

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと 離散最適化

第2回

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今後の予定

- 10/2 最短路問題
- 10/5 工大祭準備日のため 講義なし
- 10/9 最短路問題
- 10/12 出張のため休講
- 10/16 二部グラフの最大マッチング問題

(単一始点全終点)最短路問題

- 入力: 有向グラフ $G=(V, E)$

枝の長さが負の場合も扱う

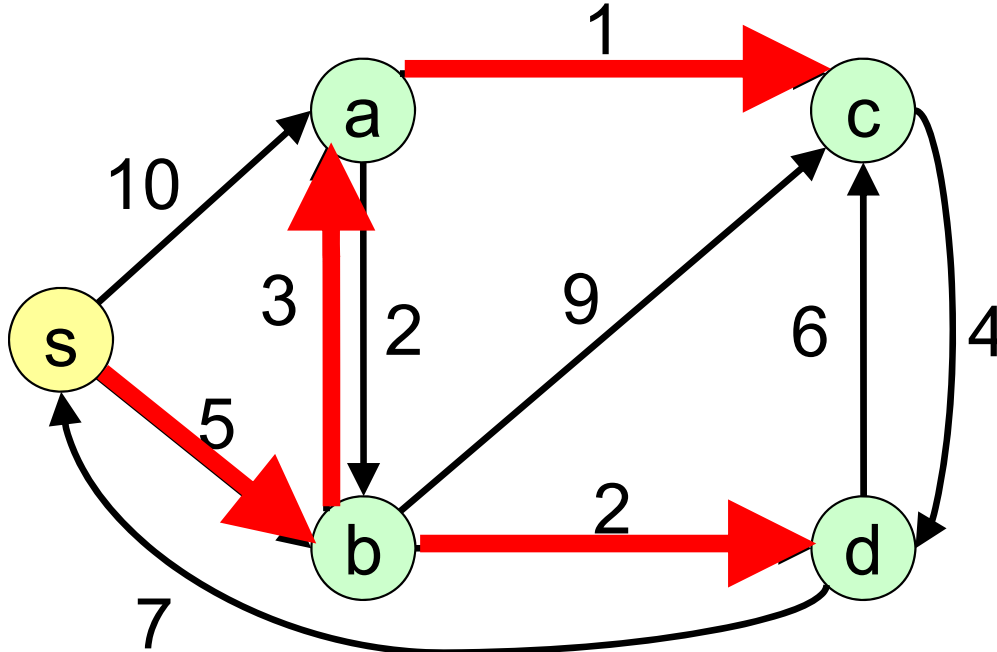
各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$), 始点 $s \in V$

(仮定: 始点 s から各頂点に向かう有向路が存在)

- 出力: s から **すべての頂点 v への最短路 $P(v)$ とその長さ $d(v)$**

(s から v への **最短路 P^***

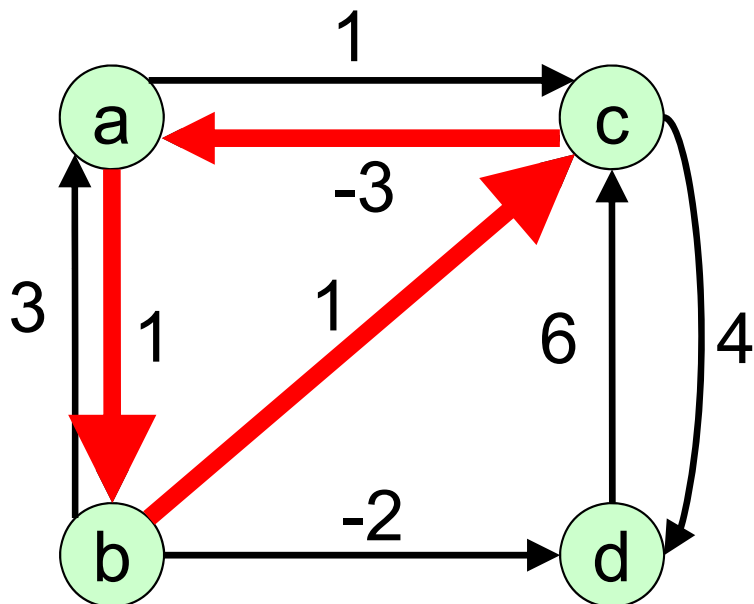
= s から v への有向路のうち, 枝の長さの和 $\ell(P^*)$ が最小のもの)



注意: 有向路は, 同じ頂点, 枝を何回通っても可

関連する問題：グラフの負閉路の検出

- 入力：有向グラフ $G=(V, E)$
各枝の長さ $\ell(e)$ ($e \in E$)
- 出力：グラフに負閉路が「存在する」または「存在しない」の答え
存在するときは，負閉路を求める
(**負閉路** = 有向閉路のうち，枝の長さの和が負のもの)



有向閉路：
閉路路の各枝の向き付けが同じ

関連する問題：差分不等式系

- 入力： n 個の変数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ からなる, 次の形の不等式系

$$p_i - p_j \leq \alpha_{ij}, \quad \beta_i \leq p_i \leq \gamma_i$$

(注意：等式を含んでも良い)

- 出力：不等式系に解が「ある」または「ない」の答え

「ある」→解を求める

「ない」→解がないことの証拠(できれば)

具体例

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_3 - p_1 &\leq 1, \\ p_3 - p_2 &\leq 3, & p_4 - p_2 &\leq 5, \\ p_4 - p_3 &\leq 4, & p_3 - p_4 &\leq 6, \\ p_1 &= 0, & p_4 &\leq 5 \end{aligned}$$



解あり

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (0, 1, 1, 5)$$

解なし

以下の不等式は矛盾する

不等式 $p_1 - p_3 \leq -5$
を追加



$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_3 - p_2 &\leq 3, \\ p_1 - p_3 &\leq -5 \end{aligned}$$

今回の講義の目標

- 最短路問題のもつ性質を理解する
- 最短路問題をとくアルゴリズムを学ぶ
- 差分不等式系の問題が最短路問題に帰着できることを理解する
- 均衡配分・均衡価格の計算にどのように役立つかを理解する
 - 与えられた配分が均衡配分か否かのチェック
 - 均衡配分が与えられたとき, 均衡価格を計算
 - 均衡配分の計算で利用(←次回以降)

応用：均衡配分の判定（その1）

複数不可分財のオークションにおいて,

- 与えられた財の配分が均衡配分か否かを判定したい
- 与えられた均衡配分に対応する均衡価格を計算したい

定義： 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は **均衡配分**

$\iff$ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

この条件のチェックは,
差分不等式系の解の有無の判定に帰着可能

応用：均衡配分の判定（その2）

定義：財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

$\iff$ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

均衡条件を差分不等式系として書き換え

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow v(i, j) - p(j) \geq 0, v(i, j) - p(j) \geq v(i, h) - p(h) \ (\forall h \in N)$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow v(i, h) - p(h) \leq 0 \ (\forall h \in N)$
- 財 j が誰にも割り当てられない $\rightarrow p(j) = 0$

(a) 条件を満たす価格が存在する $\rightarrow$ 与えられた配分は均衡配分

(b) しない $\rightarrow$ 均衡配分ではない

(a) の場合：最短路問題を解いて均衡価格が得られる

(b) の場合：均衡価格が存在しない証拠が得られる

$\rightarrow$ 均衡配分ではない証拠

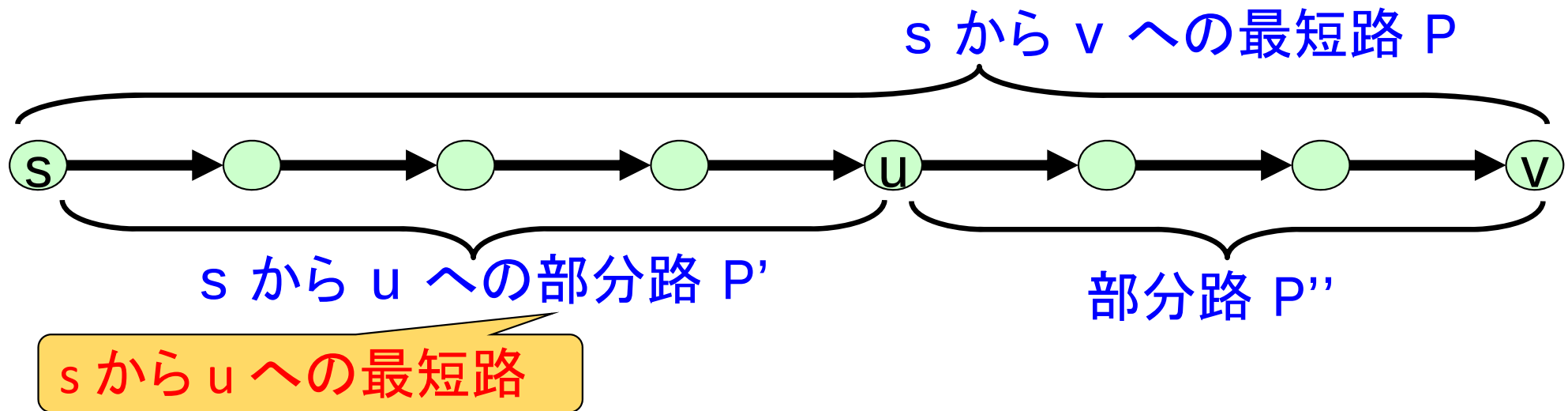
最短路の性質

最短路の部分路は最短路

命題 P : 頂点 s から頂点 v への最短路

P は途中に頂点 u を含むと仮定

→ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



(証明) もし P' より短い, s から u への有向路 Q が存在する

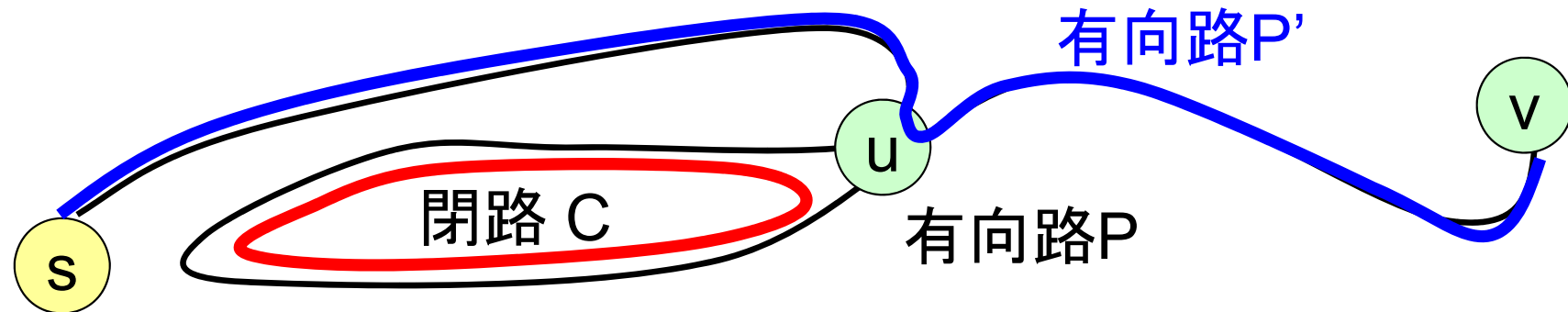
→ s から v へ行くとき, u までは Q を使い, u からは P'' を使うと
その長さは $\ell(Q) + \ell(P'') < \ell(P') + \ell(P'') = \ell(P)$ (矛盾)

最短路の枝数の性質

命題 s から v への最短路が存在
 → 枝数 $\leq |V|-1$ の最短路が存在

(証明) P : s から v への最短路, その中で枝数が最小
 枝数が $|V|$ 以上と仮定, 矛盾を導く

→ 同じ頂点が2回現れる, つまり閉路を含む



閉路 C が負閉路 → C をもう1回通ると路長が短くなる (矛盾)

正閉路 → 閉路 C を通らない方が長さが短くなる (矛盾)

∴ 閉路 C の長さ = 0 よって, 閉路 C を通らなくても長さ同じ

枝数 $\leq |V|-1$

負閉路と最短路

定理 始点 s から各頂点への最短路が存在
 $\longleftrightarrow$ 負閉路が存在しない
 (対偶: 始点 s からある頂点への最短路が存在しない
 $\longleftrightarrow$ 負閉路が存在する)

注意: 始点 s から頂点 v への最短路が存在しない
 $\longleftrightarrow$ 始点 s から頂点 v への有向路の長さは任意に小さく出来る

負閉路が存在しない→最短路が存在

命題 負閉路が存在しない

→始点 s から各頂点への最短路が存在

(証明) 任意の頂点 v に対し, s から v への最短路の存在を示す.

P^* : 枝数 $\leq |V|-1$ の s から v への有向路のうち, 最も短いもの
以下, P^* が s から v への最短路であることを示す.

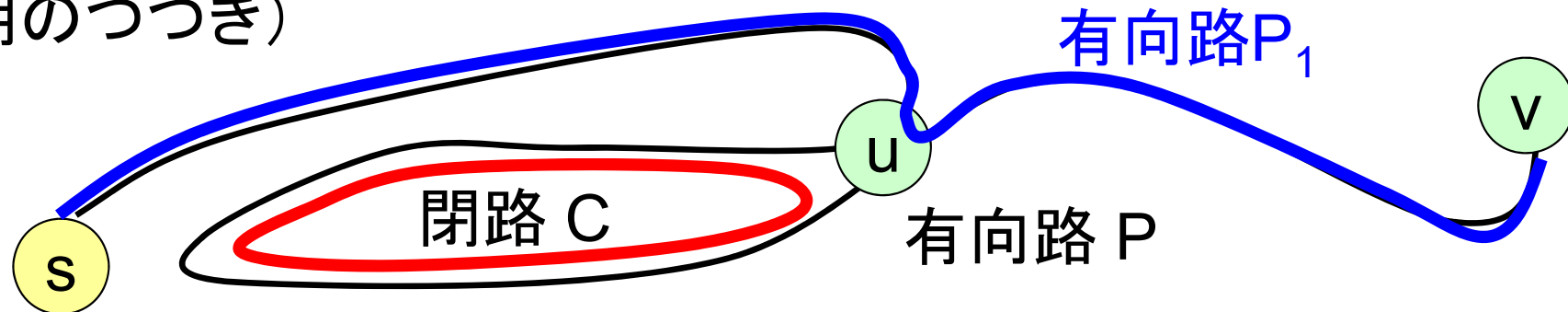
P : 枝数 $> |V|-1$ の s から v への任意の有向路

$\ell(P) \geq \ell(P^*)$ を示したい.

負閉路が存在しない $\rightarrow$ 最短路が存在

命題 負閉路が存在しない
 $\rightarrow$ 始点 s から各頂点への最短路が存在

(証明のつづき)



路 P の枝数 $\geq |V| \rightarrow$ ある頂点 u を2回以上通る

$\therefore$ 路 P は 閉路 C と 枝数 $< |P|$ の有向路 P_1 に分解可能

$\ell(P) = \ell(C) + \ell(P_1)$ および $\ell(C) \geq 0$ (負閉路なし) より,

$$\ell(P_1) \leq \ell(P)$$

P_1 の枝数 $\leq |V|-1$ ならば, $\ell(P^*) \leq \ell(P_1)$ が成り立つ $\rightarrow \ell(P^*) \leq \ell(P)$

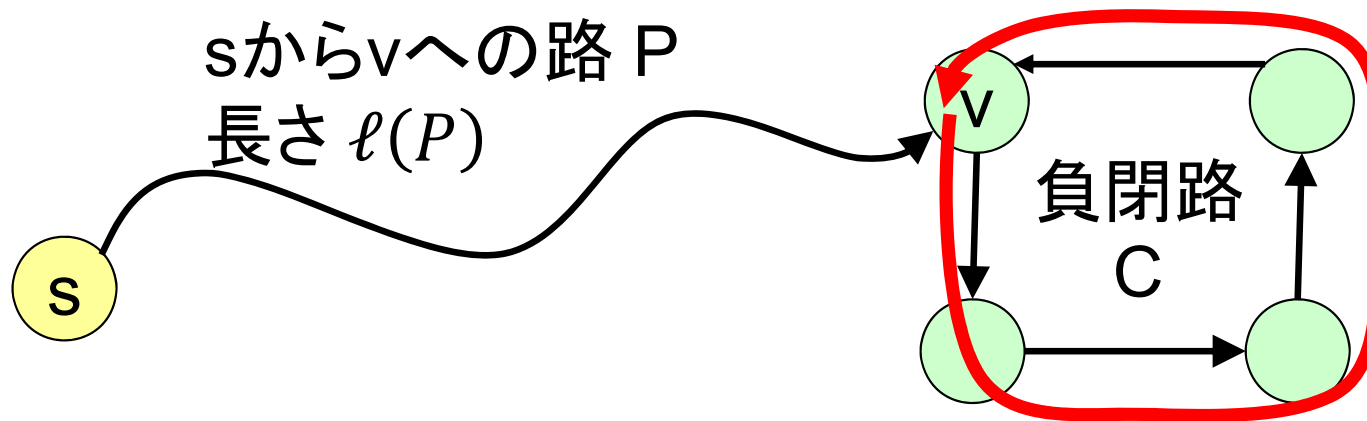
P_1 の枝数 $> |V|-1$ ならば, 同じ手順により,

枝数 $< |P_1|$ かつ $\ell(P_2) \leq \ell(P_1)$ を満たす路 P_2 を得る

以下同様に繰り返す.

負閉路が存在 $\Rightarrow$ 最短路は存在しない

命題 グラフに負閉路 C が存在 (長さ $\ell(C) < 0$)
 $\rightarrow C$ に含まれる各頂点 (および C から到達可能な頂点) v に対し,
 $\inf\{s \text{ から } v \text{ への路の長さ}\} = -\infty$
(つまり, 最短路が存在しない)



(証明) s から v への路として, 次のようなものを考える:

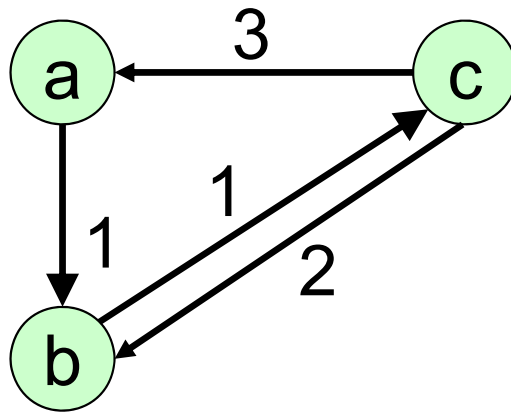
路 P を使って s から v に行く $\rightarrow$ 負閉路を k 回通って v に行く
これも s から v への路, 長さ $\ell(P) + \ell(C) \times k$
 k を任意に大きくする $\rightarrow$ 路の長さが任意に小さくなる

ポテンシャルと負閉路

最短路問題における
便利な道具

定義: 実数 $p(v) (v \in V)$ はポテンシャル

↔ 各枝 (u, v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v)$ を満たす



$p(a) = 3, p(b) = 2, p(c) = 0$ はポテンシャル

※ポテンシャルは存在しないこともある
(例: (c, a) の枝長を -3 にした場合)

定理 以下の3つの条件は等価:

- (i) 始点 s から各頂点への最短路が存在
- (ii) 負閉路が存在しない
- (iii) ポテンシャルが存在

(iii) → (ii),

(i) → (iii) を証明する

(ii) → (i) は証明済み

ポテンシャル存在 $\Rightarrow$ 負閉路なし

定理の「(iii) $\Rightarrow$ (ii)」の証明

命題 ポテンシャルは存在 $\Rightarrow$ 負閉路は存在しない
(対偶: 負閉路が存在 $\Rightarrow$ ポテンシャルは存在しない)

(証明) 任意の閉路 C に対し,
不等式 $p(v) - p(u) \leq \ell(u, v) \ ((u, v) \in C)$ を辺々足す
 $\Rightarrow 0 = \sum_{(u,v) \in C} [p(v) - p(u)] \leq \sum_{(u,v) \in C} \ell(u, v) = \text{閉路の長さ}$

最短路存在 $\Rightarrow$ ポテンシャル存在

定理の「(i) $\Rightarrow$ (iii)」の証明

命題 始点 s から各頂点への最短路が存在
 $\Rightarrow$ ポテンシャルが存在

(証明)

$d(v)$ = s から頂点 v への最短路長 とすると,
 ポテンシャルの条件が成り立つことを示す.



任意の枝 (u,v) に対し, P : 頂点 s から u への最短路 とおく

$\Rightarrow \tilde{P} = P \cup \{(u,v)\}$ は s から v への路,

その長さ $= d(u) + \ell(u,v) \geq v$ への最短路長 $= d(v)$

$\therefore$ 各枝 (u,v) に対し $p(v) - p(u) \leq \ell(u,v)$

ポテンシャルの計算

G: 負閉路のないグラフ

(1) 始点s から各頂点に到達可能な場合

前のスライドの命題および証明より,

負閉路が存在しない $\rightarrow$ ポテンシャルは必ず存在

ポテンシャルの計算方法:

$d(v) = s$ から頂点 v への最短路長

とすればよい

(2) 始点s からある頂点に到達出来ない場合

到達できない各頂点 t に対し,

枝長の十分大きい枝 (s,t) を G に追加したグラフを作成 $\rightarrow \tilde{G}$

新たな枝の長さ $\gg 0$ より, $\tilde{G}$ にも負閉路は存在しない

$\therefore \tilde{G}$ にもポテンシャルは存在

$\tilde{G}$ のポテンシャルは G のポテンシャルでもある

$\therefore$ (1) のやり方で, $\tilde{G}$ のポテンシャルを計算すればよい

差分不等式系の解の計算

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1: 全ての制約に2つの変数が現れる場合

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$$

$$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$$

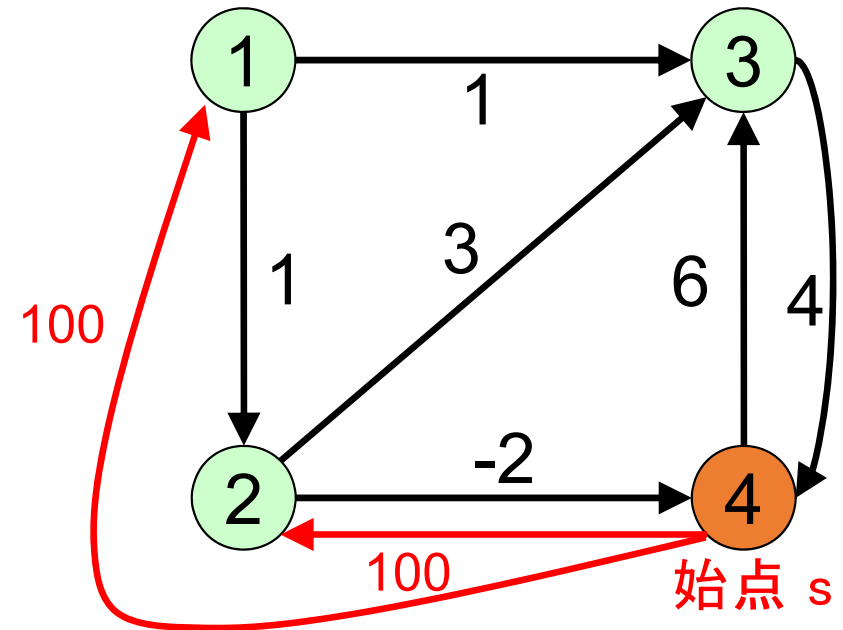
$$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$$

差分不等式系の解

= 以下のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約 $p_v - p_u \leq \alpha$ に対し,
長さ = α の枝 (u, v) を追加
- 適当な頂点を始点 s とおき, s から各頂点への最短路長を計算
 - 負閉路が存在する $\rightarrow$ 解なし
 - 負閉路が存在しない $\rightarrow$ 最短路長 $d(v)$ は解

※注意: 頂点 s からある頂点 u への路が存在しない場合,
長さの十分大きい枝 (s, u) を追加



変数の差の不等式系の解を求める

ケース2: 変数1つの制約を含む場合

$$\begin{aligned}
 p_2 - p_1 &\leq 1, p_3 - p_1 \leq 1, \\
 p_3 - p_2 &\leq 3, p_4 - p_2 \leq -2, \\
 p_4 - p_3 &\leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, \text{ } p_1 \leq 0, p_4 \geq 3
 \end{aligned}$$

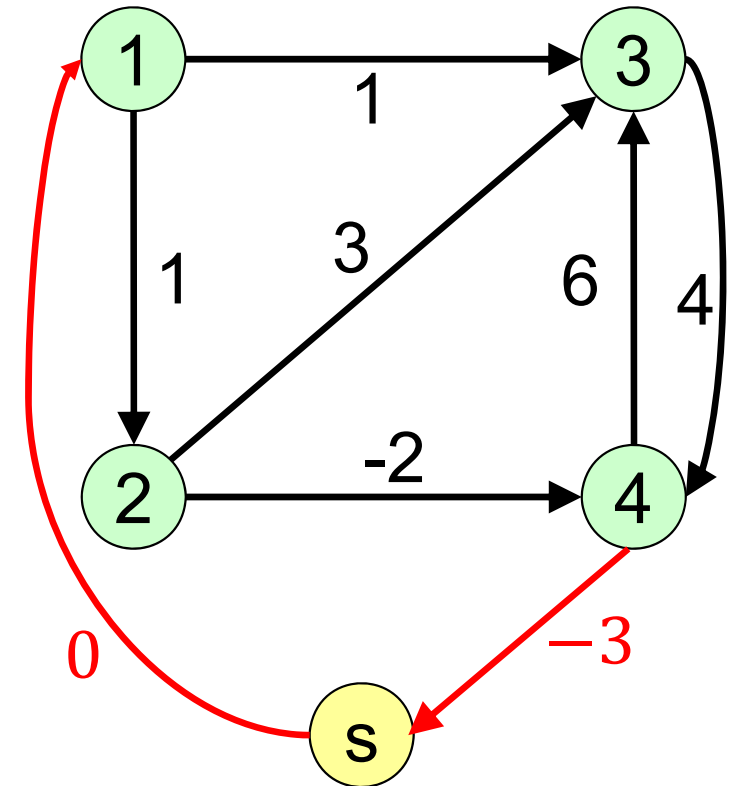
ケース1からの修正点:

(1) 変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 p_s を追加 (頂点 s 追加)
- 各変数 $p_1, \dots, p_n$ に対し,
 - $p_v \leq \beta$ の形の制約が存在
 $\rightarrow p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え (長さ β の枝 (s, v) 追加)
 - $p_v \geq \gamma$ の形の制約が存在
 $\rightarrow p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え (長さ $-\gamma$ の枝 (v, s) 追加)

(2) s を始点として, 各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しないならば, $p(s)=0$ となるのでうまくいく



均衡配分の判定方法

均衡配分の判定方法

定義: 財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は 均衡配分

$\iff$ 均衡条件を満たす財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在

- 入札者 i に財 j が割り当てられる
 $\rightarrow v(i, j) - p(j) \geq 0, v(i, j) - p(j) \geq v(i, h) - p(h) (\forall h \in N)$
- 入札者 i に財の割り当てがない
 $\rightarrow v(i, h) - p(h) \leq 0 (\forall h \in N)$
- 財 j が誰にも割当られない $\rightarrow p(j) = 0$

この差分不等式系に対応するグラフを作成し,
ポテンシャルの有無($\iff$ 負閉路の有無)を判定すれば良い

均衡配分の判定方法：具体例

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

変数は2つ,
変数がひとつだけの不等式がある
→ 頂点2個+頂点sのグラフを作る

入札者 A に財の割当がない

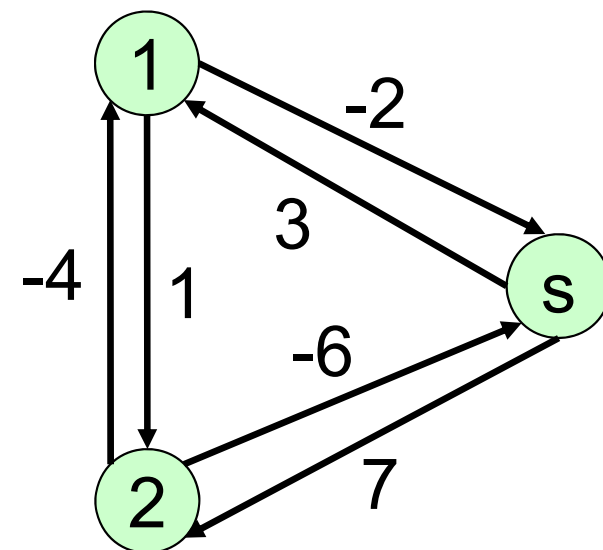
→ $v(A,1)-p(1) \leq 0, v(A,2)-p(2) \leq 0$

入札者 B に財 1 が割り当てられる

→ $v(B,1)-p(1) \geq 0, v(B,1)-p(1) \geq v(B,2)-p(2)$

入札者 C に財 2 が割り当てられる

→ $v(C,2)-p(2) \geq 0, v(C,2)-p(2) \geq v(C,1)-p(1)$



差分不等式系：

$$2 = v(A,1) \leq p(1) \leq v(B,1) = 3, \quad 6 = v(A,2) \leq p(2) \leq v(C,2) = 7,$$

$$4 = v(B,2) - v(B,1) \leq p(2) - p(1) \leq v(C,2) - v(C,1) = 1$$

演習問題

下記のように評価値および財の配分が与えられたとき、均衡配分か否かを判定するためのグラフを書け。

問1

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問2

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

問3

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8