 $10.5\mu\text{m}$ 以下)

単一モード条件



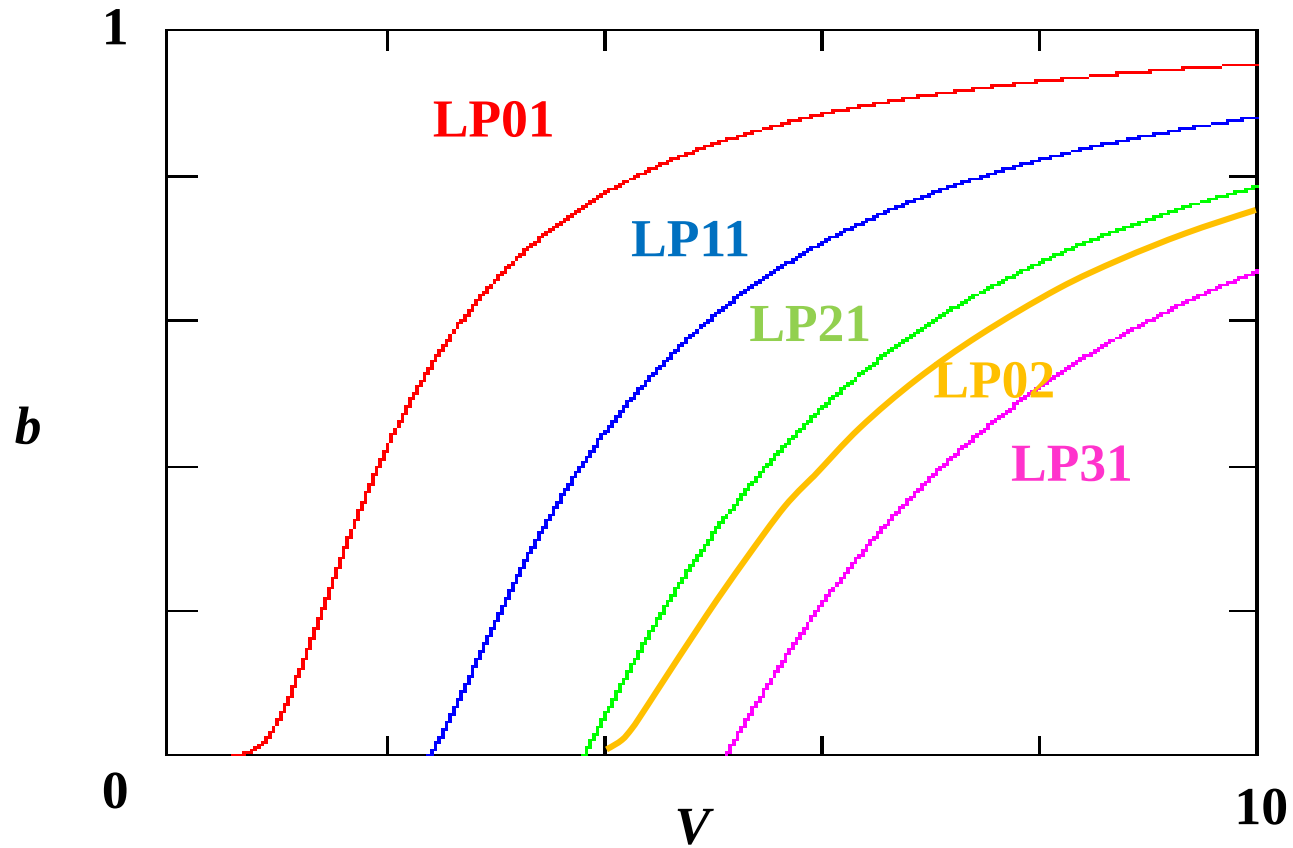
LPモードと厳密モードの対応・カットオフ条件

LPモードと厳密モードの対応

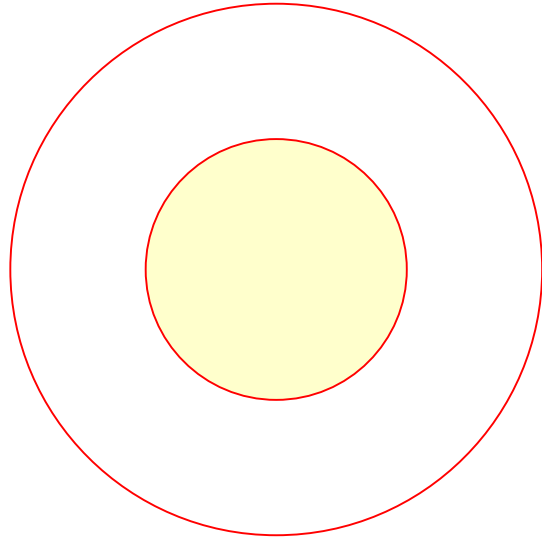
LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	$V=0$ ($m=1$) $J_1(V)=0$ の $m-1$ 番目の根 ($m>2$) 2偏波モードを合わせた2重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	$J_0(V)=0$ の m 番目の根 (例) $V=2.4048$ ($m=1$): $LP_{1,1}$ 2偏波モードを合わせた4重に縮退 (TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし)
$LP_{v,m}$ ($v \geq 2$)	$HE_{v+1,m}$ $EH_{v-1,m}$	$J_{v-1}(V)=0$ の m 番目の根 2偏波モードを合わせた4重に縮退

光ファイバの分散曲線(2)

(参考例)岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66 図3.4

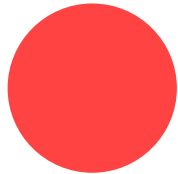


伝送路の新時代：マルチ・モードファイバ

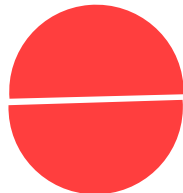


少モードファイバ(Few mode Fiber, FMF):
コア径がシングルモードファイバとマルチモード
ファイバの中間で、数モード(10前後)を持つもの

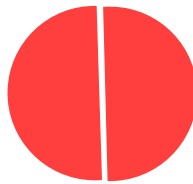
LP01



LP11a



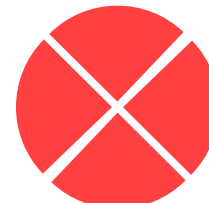
LP11b



LP21a



LP21b



LP02

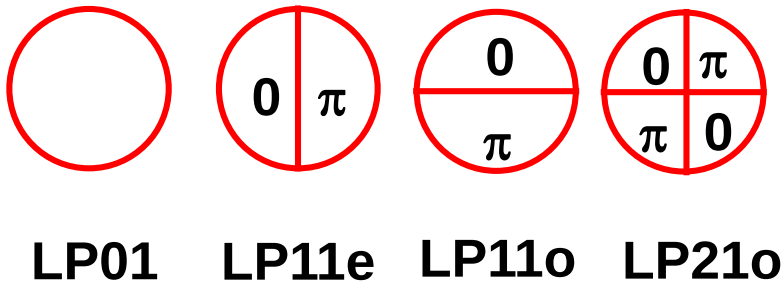


さらに各モードに偏波の互いに直交な成分が存在

高次モードの生成・多重・分離方式

生成

① 位相板



② 長周期ファイバ・グレーティング

③ 方向性結合器

多重・分離

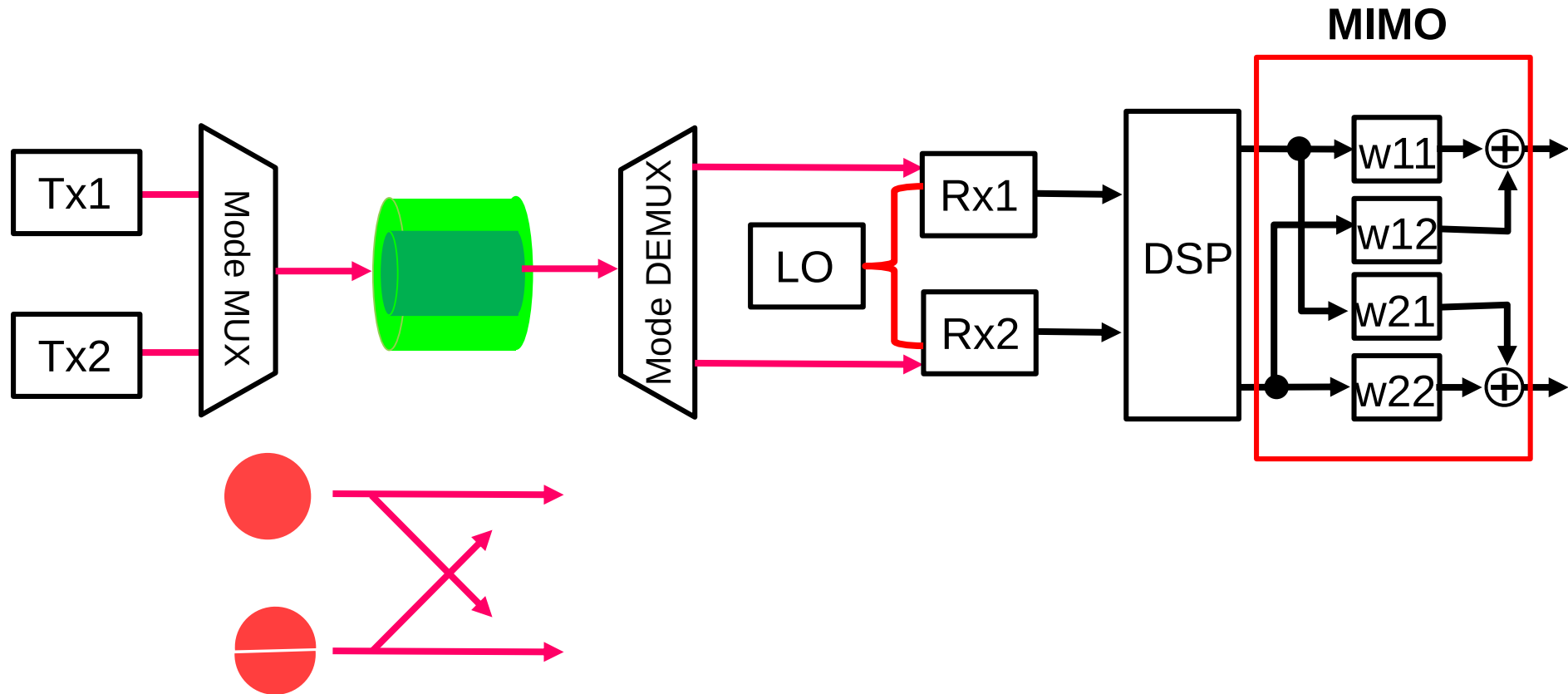
- 自由空間系
- 方向性結合器
- 平面導波路

※この段階の分離信号には、伝送途中でのモード変換成分が線形に混合

→ 分離・再生が必要

→ **Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO)**
行列の特異値分解演算を利用

モード間クロストークの補償



モード間の変換・クロストークの発生



重み付け係数 w による補償