

# 数理経済学特講

## 複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

---

### 第10回 均衡を厳密に計算するアルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

# 均衡を厳密に計算する

- 入札者の評価値の情報を陽に使わず, 均衡(価格)を厳密に計算
  - 使える情報:
    - 価格  $(p(1), p(2), \dots, p(n))$  を入札者に提示
    - 最も欲しい財 ( $v(i,j)-p(j) \geq 0$  かつ  $v(i,j)-p(j)$  最大の財) を全て答える
- 仮定: 評価値  $v(i,j)$  はすべて整数
- 計算の方針
    - 現在の価格ベクトルが均衡か否かを判定
      - 最大マッチング問題を利用
    - 均衡価格でない → 価格を更新
      - 最大マッチング問題の結果を利用, 価格を更新する財を選ぶ

# 均衡条件の書き換え(その1)

定義: 財の価格  $p(j) \in \mathbb{R}_+$  は 均衡価格

$\longleftrightarrow$  以下の条件を満たす財の配分  $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$  が存在  
ただし  $q(i) \equiv \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$

- ① 入札者  $i$  に財  $j$  が割り当てられる ( $\alpha(i) = j$ )  
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)$
- ② 入札者  $i$  に財の割り当てがない ( $\alpha(i) = 0$ )  $\rightarrow q(i) \leq 0$
- ③ 財  $j$  が誰にも割り当てられない  $\rightarrow p(j) = 0$

マッチングを用いて, 均衡条件の書き換えが可能

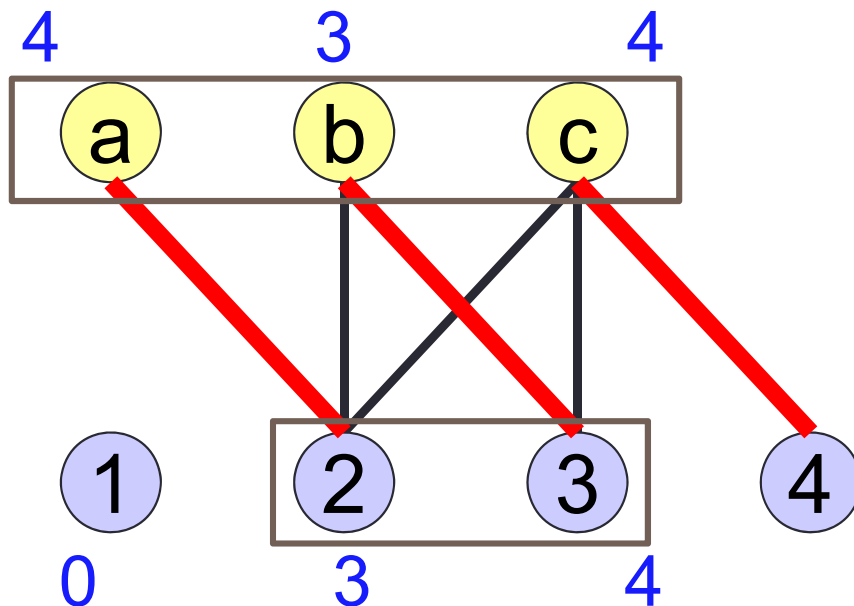
# 均衡条件の書き換え(その2)

定義: 財の価格  $p(j) \in \mathbb{R}_+$  は 均衡価格

$\longleftrightarrow$  頂点集合  $B \cup N$ , 枝集合  $E$  の二部グラフにおいて,  
頂点集合  $B' \cup N'$  をカバーするマッチングが存在

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$

$$E = \{(i, j) \mid i \in B, j \in N, 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)\}$$



| $v(i,j)$ | a | b | c | $v(i,j)-p(j)$ | a  | b | c |
|----------|---|---|---|---------------|----|---|---|
| ①        | 3 | 1 | 0 | ①             | 3  | 1 | 0 |
| ②        | 7 | 6 | 7 | ②             | 4  | 3 | 4 |
| ③        | 1 | 7 | 8 | ③             | -3 | 3 | 4 |
| ④        | 0 | 0 | 4 | ④             | 0  | 0 | 4 |

0  $\longrightarrow$  均衡価格である

# 均衡条件の書き換え(その3)

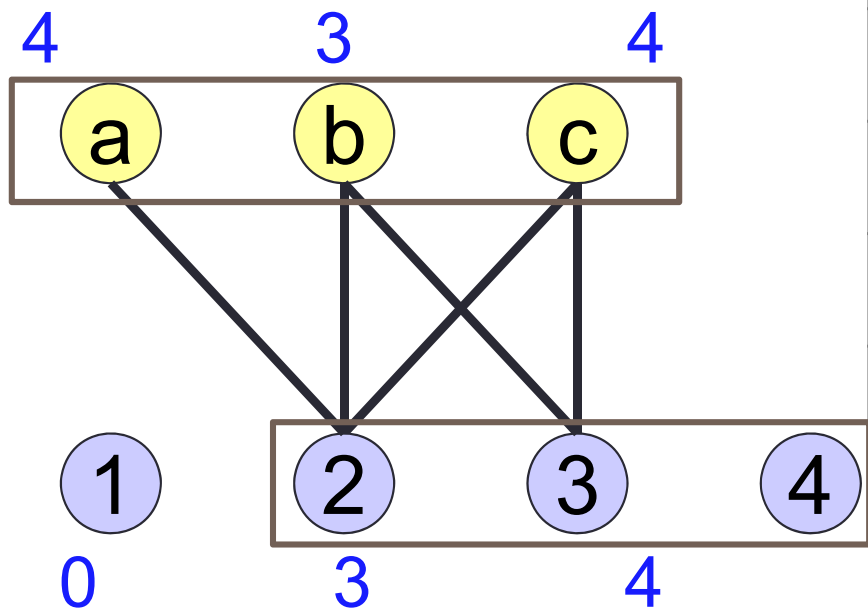
定義: 財の価格  $p(j) \in \mathbb{R}_+$  は 均衡価格

$\longleftrightarrow$  頂点集合  $B \cup N$ , 枝集合  $E$  の二部グラフにおいて,

頂点集合  $B' \cup N'$  をカバーするマッチングが存在

$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \quad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$

$$E = \{(i, j) \mid i \in B, j \in N, 0 \leq v(i, j) - p(j) = q(i)\}$$



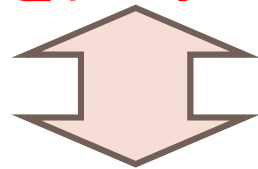
| $v(i,j)$ | a | b | c | $v(i,j)-p(j)$ | a  | b  | c |
|----------|---|---|---|---------------|----|----|---|
| ①        | 3 | 1 | 0 | ①             | 3  | 1  | 0 |
| ②        | 7 | 6 | 7 | ②             | 4  | 3  | 4 |
| ③        | 1 | 7 | 8 | ③             | -3 | 3  | 4 |
| ④        | 0 | 0 | 4 | ④             | -1 | -1 | 3 |

1  $\longrightarrow$  均衡価格ではない

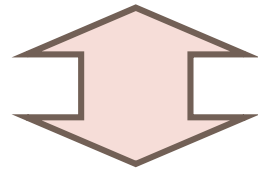
# 均衡条件の書き換え(その4)

過去の授業で示した定理より, 以下が成立

頂点集合  $B \cup N$ , 枝集合  $E$  の二部グラフにおいて,  
 頂点集合  $B' \cup N'$  を同時にカバーするマッチングが存在



- ・  $B'$  をカバーするマッチングが存在
- ・  $N'$  をカバーするマッチングが存在



(ホールの定理)

- 任意の  $X \subseteq B'$  に対し,  $X$  の隣接頂点の数  $\geq |X|$   
 ( $X$  内の入札者が欲しい財の数  $\geq |X|$ )
- 任意の  $Y \subseteq N'$  に対し,  $Y$  の隣接頂点の数  $\geq |Y|$   
 ( $Y$  内の財を欲しい入札者の数  $\geq |Y|$ )

# 均衡条件の書き換え(その5)

さらなる書き換え

**定義:**  $D_i(p) \equiv$  価格  $p$  の下で入札者  $i$  が最も欲しい財の集合

**命題:** 以下の2条件は等価:

- (i) 任意の  $X \subseteq B'$  に対し,  $X$  内の入札者が欲しい財の数  $\geq |X|$
- (ii) 任意の  $Z \subseteq N$  に対し,  $|Z| \geq (D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$

$[(i) \rightarrow (ii)]$   $X = \text{「} D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{」の集合}$

$Y = X$  内の入札者が欲しい財の集合 とおくと,

$Y$  の定義より  $Y = \bigcup_{i \in B'} D_i(p) \subseteq Z$

また, (i) より  $|X| \leq |Y| \leq |Z| \quad \therefore (ii) \text{ 成立}$

$[(i) \leftarrow (ii)]$   $Z = X$  内の入札者が欲しい財の集合

$W = \text{「} D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{」の集合}$  とおくと,

$i \in X \rightarrow D_i(p) \subseteq Z \rightarrow i \in W \quad \therefore X \subseteq W$

また, (ii) より  $|Z| \geq |W| \geq |X| \quad \therefore (i) \text{ 成立}$

# アルゴリズムの方針

満たすべき条件:

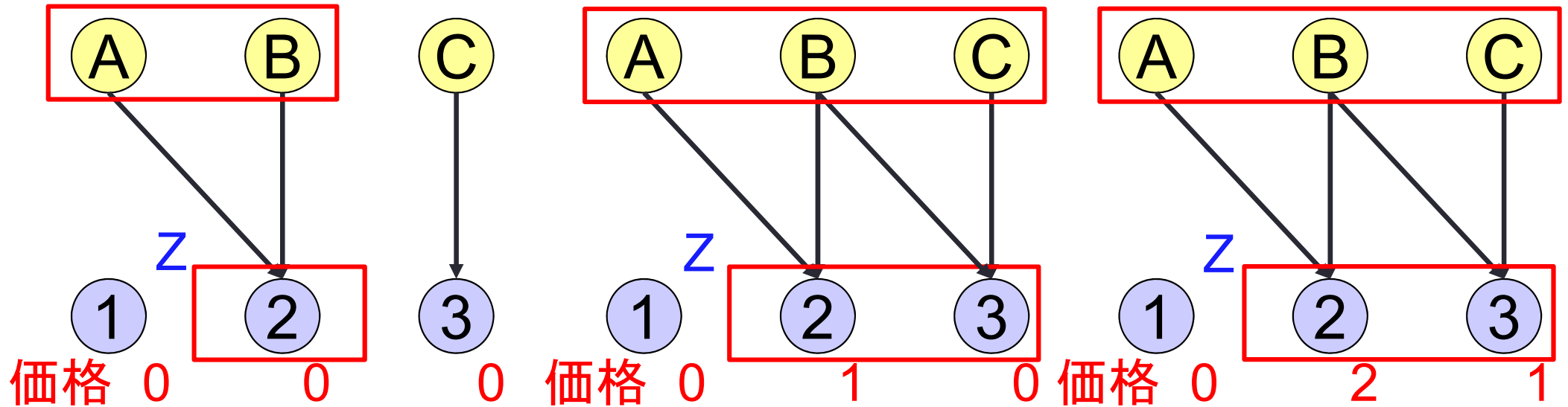
① 任意の  $Z \subseteq N$  に対し,

$$|Z| \geq (D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$$

② 任意の  $Y \subseteq N'$  に対し,  $(Y \text{ 内の財を欲しい入札者の数}) \geq |Y|$

- 条件②を満たしつつ, ①に違反する  $Z$  を減らすよう, 価格を増やす
  - 価格  $p=(0,0,\dots,0)$  のとき,  $N'=\emptyset$  なので②は成立
  - ①に違反する  $Z \leftrightarrow Z$  のみを欲しい入札者が多すぎる  
 $\therefore Z$  に含まれる(幾つかの)財の価格を増やせば,  
 欲しい入札者を減らせる(かもしれない)
  - ①に違反する  $Z$  の中で**極小**なものを選び,  
 $Z$  内の全ての財の価格を増やす
  - このように価格を増やすと, 条件②は満たされたままである

# アルゴリズムの実行例(1)

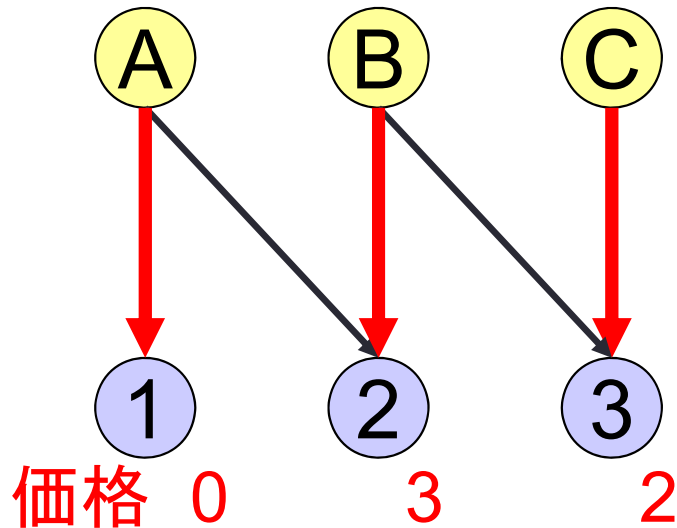


| $v(i,j)$ | A | B | C |
|----------|---|---|---|
| ①        | 3 | 1 | 1 |
| ②        | 6 | 5 | 3 |
| ③        | 2 | 4 | 4 |

| 利得 | A | B | C |
|----|---|---|---|
| ①  | 3 | 1 | 1 |
| ②  | 5 | 4 | 2 |
| ③  | 2 | 4 | 4 |

| 利得 | A | B | C |
|----|---|---|---|
| ①  | 3 | 1 | 1 |
| ②  | 4 | 3 | 1 |
| ③  | 1 | 3 | 3 |

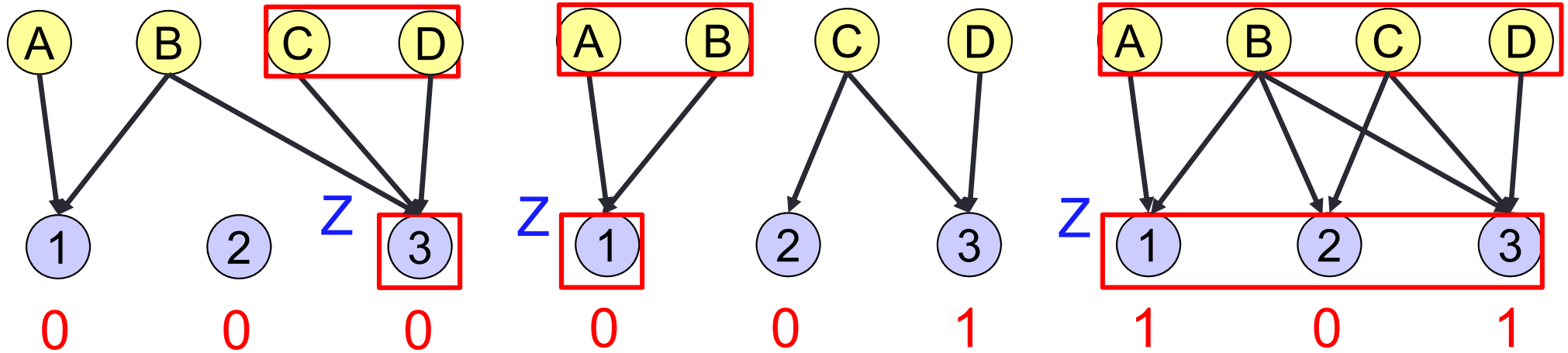
# アルゴリズムの実行例(1)



| 利得 | A | B | C |
|----|---|---|---|
| ①  | 3 | 1 | 1 |
| ②  | 3 | 2 | 0 |
| ③  | 0 | 2 | 2 |

①の条件に違反するZなし  
→ アルゴリズム終了  
所望のマッチング存在

# アルゴリズムの実行例(2)

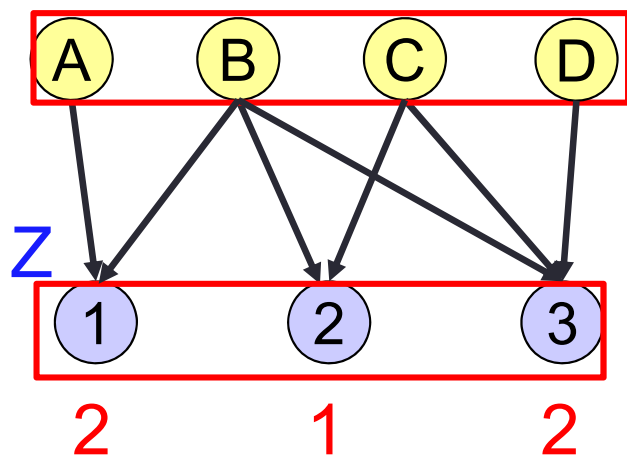


| $v(i,j)$ | A | B | C | D |
|----------|---|---|---|---|
| ①        | 3 | 7 | 1 | 0 |
| ②        | 1 | 6 | 7 | 0 |
| ③        | 0 | 7 | 8 | 4 |

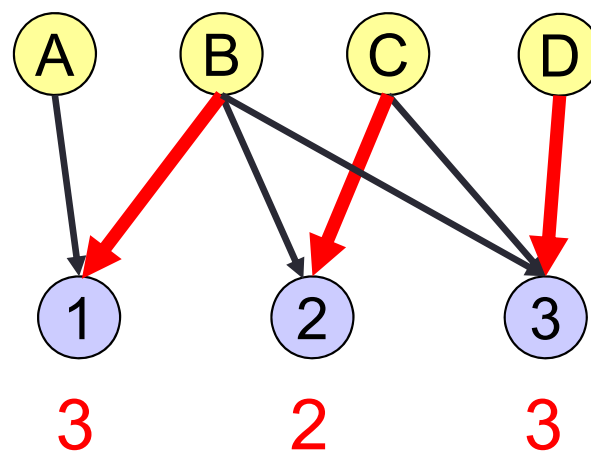
| 利得 | A  | B | C | D |
|----|----|---|---|---|
| ①  | 3  | 7 | 1 | 0 |
| ②  | 1  | 6 | 7 | 0 |
| ③  | -1 | 6 | 7 | 3 |

| 利得 | A  | B | C | D  |
|----|----|---|---|----|
| ①  | 2  | 6 | 0 | -1 |
| ②  | 1  | 6 | 7 | 0  |
| ③  | -1 | 6 | 7 | 3  |

# アルゴリズムの実行例(2)



| 利得 | A  | B | C  | D  |
|----|----|---|----|----|
| ①  | 1  | 5 | -1 | -2 |
| ②  | 0  | 5 | 6  | -1 |
| ③  | -2 | 5 | 6  | 2  |



| 利得 | A  | B | C  | D  |
|----|----|---|----|----|
| ①  | 0  | 4 | -2 | -3 |
| ②  | -1 | 4 | 5  | -2 |
| ③  | -3 | 4 | 5  | 1  |

①の条件に  
違反するZなし  
→ アルゴリズム終了  
所望の  
マッチング存在

Aの最大利得=0

# アルゴリズムの正当性の証明

二部グラフ  $(B, N; E')$ ,  $B' = \text{最大利得} > 0 \text{ の入札者全員}$   
 $N' = \text{価格} > 0 \text{ の財全体}$

満たすべき条件:

- ① 任意の  $Z \subseteq N$  に対し,  
 $|Z| \geq (D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$
  - ② 任意の  $Y \subseteq N'$  に対し,  $(Y \text{ 内の財を欲しい入札者の数}) \geq |Y|$   
 $(Y \text{ に隣接する頂点数 } \geq |Y|)$
- アルゴリズムが終了  $\iff$  条件①成立
  - すべての財の利得  $\leq 0$  になったら, 定義より  $B' = \emptyset \therefore$  条件①成立
  - 各反復において, ある財の価格が1増加
  - $\therefore$  すべての財の利得  $\leq 0$  になるまで, たかだか有限回
  - よって, 条件②が常に満たされることを証明すれば良い.

# 条件②が成り立つことの証明: 準備

② 任意の  $Y \subseteq N'$  に対し,  $Y$  に隣接する頂点数  $\geq |Y|$

条件②が価格増加前に成立と仮定.

$Z =$  ①に違反する集合の中で極小なもの

財集合  $Z$  の価格を増やした後も②が成り立つことを証明する

$X =$  「(増加前の価格  $p$  において)  $D_i(p) \subseteq Z$  を満たす入札者  $i \in B'$ 」の集合

$p' =$  増加後の価格  $(p'(j)=p(j)+1 \ (j \in Z), p'(j)=p(j) \ (j \in N-Z))$

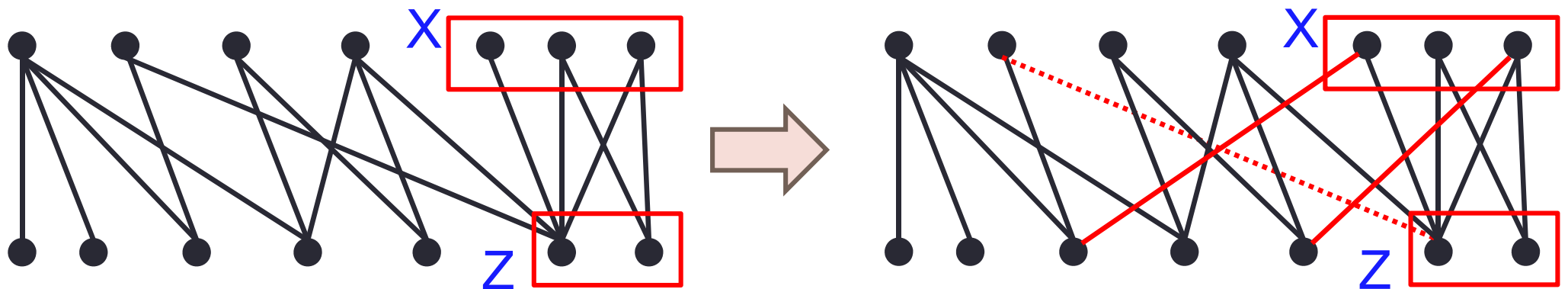
とおく.

$Z$  は条件①に違反する, つまり  $|Z| < |X|$

# 条件②が成り立つことの証明: 準備

価格  $p \rightarrow p'$  の変化による, 2部グラフの枝の変化

- (i)  $B - X$  と  $Z$  を結ぶ枝は消える
- (ii)  $B-X$  と  $N-Z$  の間の枝は不変
- (iii)  $X$  と  $Z$  の間の枝は不変
- (iv) 価格  $p$  のとき,  $X$  と  $N - Z$  を結ぶ枝は存在しない
- (v) 価格が  $p'$  が増えたと,  $X$  と  $N - Z$  を結ぶ枝は現れる可能性あり



# 条件②が成り立つことの証明: 準備

(i)  $B - X$  と  $Z$  を結ぶ枝は消える (ii)  $B-X$  と  $N-Z$  の間の枝は不変

[証明]  $i \in B-X$  と  $j \in Z$  を結ぶ枝が存在すると仮定 ( $j \in D_i(p)$ )

$X$  の定義より,  $i \in B-X$  は  $N-Z$  の中に最大利得の財  $j^*$  をもつ

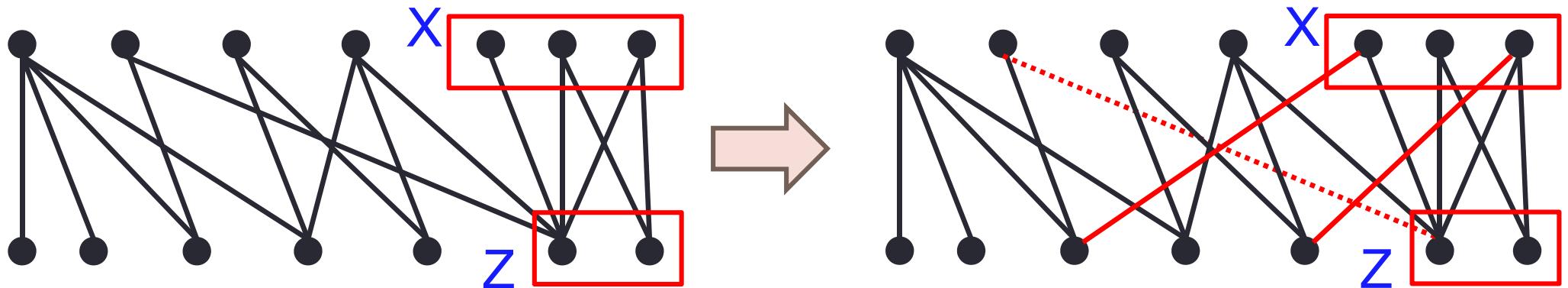
$$\therefore v(i, j^*) - p(j^*) = \max_{h \in N \setminus Z} \{v(i, h) - p(h)\} \geq \max_{h \in Z} \{v(i, h) - p(h)\}$$

$p \rightarrow p'$  のとき,  $Z$  の中の財のみ価格増加  $\rightarrow$  利得減少

$$\therefore v(i, j^*) - p'(j^*) > \max_{h \in Z} \{v(i, h) - p'(h)\} \therefore (i) \text{ 成立}$$

$N - Z$  の財は価格不変

$\rightarrow N - Z$  の中での利得最大の財は不変  $\therefore (ii) \text{ 成立}$



## 条件②が成り立つことの証明: 準備

(iii)  $X$  と  $Z$  の間の枝は不変

(iv) 価格  $p$  のとき,  $X$  と  $N - Z$  を結ぶ枝は存在しない

(v) 価格が  $p'$  に増えると,  $X$  と  $N - Z$  を結ぶ枝は現れる可能性あり

[証明]  $i \in X$  に対し, 価格  $p$  における最大利得の財は

すべて  $Z$  に含まれる ( $D_i(p) \subseteq Z$ )  $\rightarrow$  (iv)

$$\begin{aligned} \therefore \max_{h \in N} \{v(i, h) - p(h)\} &= \max_{h \in Z} \{v(i, h) - p(h)\} \\ &> \max_{h \in N \setminus Z} \{v(i, h) - p(h)\} \end{aligned}$$

よって  $Z$  の価格増加後 ( $p \rightarrow p'$ ) は

$$\begin{aligned} \max_{h \in N} \{v(i, h) - p'(h)\} &= \max_{h \in Z} \{v(i, h) - p'(h)\} \\ &\geq \max_{h \in N \setminus Z} \{v(i, h) - p'(h)\} \end{aligned}$$

$\therefore i \in X$  の最大利得だった財 in  $Z$  は, 利得最大のまま ( $\therefore$  (iii))

$N - Z$  の財も利得最大になる可能性あり ( $\therefore$  (v))

# 条件②が成り立つことの証明(その1)

$Y \subseteq N'$  に関する場合分けで,

「価格  $p'$  のときに  $Y$  に隣接する頂点数  $\geq |Y|$ 」を証明

[(Case 1)  $Y \subseteq N-Z$  の場合]

- 価格  $p'$  のとき,  
 $Y$  に隣接する頂点数  $\geq Y$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数 (自明)
- 前述のグラフの性質 (ii),(iv),(v) より,  
 価格  $p'$  のときに  $Y$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数  
 $\geq$  価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数
- グラフの性質 (iv)より,  
 価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数  
 $=$  価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する頂点数
- 仮定より, 価格  $p$  のときに条件②が成り立つ  
 $\therefore$  価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する頂点数  $\geq |Y|$

## 条件②が成り立つことの証明(その2)

[(Case 2)  $Y \subseteq Z$  の場合]

価格  $p'$  のとき,

$Y$  に隣接する点数  $\geq Y$  に隣接する  $X$  内の頂点数 (自明)

• グラフの性質 (iii) より,

価格  $p'$  のときに  $Y$  に隣接する  $X$  内の頂点数

= 価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する  $X$  内の頂点数

以下, 価格  $p$  のときに  $Y$  に隣接する  $X$  内の頂点数  $\geq |Y|$  を証明

[(Case 2-1)  $Y=Z$  の場合]

$X$  の定義より, 価格  $p$  のとき, 各  $i \in X$  は  $Z$  に隣接

$\therefore$  価格  $p$  のときに  $Z$  に隣接する  $X$  内の頂点数 =  $|X| > |Z| = |Y|$

## 条件②が成り立つことの証明(その3)

[(Case 2-2)  $Y \subset Z$ の場合]

価格  $p$  のとき,  $Z$  は条件①に違反する集合の中で極小

$\therefore$  任意の  $Z' \subset Z$  に対し, 条件①が成立:

$|Z'| \geq (D_i(p) \subseteq Z' \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$

$Z' = Z - Y$ ,  $X' = (D_i(p) \subseteq Z - Y \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の集合})$  とおく

$\rightarrow |Z'| \geq |X'|$  成立. さらに  $X' \subseteq X$  ( $\because D_i(p) \subseteq Z' \subseteq Z$ )

$X$  と  $X'$  の定義より, 各  $i \in X - X'$  に対し  $D_i(p) \not\subseteq Z'$ ,  $D_i(p) \subseteq Z$

$\therefore$  各  $i \in X - X'$  は  $Z - Z' = Y$  の中に利得最大の財をもつ ( $i$  は  $Y$  に隣接)

$|Z| < |X|$  より,

$Y$  に隣接する  $X$  内の頂点数  $\geq |X| - |X'| > |Z| - |Z'| = |Z| - |Z - Y| = |Y|$

## 条件②が成り立つことの証明(その4)

[(Case 3)  $Y-Z \neq \emptyset$  かつ  $Y \cap Z \neq \emptyset$  の場合]

$Y' = Y - Z$ ,  $Y'' = Y \cap Z$  とおく.

(Case 1) の証明より,

価格  $p'$  のときに  $Y'$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数  $\geq |Y'|$

(Case 2) の証明より,

価格  $p'$  のときに  $Y''$  に隣接する  $X$  内の頂点数  $\geq |Y''|$

$\therefore$  価格  $p'$  のとき,

$Y$  に隣接する頂点数

$\geq Y'$  に隣接する  $N-X$  内の頂点数

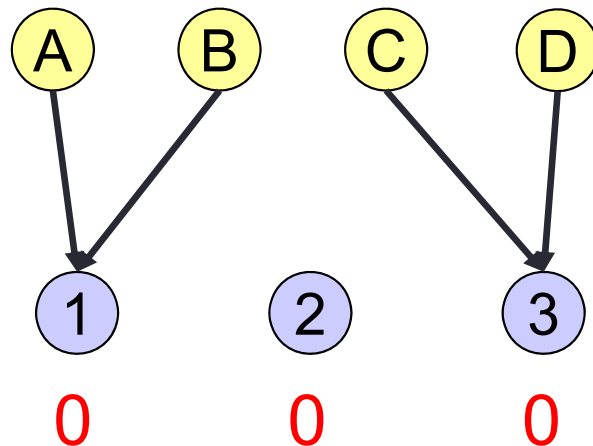
+  $Y''$  に隣接する  $X$  内の頂点数

$= |Y'| + |Y''| = |Y|$

# 価格の増やし方の問題点

## 価格の増やし方

- 現状：以下の条件を満たす，極小な財集合  $Z \subseteq N$  を使う  
 $|Z| < (D_i(p) \subseteq Z \text{ を満たす入札者 } i \in B' \text{ の数})$
- 効率が悪いことも...
  - 下記の例：財1と財3の価格を交互に増加する必要性  
 同時に増やす方が反復回数が減る



| $v(i,j)$ | A | B | C | D |
|----------|---|---|---|---|
| ①        | 3 | 7 | 1 | 0 |
| ②        | 0 | 4 | 7 | 0 |
| ③        | 0 | 4 | 8 | 4 |

# 価格の増やし方の改良案

- 改良案:

$(D_i(p) \subseteq Z$  を満たす入札者  $i \in B'$  の数)  $- |Z|$

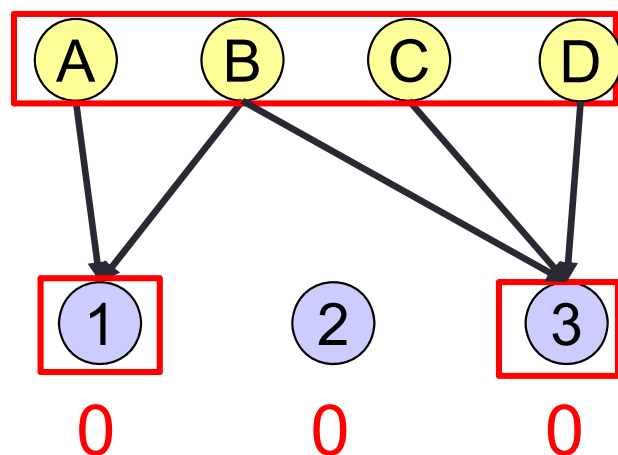
を最大にする財集合  $Z \subseteq N$  を使う.

複数存在する場合は, 極小なものを選ぶ.

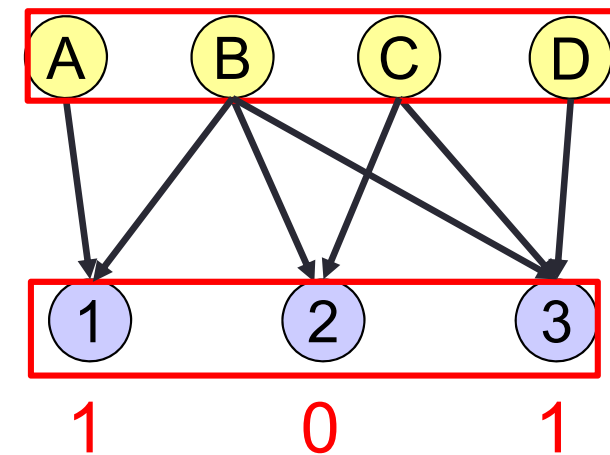
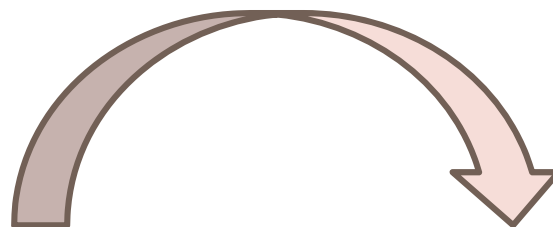
- アルゴリズムの正当性の証明: 改良前の証明を若干修正すればOK

# アルゴリズムの実行例

修正案を適用 → 1, 2回目の価格更新がひとまとめになる



| $v(i,j)$ | A | B | C | D |
|----------|---|---|---|---|
| ①        | 3 | 7 | 1 | 0 |
| ②        | 1 | 6 | 7 | 0 |
| ③        | 0 | 7 | 8 | 4 |



| 利得 | A  | B | C | D  |
|----|----|---|---|----|
| ①  | 2  | 6 | 0 | -1 |
| ②  | 1  | 6 | 7 | 0  |
| ③  | -1 | 6 | 7 | 3  |

# 改良による反復回数の減少

- 価格増加する財の選び方の変更により,  
アルゴリズムの反復回数が減少(増えない)
- 極小均衡価格 $= (p^*(1), \dots, p^*(n))$ のとき,  
アルゴリズムの反復回数  $\geq \max p^*(j)$

**定理**[Andersson-Erlanson(2013), Murota-Shioura-Yang(2013)]:  
改良後のアルゴリズムの反復回数  $= \max p^*(j)$

つまり, 改良によって,  
反復回数が最小のアルゴリズムになった

# 演習問題

下記のように評価値が与えられたとき、  
均衡を厳密に計算するアルゴリズムを適用して  
均衡価格を計算せよ。

問1

| $v(i,j)$ | A | B | C |
|----------|---|---|---|
| ①        | 2 | 3 | 6 |
| ②        | 6 | 7 | 7 |

問3

| $v(i,j)$ | A | B | C |
|----------|---|---|---|
| ①        | 3 | 1 | 0 |
| ②        | 7 | 6 | 7 |
| ③        | 1 | 7 | 8 |
| ④        | 0 | 0 | 4 |

問2

| $v(i,j)$ | A | B | C |
|----------|---|---|---|
| ①        | 3 | 1 | 0 |
| ②        | 7 | 6 | 7 |
| ③        | 1 | 7 | 8 |