

数理経済学特講

複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

第7回 最大重みマッチング

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

4回目の演習問題 問2の解答例

[(1)の解答例] 任意の均衡配分を $\alpha^*(A), \alpha^*(B) \in \{0,1,2,3\}$,
対応する均衡価格を p とする.

(Case 1) $\alpha^*(A) \neq 0, \alpha^*(B) \neq 0$ のとき: これは所望の均衡配分である.

(Case 2) $\alpha^*(A), \alpha^*(B)$ のどちらか一方が0のとき:

一般性を失うことなく $\alpha^*(A) = 0, \alpha^*(B) \neq 0$ とする.

このとき, 誰にも割り当てられていない財が必ず存在するが, それを h とする.

以下, 配分 $\beta^*(A) = h, \beta^*(B) = \alpha^*(B)$ は均衡配分であることを示す.

つまり, $v(A, \beta^*(A)) - p_{\beta^*(A)} \geq v(A, j) - p_j$,

$v(B, \beta^*(B)) - p_{\beta^*(B)} \geq v(B, j) - p_j \ (\forall j \in \{1,2,3\})$ を示せば良い.

均衡の定義より, $\beta^*(B) = \alpha^*(B)$ に対して,

$$v(B, \beta^*(B)) - p_{\beta^*(B)} \geq v(B, j) - p_j \ (\forall j \in \{1,2,3\})$$

また, $\alpha^*(A) = 0$ なので均衡の定義より, $v(A, j) - p_j \leq 0 \ (\forall j \in \{1,2,3\})$.

とくに $v(A, h) - p_h \leq 0$.

一方, 均衡の定義より $p_h = 0$ なので, $v(A, h) - p_h = v(A, h) \geq 0$.

$\therefore v(A, \beta^*(A)) - p_{\beta^*(A)} = v(A, h) - p_h = 0$.

4回目の演習問題 問2の解答例

[(1)の解答例のつづき]

したがって, $v(A, \beta^*(A)) - p_{\beta^*(A)} = 0 \geq v(A, j) - p_j \ (\forall j \in \{1, 2, 3\})$

(Case 3) $\alpha^*(A) = \alpha^*(B) = 0$ のとき:

このとき, すべての財は誰にも割り当てられていない.

よって, 配分 $\beta^*(A) = 1, \beta^*(B) = 2$ を考えると, Case 2 の入札者Aの場合と同様にして,

不等式 $v(A, \beta^*(A)) - p_{\beta^*(A)} \geq v(A, j) - p_j,$

$v(B, \beta^*(B)) - p_{\beta^*(B)} \geq v(B, j) - p_j \ (\forall j \in \{1, 2, 3\})$ を示せる.

よって配分 β^* は均衡配分.

4回目の演習問題 問2の解答例

[(2)の解答例]

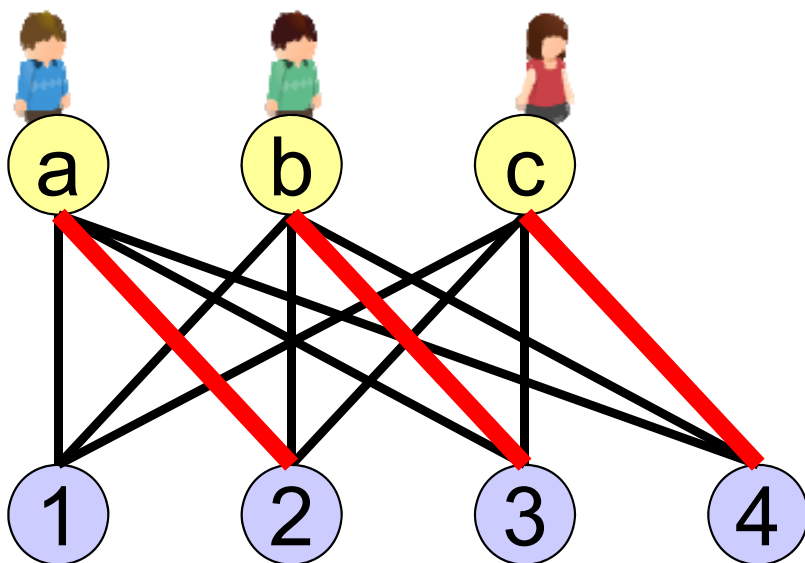
最大重みマッチングにおいて、入札者 X に財の割当がなかったとする。
このとき、誰にも割り当てられていない財が必ず存在するが、それを h とする。
財 h を新たに入札者 X に割り当てると、得られたマッチングの重みは
 $v(X, h) \geq 0$ だけ増加する。
したがって、新たなマッチングの重みは最大重みマッチング以上となる。
つまり、新たなマッチングは最大重みマッチングである。

財の割当がない入札者が存在する限り、上記の手続きを繰り返すと、すべての入札者に財の割当がある最大重みマッチングが得られる。

最大重みマッチング問題と その双対問題に対する双対定理

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 $v(i,j)$ が与えられている状況で
入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:**
枝に重みが与えられたグラフにおいて,
枝重みの和が最大のマッチングを求める

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$$

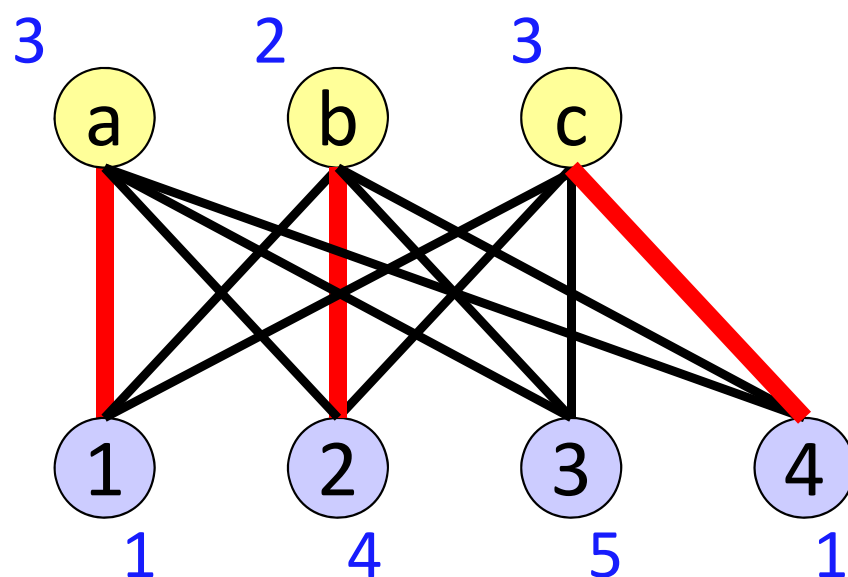
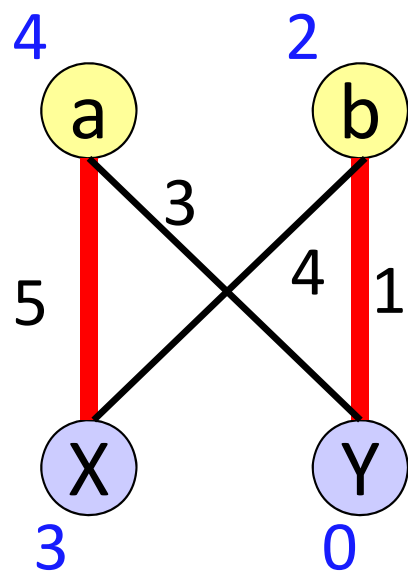
$$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

弱双対定理

最大重みマッチング問題の最適値 $\leq$ 双対問題の最適値

定理:

任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し、
 マッチング M の重み $\leq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

系: 任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) は、
 以下の条件を満たすとき、それぞれ最適解である:

$$\text{マッチング } M \text{ の重み} = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

弱双対定理: 証明

定理:

任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q, p) に対し,
マッチング M の重み $\leq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

(証明) マッチングの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ とすると,
双対問題の実行可能性より $v(i_t, j_t) \geq q(i_t) + p(j_t) \ (t = 1, 2, \dots, k)$
マッチング M の重み $= \sum_{t=1}^k v(i_t, j_t) \geq \sum_{t=1}^k q(i_t) + \sum_{t=1}^k p(j_t)$
 $i_1, i_2, \dots, i_k$ は B に含まれる, 互いに異なる要素であるので,
 $\sum_{t=1}^k q(i_t) \leq \sum_{i \in B} q(i)$.
同様に, $\sum_{t=1}^k p(j_t) \leq \sum_{j \in N} p(j)$.
よって, マッチング M の重み $\leq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$ が成り立つ.

最大重みマッチングの最適性条件

双対問題の実行可能解を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み

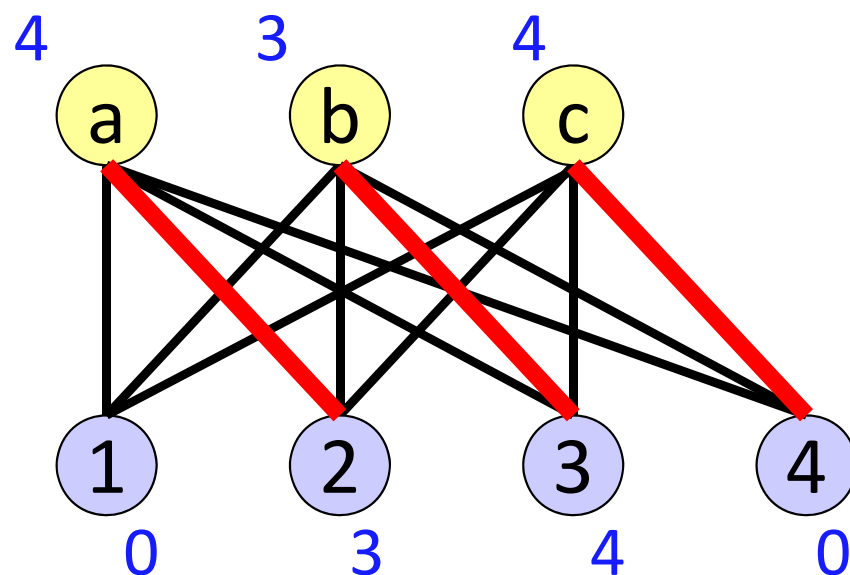
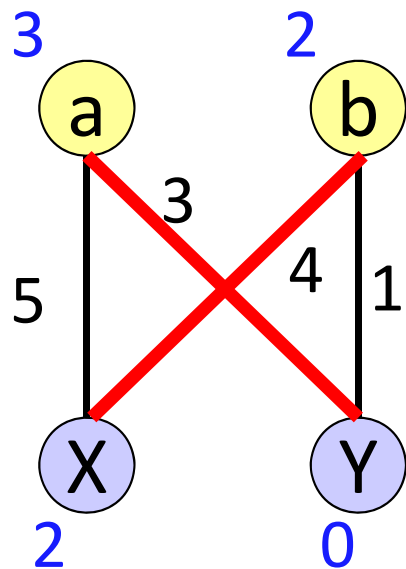
↔ 双対問題の実行可能解 (q, p) で,

次の条件を満たすものが存在:

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j) = 0$



$v(i, j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

相補性定理

最大重みマッチング問題と双対問題の実行可能解が最適解であるための必要十分条件

定理:

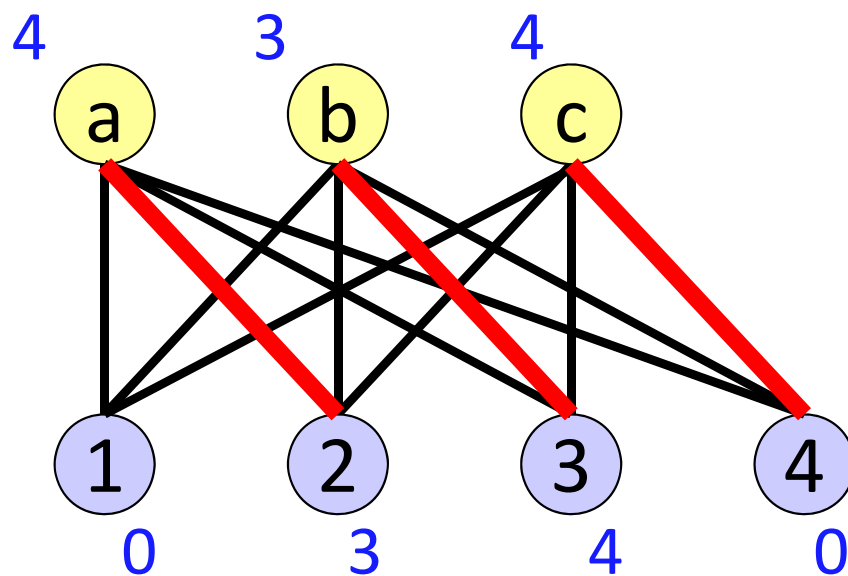
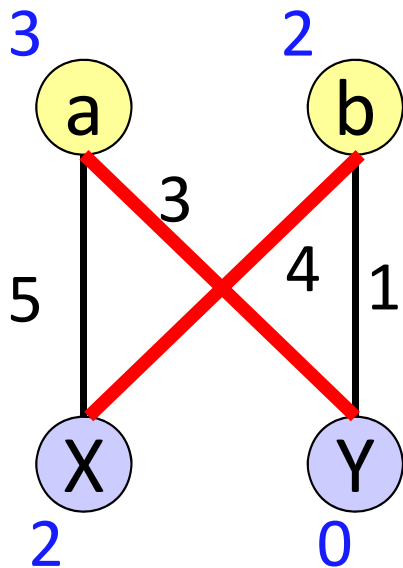
任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し,
 M は最大重みマッチング, かつ (q,p) は双対問題の最適解

↔ 以下の条件が成立:

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$

$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i)=0$

$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j)=0$



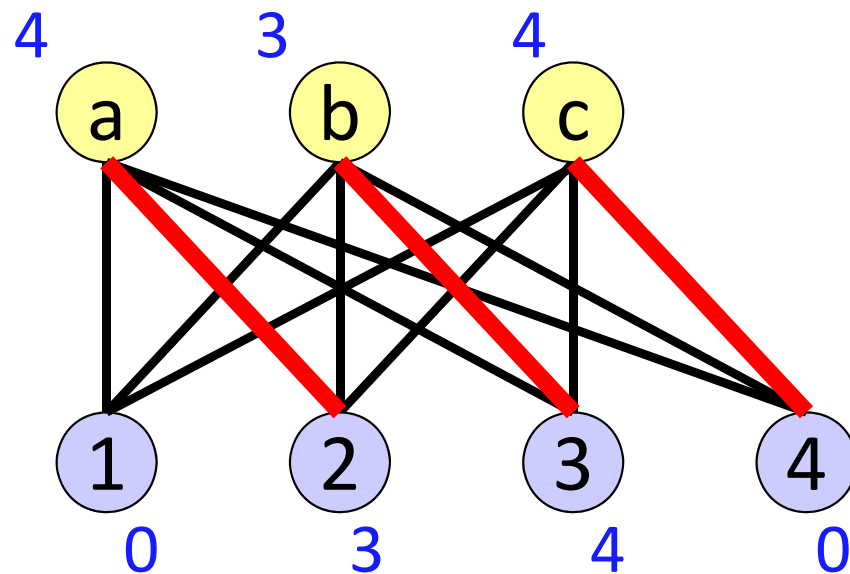
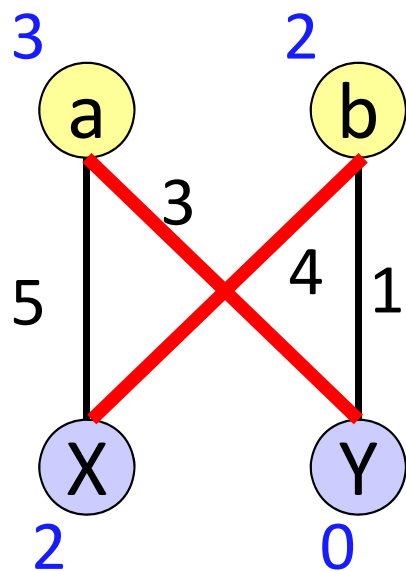
$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

双対定理

最大重みマッチング問題と双対問題の最適値は一致

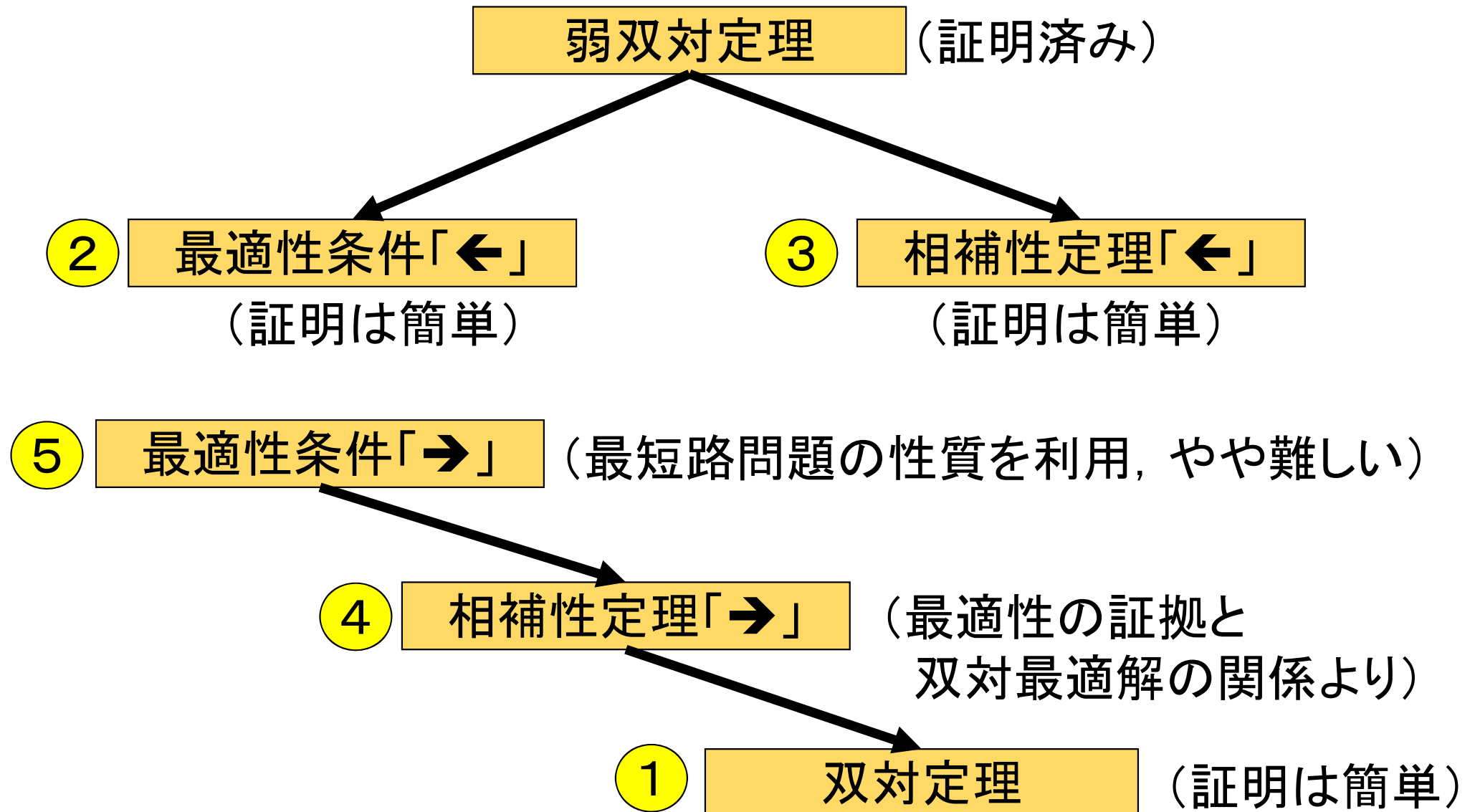
定理:

最大重みマッチング M と双対問題の最適解 (q,p) に対し,
 マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

定理の証明の流れ



相補性定理「 $\Rightarrow$ 」を使った 双対定理の証明

定理:

最大重みマッチング M と双対問題の最適解 (q, p) に対し,
マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

M は最大重みマッチング, かつ (q, p) は双対問題の最適解とする.

M の枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ とする.

相補性定理より, 以下の条件が成立:

- $v(i_t, j_t) = q(i_t) + p(j_t) \ (t = 1, 2, \dots, k)$
- $q(i) = 0 \ (\forall i \in B \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\})$
- $p(j) = 0 \ (\forall j \in N \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\})$

よって, マッチング M の重み $= \sum_{t=1}^k v(i_t, j_t)$
$$= \sum_{t=1}^k q(i_t) + \sum_{t=1}^k p(j_t) = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

最適性条件「 $\leftarrow$ 」の証明

弱双対定理の系を使って証明する.

M はマッチングとする.

以下の条件を満たす双対問題の実行可能解 (q,p) が存在すると仮定:

- マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$
- $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i)=0$
- $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j)=0$

M は最大重みマッチング (かつ (q,p) は双対問題の最適解)

であることを証明する.

弱双対定理の系より, 以下の式を示せば良い:

$$\text{マッチング } M \text{ の重み} = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

この式は双対定理の証明と同様に示せる.

相補性定理「 $\leftarrow$ 」の証明

弱双対定理の系を使って証明する.

マッチング M と双対問題の実行可能解 (q,p) に対し,
以下の条件を仮定

- マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$
- $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow q(i)=0$
- $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない $\rightarrow p(j)=0$

M は最大重みマッチング, かつ

(q,p) は双対問題の最適解であることを証明する.

弱双対定理の系より, 以下の式を示せば良い:

$$\text{マッチング } M \text{ の重み} = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

この式は双対定理の証明と同様に示せる.

相補性定理：必要性の証明

2通りの証明方法

(1) [代数的]

線形計画の相補性定理を利用

最大重みマッチング問題を線形計画問題に帰着

(2) [組合せ的, グラフ論的]

最短路問題を使って,

相補性条件を満たす双対問題の実行可能解を計算

➔ 最適解との関係を示す

線形計画の相補性定理を用いた証明(1)

- 最大重みマッチング問題を, **整数計画問題**として定式化
(E = 二部グラフの枝すべての集合)

最大化 $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j) x_{ij}$

条件 $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$$

この問題の最適解 $(x_{ij} | (i,j) \in E) \leftrightarrow$ 最大重みマッチング
最適解に対し, $\{(i,j) \in E \mid x_{ij} = 1\}$ は最大重みマッチング

線形計画の相補性定理を用いた証明(2)

$x_{ij} \in \{0,1\}$ を不等式条件 $x_{ij} \geq 0$ に緩める

→ 線形計画問題へ

最大化 $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件 $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

- 任意の許容解は $x_{ij} \leq 1$ を満たす
- 最適解 x_{ij}^* は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 → 元の整数計画問題の最適解

→ 最大重みマッチングに対応

定理: 前のスライドの整数計画問題の最適解は,

証明は後で

上記の線形計画問題の最適解

線形計画の相補性定理を用いた証明(3)

線形計画問題

最大化 $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件 $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$
 $\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$
 $x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

その双対問題 (=最大重みマッチングの双対問題)

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$
 $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

線形計画の相補性定理を用いた証明(4)

線形計画問題に対する相補性定理より, 以下が得られる

定理: 線形計画問題の主問題の許容解 x_{ij} は最適解

↔ 以下の条件を満たす, 双対問題の解が存在

$$\left. \begin{array}{l} q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall (i, j) \in E) \\ q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N) \end{array} \right\} \text{双対問題の許容解}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij} > 0 \text{ ならば } q(i) + p(j) = v(i, j) \quad (\forall (i, j) \in E) \\ \sum_{k \in N: (i, k) \in E} x_{ik} < 1 \text{ ならば } q(i) = 0 \quad (\forall i \in B) \\ \sum_{k \in B: (k, j) \in E} x_{kj} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 \quad (\forall j \in N) \end{array} \right\} \text{相補性条件}$$

主問題の許容解 x_{ij} がマッチングに対応する場合,
相補性条件は下記のように書き換えられる

(i, j) はマッチングの枝 $\rightarrow q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない $\rightarrow p(j) = 0$

線形計画の相補性定理を用いた証明(5)

最大重みマッチングに対応する主問題の解 x_{ij}^* は最適解

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる (証明終わり)

定理: マッチングに対応する許容解 x_{ij} は最適解 (最大重み)

↔ 以下の条件を満たす, 双対問題の解が存在

$$q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall (i, j) \in E)$$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

(i, j) はマッチングの枝 $\rightarrow q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない $\rightarrow p(j) = 0$

演習問題

問1: 線形計画問題とはどのような問題か, 定義を簡単に述べよ.

問2: 線形計画問題の標準形(基本的な形),
およびその双対問題を書け.

問3: 線形計画問題における双対定理の主張を書け.

問4: 線形計画問題における相補性定理の主張を書け.