数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

第5回　二部グラフの（最大重み）マッチング問題

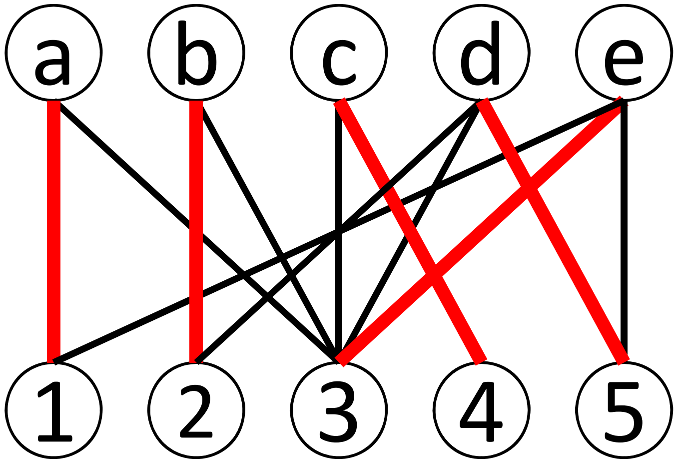
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

指定頂点をカバーするマッチング

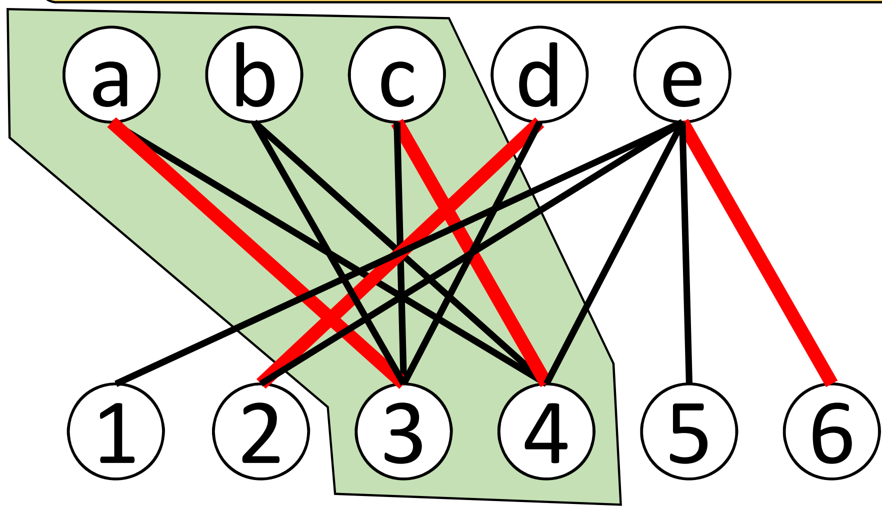
指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要条件

所与の B’⊆B をカバーするマッチングは存在するか？

B’={a,b,c,d,e}をカバー可能



B’={a,b,c,d,e}をカバー可能？



命題
ある X⊆B’に対し，
X の隣接頂点の数 ＜ |X|
➔ B’ すべてをカバーするマッチングは存在しない

a,b,c の隣接頂点 = {3,4}
∴ a,b,cのうち，高々2つしかカバーできない
→ B’ はカバーできない

指定頂点集合をカバーするマッチング：存在するための必要十分条件

命題 ある X⊆B'に対し，X の隣接頂点の数 < |X|
➔ B' すべてをカバーするマッチングは存在しない
（対偶：B' すべてをカバーするマッチングが存在
➔ 任意のX⊆B'に対し，X の隣接頂点の数 ≧ |X|

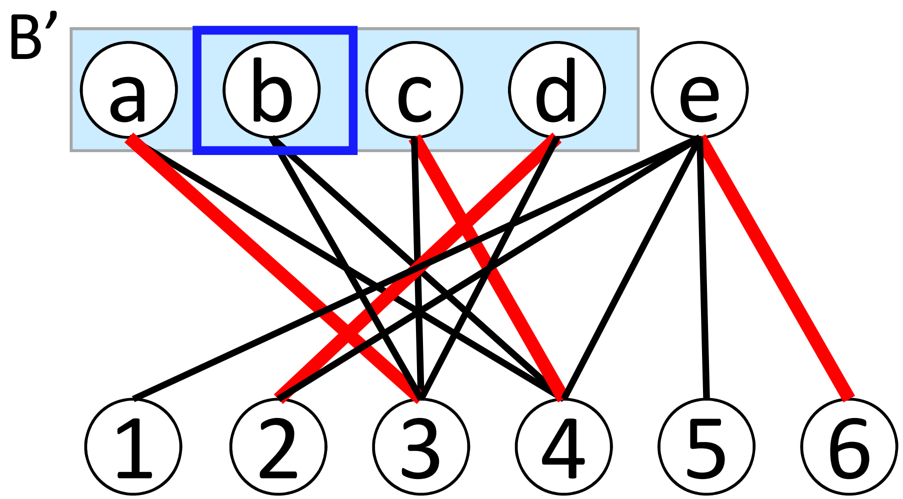
逆も成り立つ

定理（Hall（ホール）の定理）
B' すべてをカバーするマッチングが存在
⇔ 任意のX⊆B'に対し，X の隣接頂点の数 ≧ |X|

ホールの定理：証明

[🡐] 対偶「B' すべてをカバーするマッチングは存在しない
→ ある $X \subseteq B'$ に対し，　|X|> Xに隣接する頂点の数」を証明

- M: マッチング, カバーするB' の頂点数が最大とする
- S⊆B': マッチング枝が接続していないB' の頂点集合



ホールの定理：証明のつづき

Mのカバーする B’ の頂点数は最大

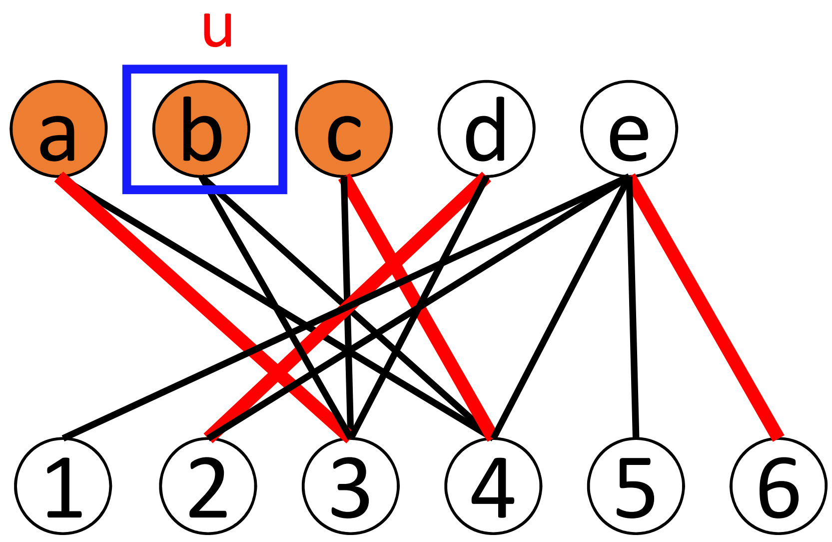
→ S の頂点から始まる，Mに関する増加路は存在しない

（∵存在する → カバーできる B’ の頂点数が増える）

仮定より，S は非空 → u∈S とする.

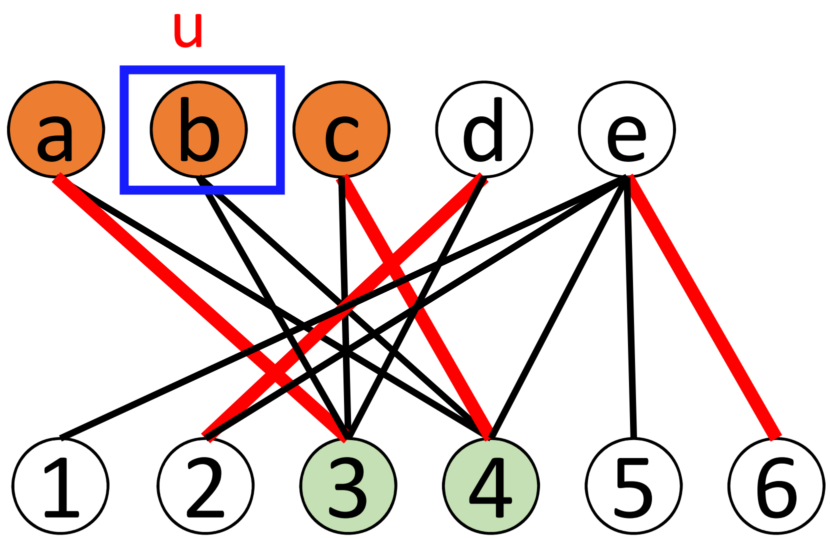
X⊆B’: u から交互路で到達可能な B’ の頂点

以降では，X の隣接頂点の数 < |X| を示す.



ホールの定理：証明のつづき

「X の隣接頂点の数 ＜ |X| 」の証明



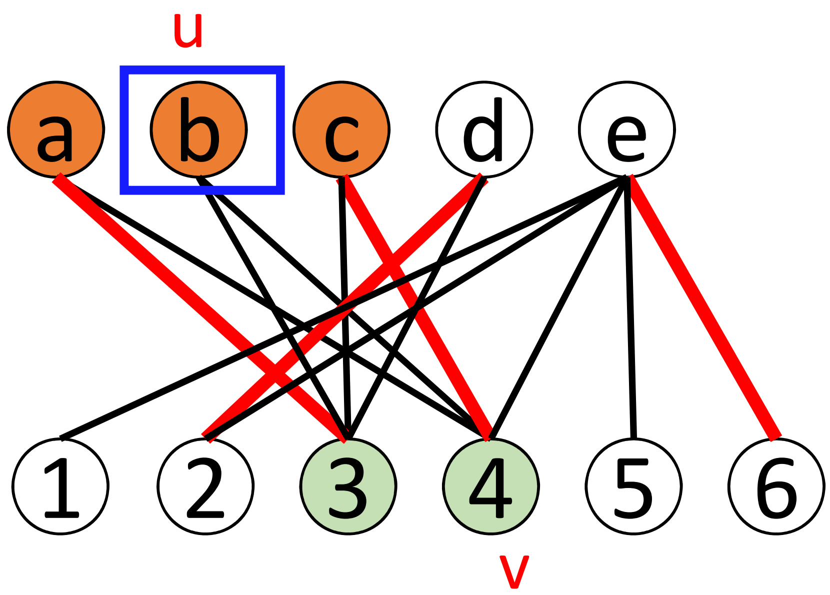
定義より，X – {u} の各頂点には
マッチングの枝が接続
Y⊆N: マッチングにおける X – {u} の
各頂点の「相手」の集合

➔ |Y|<|X|

以下では，　Y = X の隣接頂点　を示す．

ホールの定理：証明のつづき

「Y = X の隣接頂点」の証明



Y = X – {u} のマッチングの相手　　∴Y ⊆ X の隣接頂点

次に，X の任意の隣接頂点 v が v∈Y を満たすことを証明

v にはマッチングの枝が接続している

（∵接続していない ➔ u から v への増加路が存在（矛盾））

マッチングにおける v の相手∈X-{u}　∴ v∈Y

（∵ v の相手 ∉ X-{u} ➔ v の相手に到達する u からの交互路が存在

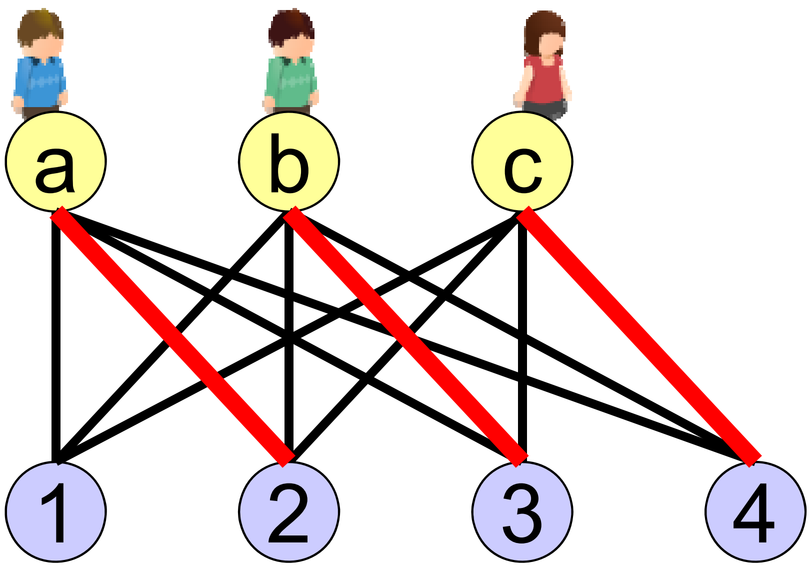
➔ v の相手∈X（矛盾））

証明終わり

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 v(i,j)が与えられている状況で
  入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

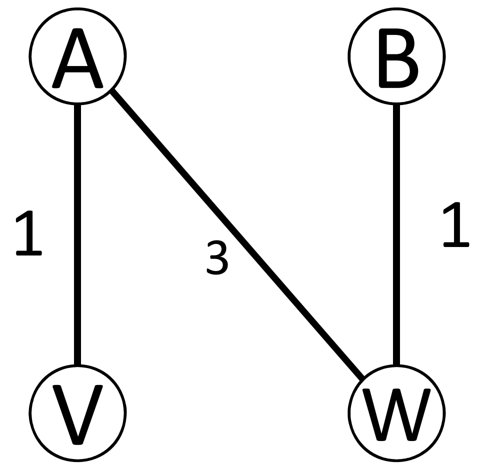
- 最大重みマッチング問題:
  枝に重みが与えられたグラフにおいて,
  枝重みの和が最大のマッチングを求める

最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

- 入力：二部グラフ G=(V,E)（頂点集合 V, 枝集合 E）,
  各枝 (u,v) の重み w(u,v)
  正整数 k
- 出力： 枝数＝k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
  （最大重みkマッチング）

例： 最大重み1マッチングは
{(A,W)}, 重み3
最大重み2マッチングは
{(A,V), (B, W)}, 重み2



最大重みマッチング問題の読み替え

- 入札者 → ある仕事の雇用者
- 財 → 労働者
- 評価値 v(i,j) → 仕事 i に労働者 j を割り当てたときの収益

※ 各仕事に従事できる労働者は高々ひとり
　各労働者が従事できる仕事は高々ひとつ

- 最大重みマッチング問題:　雇用者と労働者の仲介役の問題
  総収益が最大となるような，労働者の仕事への割当を求める

最大重みマッチングの双対問題

仲介役の別の仕事：

労働者の仕事への割当で得た収益をうまく配分

- $q(i)$ = 仕事 i の雇用者の取り分（≧0）
- $p(j)$ = 労働者 j の取り分　（≧0）
- 労働者 j が仕事 i に従事 → 収益 $v(i,j)$

$q(i) + p(j) < v(i,j)$ 成立

➔労働者 j と雇用者 i は単独で契約を結ぶ

∴ $q(i) + p(j) \geqq v(i,j)$ を満たす必要あり

仲介役の解くべき問題：

全労働者および全雇用者が不満をもつことなく，

配分するお金の総額を最小に　← 双対問題

双対問題の定式化

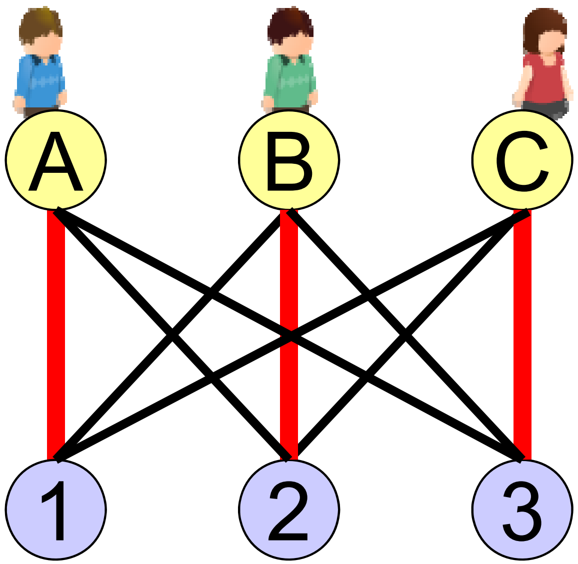
最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

オークションと最大重みマッチング問題の関係



v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

二部グラフを次のように定義

- 頂点集合 $V = B \cup N$
- 枝集合 $E = B \times N \quad (= \{(i,j) \mid i \in B,\ j \in N\})$
- 各枝(i,j)の重み = v(i,j)

➔ 最大重みマッチング問題が得られる

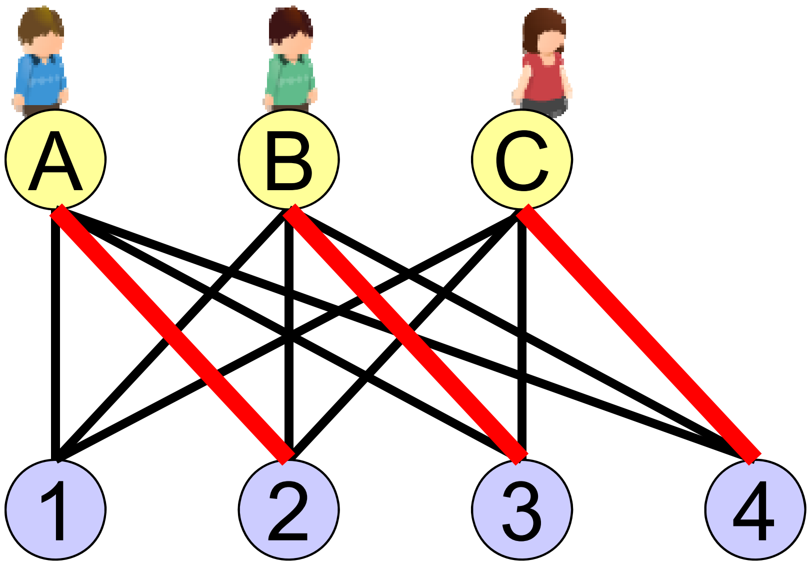
財の配分と二部グラフのマッチングは1対1対応

- 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング $M = \{(i, \alpha(i)) | i \in B, \alpha(i) \neq 0\}$

均衡配分と最大重みマッチングの関係

オークションの均衡配分 ＝ 最大重みマッチング

定理: $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分
$\Leftrightarrow$ $\alpha^*(i)$ に対応するマッチングは最大重み

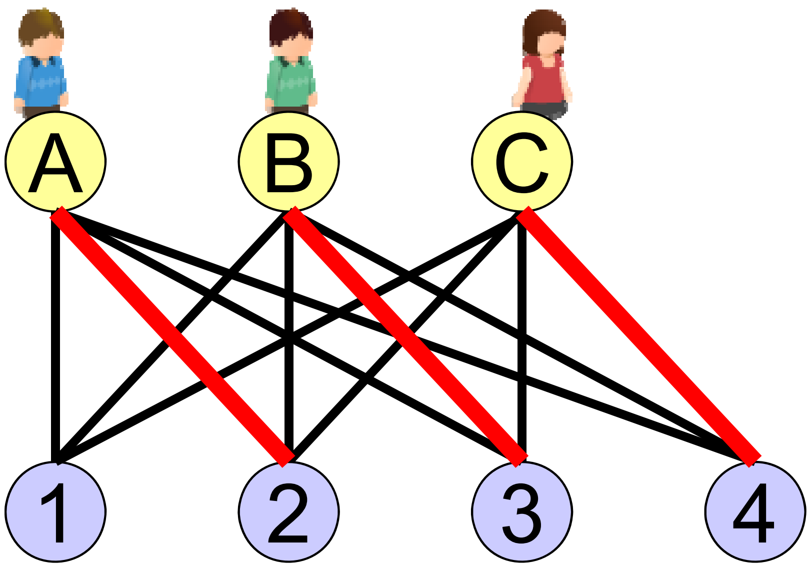


v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格と最大重みマッチングの双対問題の関係

定理: オークションの均衡価格 ←→ 双対問題の最適解

q(i) = 4 3 4



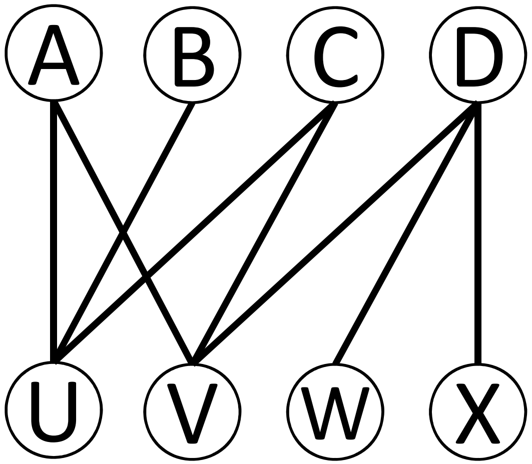
p(j)= 0 3 4 0
均衡価格

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

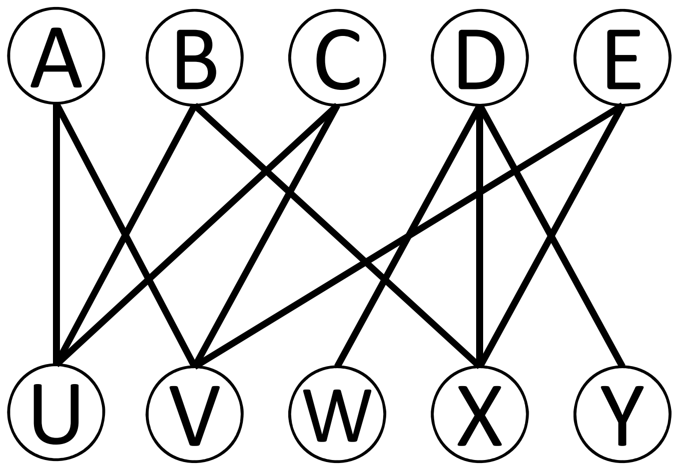
演習問題

問1：　以下の二部グラフでは，頂点集合 R をカバーする
マッチングが存在しない．
ホールの定理に基づき，その証拠を示せ．

（１）R={A, B, C, D}



（２）R={A, B, C, D, E}



演習問題

問２: 入札者{A,B}, 財{1,2,3}の場合において,
均衡配分が最大重みマッチングになることを以下の手順で証明せよ.
なお, 入札者 X の財 j に対する評価値は v(X, j) とする.
(1) 均衡配分において, 両方の入札者に財が割り当てられる
ことを証明せよ.
(2) 最大重みマッチングにおいて, 両方の入札者に財が
割り当てられることを証明せよ.

一般性を失うことなく,
均衡配分ではAに財1, Bに財2が割り当てられると仮定する.
(3) この配分に対する, 均衡条件を書け
(4) 任意の配分 $\alpha(A), \alpha(B) \in \{1,2,3\}, \alpha(A) \neq \alpha(B)$ に対し,
$v\big(A, \alpha(A)\big) + v\big(B, \alpha(B)\big) \leq v(A,1) + v(B,2)$ が成り立つことを示せ.