## 第9回 破壊力学(応力論)

材料工学専攻 准教授 安田公一

降伏・necking・クリープ破壊

## 1. はじめに

延性破壊

セラミックスの力学的性質は、変形と破壊に大別することができる.ここで、変形 は弾性変形・塑性変形・粘弾性変形に分けることができる.また、破壊は脆性破壊と 延性破壊に分けることができる.これらの諸現象を、巨視的性質・微視的過程・関連 現象について整理すると、表1となる.

			-
現象	巨視的性質	微視的過程	関連現象
弾性変形	弾性スティフネス	原子間ポテンシャル	弾性波
塑性変形	降伏応力	転位・双晶変形	すべり帯形成・加工硬化
粘弾性変形	粘性率	点欠陥・転位・粒界	応力緩和・クリープ変形
脆性破壊	破壊靭性	き裂発生・成長	破壊統計・疲労破壊

表1 セラミックスの力学的性質

このように、セラミックスの力学的性質は多岐にわたり、それぞれがお互いに関連し ながら弾性力学・塑性力学・粘弾性力学・破壊力学という学問分野を基礎として発展 してきた.したがって、セラミックスの力学的性質を深く理解するためには、それぞ れの学問分野を地道に勉強していかなければならない.残念ながら、『学問に王道な し』ということになる.ここでは、セラミ

空洞発生・合体

ックスの主要な特徴である脆性破壊に着目して,破壊力学についての基礎的な考え 方を解説する.

極限強さ

2. 理論強度(破壊応力の理論値)

まず、セラミックスの破壊応力の理論値 ン  $\sigma_{th}$ (理論強度)を求める.図1のような シ 原子間ポテンシャルを仮定すると、外力が ャ 作用しない時の原子の平衡位置は  $a_0$ とな  $_{\mu}\sigma(a)$ る.外力が作用して原子間距離が a になっ た時の応力  $\sigma$ は、図1の形状から次式で近 応 似することができる.

$$\sigma = \sigma_{th} \sin \frac{\pi}{2r_0} (a - a_0) \tag{1}$$

このようにすると、原子間距離が臨界距離  $a_0 + r_0$ の時に破壊応力の理論値 $\sigma_{th}$ に達 することになる.  $d\sigma = Ed\varepsilon = E \frac{da}{a_0}$ の関係を



図1 原子間ポテンシャルと破壊応力の 理論値

用いると、ヤング率Eは次式となる.

$$E = a_0 \frac{d\sigma}{da} = \pi a_0 \frac{\sigma_{th}}{2r_0} \cos\frac{\pi}{2r_0} (a - a_0)$$
(2)

平衡位置近傍での微小変形を想定すれば、 cos 項はほぼ1に等しいので、破壊応力の 理論値  $\sigma_{th}$ は次式で与えられる.

$$\sigma_{th} = \frac{2Er_0}{\pi a_0} \tag{3}$$

実験的に求めた  $r_0/a_0$ の比は 0.14 程度の値なので,破壊応力の理論値 $\sigma_{th}$ は,ヤング率 Eの約10分の1となる.例えば,典型的なセラミックスである多結晶アルミナのヤ ング率は約400GPaなので,多結晶アルミナの破壊応力の理論値は約40GPa となる.しかし,実在する多結晶アルミナの破壊応力は400MPa(=0.4GP a)程度である.これは,破壊応力の理論値の約100分の1となっている.なお, 第2回結晶欠陥で転位論を説明した時に,理論せん断強度 $r_{th}$ として,

$$\tau_{th} = \frac{Gb}{2\pi a_0} \qquad (4)$$

を結果として与えたが、(4)式も破壊応力の理論値 $\sigma_{th}$ と同様にすれば、導出できる.

## 3. き裂先端での応力集中と応力拡大係数 K<sub>I</sub>

破壊応力の理論値と実測値の違いは、図2に示すように、材料中にき裂状欠陥 (Griffith き裂)が存在することで説明できる、すなわち、き裂状欠陥により応力集 中が起こり、外部応力σ<sup>∞</sup>よりもはるかに高い局所応力σ<sub>ij</sub>(r, θ)がき裂先端に発生して いるのである、この局所応力が破壊応力の理論値に達すると、き裂が巨視的に進展す るため、実在するセラミックスの破壊応力は、見かけ上、破壊応力の理論値よりも低 い値となると考えれば良い.

この主き裂先端近傍の局所応力場σ<sub>ij</sub>(r, θ)と局所変位 場(u,v,w)は、弾性力学によって既に解かれていて、図3 のような2次元貫通き裂(主き裂長さ2a)の局所応力場 を極座標系(r, θ)で表すと、次式で近似される.

モードI(無限遠で $\sigma_{yy}$ が $\sigma^{\infty}$ で与えられる場合)

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{\sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$
(5)



外部応力 $\sigma^{\infty}$ 

図2 材料中のき裂状欠陥 (モードI:開口型)

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{\sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

(6)

モード II (無限遠で 
$$\sigma_{xy}$$
 が  $r^{\infty}$ で与えられる場合)  

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \frac{\tau^{\infty}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \end{cases}$$
(6)

$$\begin{cases} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = \frac{\tau^{\infty} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{cases}$$
(9)  
$$w = \frac{2\tau^{\infty} \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{r}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$
(10)

 $w = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2}}$  (10) ここで、G は剛性率、 $\nu$ はポアソン比であり、 $\kappa$ は 次式で定義される.

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \end{cases} (for \ plain \ strain)$$
(11)  
(for plain stress)

専門書によっては、 $E=2(1+\nu)$ G を用いて、E から G に書き換えているものもある. ここで、モード I は開 ロ型、モード II は面内せん断型、モード III は面外せ ん断型の変形様式を表し、その違いを図4に示す. なお、変形モードが3つあるというのは、そもそも、 変形が x 方向、y 方向、z 方向の3つの変位成分 u,v,w だけで規定されているからである. なお、これらの 式は、前期の連続体力学における2 次元弾性論で説 明した応力関数を用いれば、導出できるが、紙数の 都合で、ここでは省略する.

以上の式を整理すると、局所応力場については、 次のように一般的に表すことができる.



図3 主き裂先端近傍の応力集中



## 図4 き裂先端の3つ の変形モード

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{\sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} f^{\mathrm{I}}{}_{ij}(\theta) \qquad (12)$$

ここで、 $\sigma^{\infty}$ は外部応力、aは主き裂の半長、 $f^{I}_{ij}(\theta)$ は $\theta$ のみの関数である。そこで、(12)式について吟味してみることにする。

まず、外部応力 $\sigma^{\infty}$ あるいは主き裂長さの半長aが大きくなればなるほど、局所応 カ $\sigma_{ij}(r, \theta)$ も増加することがわかる.また、主き裂の先端に近づけば近づくほど、局 所応力 $\sigma_{ij}(r, \theta)$ が増加し、主き裂先端では無限大に発散することがわかる.このよう に、(12)式はき裂状欠陥による応力集中の物理的状況を表していることがわかる.

それでは、この応力集中の程度を表すのに、どのようなパラメーターを使えば良い かを考えなければならない、一番素朴な考え方は、主き裂先端の応力の大きさをパラ メーターにすることであるが、外部応力σ<sup>∞</sup>が作用すればどのような場合でも、主き 裂先端の応力は無限大に発散するので、これをパラメーターにすることはできない、 では、極座標のrとθに適当な値を入れて、その場所での応力の大きさを求めれば有 限の値として比較できるが、特定の場所の指定の仕方は、特に根拠がある訳ではない、

そこで、(12)式を良く見てみると、 $\sqrt{2\pi r}$ や $f^{I}_{ij}(\theta)$ は極座標に関連した変数なの

で、それ以外の $\sigma^{\infty}\sqrt{\pi a}$ で局所応力場の強弱を比較すれば良いことに気付く、これを、 新たに応力拡大係数 $K_1$ (ケー・ワンと読む)と定義する.

$$K_{\rm I} \equiv \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \qquad (13)$$

ここで注意しなければならないのは、応力拡大係数K<sub>1</sub>は外部応力 $\sigma^{\infty}$ と主き裂の半長 aの両方の値で決まると言うことである、すなわち、外部応力 $\sigma^{\infty}$ と主き裂の半長 a の組み合わせとして、(10MPa,1m)とした場合でも、(1MPa, 100m)とした場合でも、応 力拡大係数K<sub>1</sub>は同じ10 $\sqrt{\pi}$  MPa $\sqrt{m}$ という値になり、応力集中の程度も同じになる.

表2には、いろいろな configuration における応力拡大係数 K<sub>I</sub>の算出式を示した.

この応力拡大係数 $K_I$ を用いて、脆性破壊を表現すると次のようになる.まず、ある部材に半長が a の主き裂が存在すると仮定する.この部材に外部応力 $\sigma^{\infty}$ を負荷し、その値を徐々に増加して行く.これに伴って(13)式で定義された応力拡大係数 $K_I$ も増加して行くことになる.そして、この応力拡大係数 $K_I$ が材料固有のある値に達した時に、主き裂が巨視的に進展して脆性破壊が起こったと考える.この材料固有の値を $K_{IC}$ (ケー・ワン・シーと読む)と表記して、臨界応力拡大係数と定義する.すなわち、次式となる.

$$K_{IC} = \sigma_f^{\infty} \sqrt{\pi a} \qquad (14)$$

表2 いろいろな configuration における応力拡大係数 K<sub>I</sub>(省略)

ここで $\sigma_{f}^{\infty}$ は破壊応力である.この式より,臨界応力拡大係数 $K_{1c}$ と主き裂の半長 a が既知であるならば,その部材の破壊応力 $\sigma_{f}^{\infty}$ が推定できることになる.また同様に, 臨界応力拡大係数 $K_{1c}$ と破壊応力 $\sigma_{f}^{\infty}$ が既知であるならば,その部材の最弱欠陥の大 きさ a を推定することができる.表3には代表的な材料の臨界応力拡大係数 $K_{1c}$ を 示した.また,臨界応力拡大係数 $K_{1c}$ のことを破壊靭性と略称する場合が多い.

なお,モード II やモード III についても,同様の議論が成り立ち,K<sub>II</sub>,K<sub>III</sub> や K<sub>IIC</sub>, K<sub>IIIC</sub> などが定義される.しかし,モード II やモード III に対する実験や解析はそれほ ど進んでいないのが,現状である.

材料	K <sub>IC</sub> /MPa√m
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	5-8
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4
SiC	3-4
ガラス	0.5-1
C/C composites	8-10
鋳鉄	20
アルミニウム合金	30-50
鉄鋼	100

表3 代表的な材料のK<sub>IC</sub>

4. 小規模降伏条件

これで破壊靭性の定義についての説明は 終わりにしたいのであるが、これまでの議 論でひとつ曖昧にしてきた部分があるので, それについて補足したい. それは, 応力拡 大係数の定義のところで『主き裂先端近傍 の局所応力は主き裂先端で無限大に発散す る』と述べたことである.もし、これが現 実に起こっているのならば、どのようなセ ラミックスも無限小の外部応力を負荷した だけで破壊することになる、実際にこうな らないのは、図5(a)に示すように、き裂先 端にはフロンタル・プロセスゾーンという 微視的破壊領域が既に形成されており、無 限大に発散する応力集中を緩和しているか らである. しかし, 通常のセラミックスに おいては、このフロンタル・プロセスゾー

(a) フロンタル・プロセスゾーン



(b) プロセスゾーン・ウェイク



図5 プロセスゾーンの概念図

ンの大きさはき裂長さや部材の代表寸法に対して十分小さく,全系の力学的ポテンシャルエネルギー変化に対しては、フロンタル・プロセスゾーン以外の弾性変形領域が 支配的であると考えられている.このような場合には前述の議論は正しいと考えられ、 金属の言葉を借りるならば『小規模降伏条件が成立している』と言う.

これに対して、図5(b)に示したように、フロンタル・プロセスゾーンが形成された

後で主き裂が進展し、主き裂の後方に残留してできるプロセスゾーン・ウェイクは、 その影響が大きいと考えられている. すなわち, microcrack toughening や transformation toughening などの zone shielding 機構, あるいは bridging や pullout などの contact shielding 機構などの複雑な強化メカニズムが関与して、き裂長さと共に破壊靭性パラ メータが変化することが起こる. これをRカーブ(き裂進展抵抗曲線)挙動と呼ぶ.