応用線形代数—第２回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１８年度 第１クォーター

提出〆切　４月２４日（火）　１６時５０分まで

レポートボックス １ー４　応用線形代数

1. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ を固定し，変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ との内積を $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ として $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ の写像を定義する．この写像は線形写像であるか．線形写像である場合は定義を用いて示せ．そうでない場合は理由を述べよ．

2. 上記の写像を用いて $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ で定義される集合が $\mathbb{R}^n$ の部分空間となっていることを示せ．

3. 次の行列のランク（階数）を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $\boldsymbol{V}, W$ をベクトル空間とし，$T : V \to W$ を線形写像とする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ に対して，次のことを示せ．

   (a) $T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立であれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

   (b) T が単射であり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が線形独立であれば，$T(\boldsymbol{v}_1), T(\boldsymbol{v}_2), \ldots, T(\boldsymbol{v}_k)$ も線形独立である．